BURHAN

Résumé : Calcul trigonométrique

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/calcul-trigonometrique/resume

Chapitre	Semestre
Calcul trigonométrique	Semestre 1

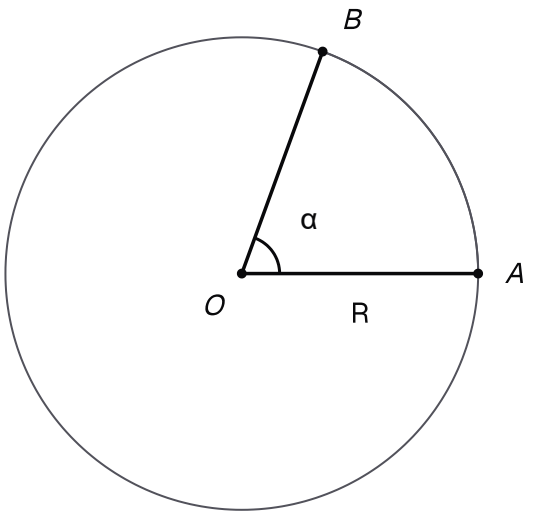
Degré, radian et grade

Définition : Unités de mesure des angles : degré, radian, grade

Un angle géométrique se mesure avec l'une des trois unités suivantes, fixées par la mesure de l'**angle plein** (un tour complet) :

- en **degrés** : l'angle plein mesure 360° ;
- en **radians** : l'angle plein mesure $2\pi \text{ rad}$;
- en **grades** : l'angle plein mesure 400 gr.

Sur un cercle de rayon R, un angle au centre de 1 rad intercepte un arc de longueur R ; plus généralement, un angle au centre de $\alpha \text{ rad}$ intercepte un arc de longueur αR, et l'angle au centre est proportionnel à l'arc qu'il intercepte.



Sur un cercle de rayon R, l'angle au centre α, en radians, découpe un arc de longueur α R.

Propriété : Conversion entre degré, radian et grade

Si un même angle mesure d°, $r \text{ rad}$ et $g \text{ gr}$, alors

$$\frac{d}{180} = \frac{r}{\pi} = \frac{g}{200}.$$

En particulier, l'angle plat mesure $180°$, π rad et 200 gr, et l'angle droit mesure $90°$, $\frac{\pi}{2}$ rad et 100 gr.

Méthode : passer d'une unité à l'autre

1. **Pose** les trois quotients égaux : $\frac{d}{180} = \frac{r}{\pi} = \frac{g}{200}$.
2. **Remplace** la mesure que tu connais.
3. **Isole** la mesure demandée. En radians, laisse π dans le résultat exact.
4. **Vérifie** l'ordre de grandeur : un angle plus petit que l'angle droit mesure moins de $90°$, de $\frac{\pi}{2}$ rad et de 100 gr.

Exemple

Énoncé. Exprime un angle de $18°$ en radians et en grades.

Radians. D'après la conversion entre degré, radian et grade, $\frac{18}{180} = \frac{r}{\pi}$, donc

$$r = \frac{18\pi}{180} = \frac{\pi}{10}.$$

Grades. De même, $\frac{18}{180} = \frac{g}{200}$, donc

$$g = \frac{18 \times 200}{180} = 20.$$

Conclusion. $18° = \frac{\pi}{10}$ rad $= 20$ gr : c'est le cinquième d'un angle droit.

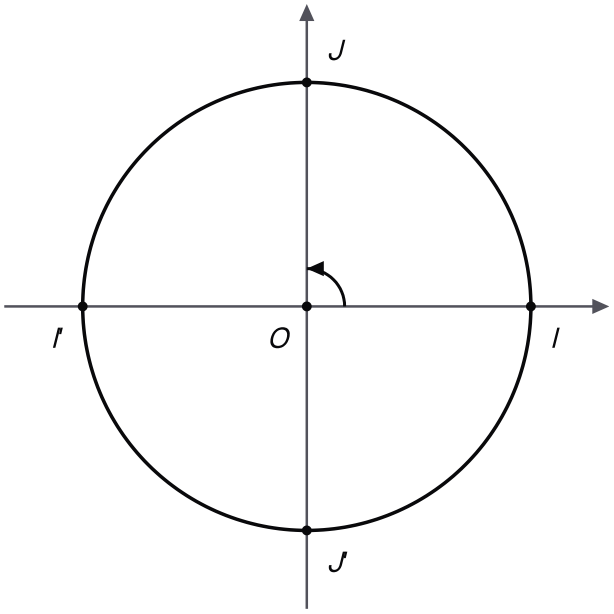
Cercle trigonométrique et abscisses curvilignes

Définition : Cercle trigonométrique

On **oriente** le plan : le sens contraire du mouvement des aiguilles d'une montre est appelé sens **direct** (ou positif), l'autre sens est appelé sens **indirect** (ou négatif).

Le **cercle trigonométrique** est un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1, muni d'un point I appelé **origine**, et orienté dans le sens direct.

On note J le point de $\mathcal{C}$ tel que le quart de cercle de I à J soit parcouru dans le sens direct, et I', J' les points de $\mathcal{C}$ diamétralement opposés à I et J. Le repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ est orthonormé ; on dit qu'il est **direct**.



Le cercle trigonométrique : centre O, rayon 1, origine I, puis les points J, I' et J', et la flèche du sens direct.

Définition : Abscisses curvilignes d'un point

Soit $\mathcal{C}$ un cercle trigonométrique d'origine I et x un réel. À partir de I, on parcourt $\mathcal{C}$:

- sur une longueur x dans le sens direct, si $x \geq 0$;
- sur une longueur $-x$ dans le sens indirect, si $x < 0$.

On arrive en un point M de $\mathcal{C}$. On dit que x est **une abscisse curviligne** du point M.

Le cercle $\mathcal{C}$ a pour longueur 2π : 0 est une abscisse curviligne de I, $\frac{\pi}{2}$ une abscisse curviligne de J, π et $-\pi$ des abscisses curvilignes de I', et $-\frac{\pi}{2}$ une abscisse curviligne de J'.

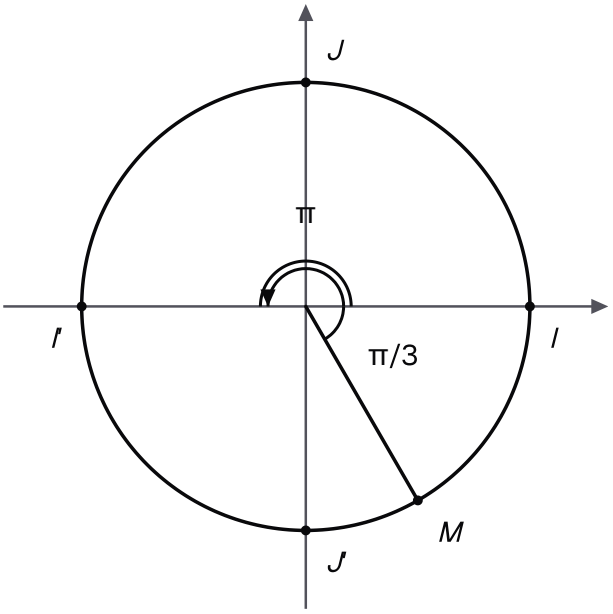
Propriété : Abscisses curvilignes d'un même point

Si x est une abscisse curviligne d'un point M de $\mathcal{C}$, alors les abscisses curvilignes de M sont exactement les réels $x + 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.

Ainsi, deux réels x et y sont des abscisses curvilignes d'un même point si et seulement si $y - x$ est un multiple entier de 2π. On écrit alors $y \equiv x\ [2\pi]$, et on lit « y est congru à x modulo 2π ».

Propriété : Abscisse curviligne principale

Tout point M du cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ possède **une seule** abscisse curviligne appartenant à l'intervalle $]-\pi, \pi]$. On l'appelle l'**abscisse curviligne principale** du point M.



Demi-cercle du haut pour les abscisses principales de 0 à π, demi-cercle du bas pour celles de −π exclu à 0 ; ici M a pour abscisse principale −π/3.

Méthode : placer un point sur le cercle

1. **Ramène** l'abscisse donnée à son abscisse curviligne principale x_0.
2. **Pars** du point I : vers J si $x_0 > 0$, vers J' si $x_0 < 0$.
3. **Découpe** le parcours en quarts de cercle, chacun de longueur $\frac{\pi}{2}$.
4. **Nomme** le quart de cercle où arrive le point : il annonce les signes de ses coordonnées.

Méthode : trouver l'abscisse curviligne principale

1. **Écris** le réel comme une fraction de π.
2. **Repère** le multiple de 2π le plus proche de ce réel. Si deux multiples sont à égale distance, choisis celui qui donne π.
3. **Soustrais**-le : tu obtiens x_0.
4. **Contrôle** que $-\pi < x_0 \leq \pi$. Le réel π convient, le réel $-\pi$ ne convient pas.

Exemple

Avec $\frac{25\pi}{4}$. Le multiple de 2π le plus proche est $6\pi = \frac{24\pi}{4}$. Donc

$$x_0 = \frac{25\pi}{4} - 6\pi = \frac{\pi}{4}.$$

Avec $\frac{23\pi}{6}$. Le multiple le plus proche est $4\pi = \frac{24\pi}{6}$. Donc

$$x_0 = \frac{23\pi}{6} - 4\pi = -\frac{\pi}{6}.$$

Placement. Comme $-\frac{\pi}{6} \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$, ce point est sur le quart de cercle de J' à I.

Exemple

Énoncé. Quelle est l'abscisse curviligne principale du point d'abscisse -3π ?

Calcul. On ajoute deux tours : $-3\pi + 4\pi = \pi$, et π appartient à $]-\pi, \pi]$.

Conclusion. L'abscisse principale vaut π : c'est le point I'. Le réel $-3\pi + 2\pi = -\pi$ repère aussi I', mais il est hors de l'intervalle.

Attention : Le bon intervalle pour la mesure principale

L'intervalle de travail est $]-\pi, \pi]$, pas $[0, 2\pi[$.

L'angle de mesure $\frac{5\pi}{3}$ a pour mesure principale

$$\frac{5\pi}{3} - 2\pi = -\frac{\pi}{3},$$

et non $\frac{5\pi}{3}$.

Pour l'angle plat, garde π : le réel $-\pi$ est exclu.

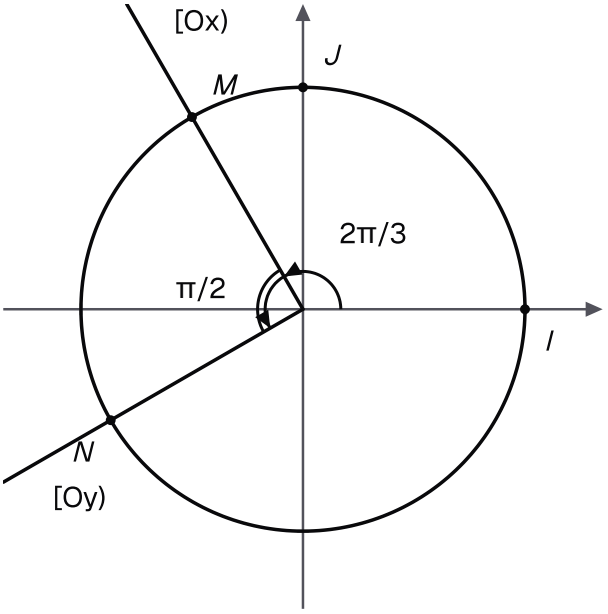
Angles orientés de demi-droites et de vecteurs

Définition : Angle orienté de deux demi-droites

Soit $[Ox)$ et $[Oy)$ deux demi-droites de même origine O, et $\mathcal{C}$ un cercle trigonométrique de centre O. La demi-droite $[Ox)$ coupe $\mathcal{C}$ en un point M d'abscisse curviligne α, et la demi-droite $[Oy)$ coupe $\mathcal{C}$ en un point N d'abscisse curviligne β.

- Le couple $([Ox), [Oy))$ s'appelle un **angle orienté** de demi-droites.
- Chaque réel $\beta - \alpha + 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$, est **une mesure** de cet angle orienté. On écrit $([Ox), [Oy)) \equiv \beta - \alpha\ [2\pi]$.
- Parmi ces mesures, une seule appartient à $]-\pi, \pi]$: c'est la **mesure principale** de l'angle orienté.

On admet que ces mesures ne dépendent pas de l'origine choisie sur $\mathcal{C}$.



Un angle orienté de demi-droites se lit sur le cercle de centre O : de M, sur [Ox), à N, sur [Oy), dans le sens direct.

Propriété : Relation de Chasles pour les demi-droites

Soit $[Ox)$, $[Oy)$ et $[Oz)$ trois demi-droites de même origine O. Alors

$$\begin{aligned}&([Ox),[Oy))\\&\quad+([Oy),[Oz))\\&\equiv([Ox),[Oz))\ [2\pi]\ :\end{aligned}$$

la somme d'une mesure du premier angle et d'une mesure du deuxième est une mesure du troisième.

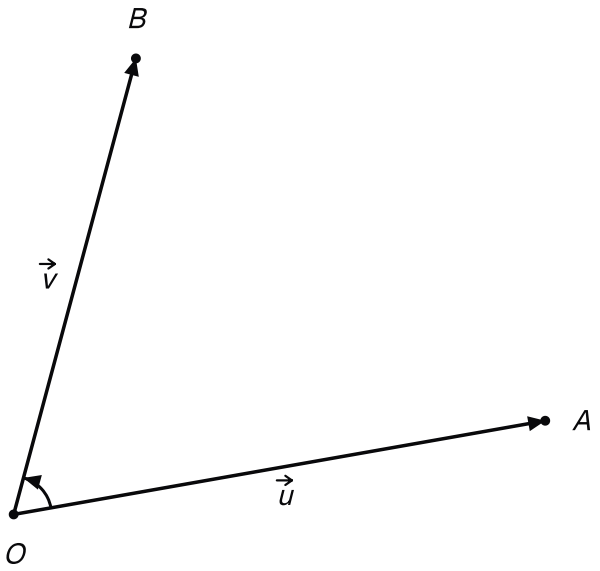
De plus, $([Oy),[Ox))\equiv-([Ox),[Oy))\ [2\pi]$ et $([Ox),[Ox))\equiv 0\ [2\pi]$.

Définition : Angle orienté de deux vecteurs non nuls

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et O un point du plan. On construit les points A et B tels que $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$ et $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$.

L'**angle orienté** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $(\vec{u},\vec{v})$, est l'angle orienté de demi-droites $([OA),[OB))$. Ses mesures et sa mesure principale sont celles de $([OA),[OB))$; on écrit $(\vec{u},\vec{v})\equiv\theta\ [2\pi]$ lorsque θ est une mesure de $(\vec{u},\vec{v})$.

On admet que cet angle orienté ne dépend pas du point O choisi. Pour trois points A, B, C avec $B\neq A$ et $C\neq A$, on note $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ l'angle orienté des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.



Pour mesurer l'angle orienté (u, v), on dessine les deux vecteurs depuis un même point O.

Propriété : Relation de Chasles pour les vecteurs

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls. Alors

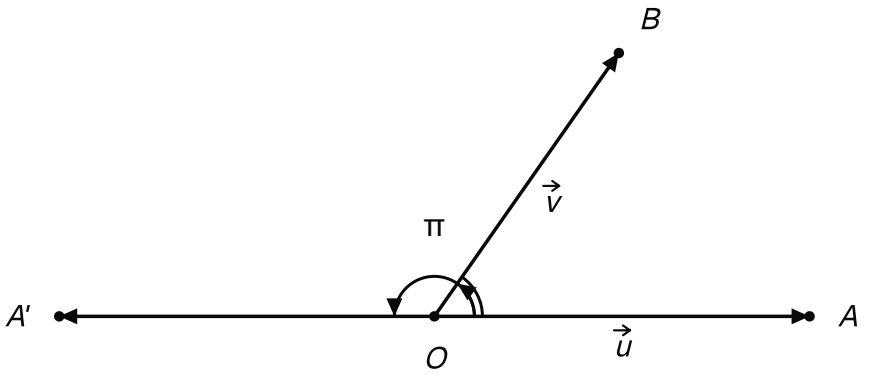
$$(\vec{u},\vec{v})+(\vec{v},\vec{w}) \equiv (\vec{u},\vec{w})\ [2\pi].$$

De plus, $(\vec{v},\vec{u}) \equiv -(\vec{u},\vec{v})\ [2\pi]$ et $(\vec{u},\vec{u}) \equiv 0\ [2\pi]$.

Propriété : Angles orientés et vecteurs opposés

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et k un réel strictement positif. Alors :

- $(\vec{u},-\vec{u}) \equiv \pi\ [2\pi]$;
- $(-\vec{u},\vec{v}) \equiv (\vec{u},\vec{v})+\pi\ [2\pi]$ et $(\vec{u},-\vec{v}) \equiv (\vec{u},\vec{v})+\pi\ [2\pi]$;
- $(-\vec{u},-\vec{v}) \equiv (\vec{u},\vec{v})\ [2\pi]$;
- $(k\,\vec{u},\vec{v}) \equiv (\vec{u},\vec{v})\ [2\pi]$ et $(\vec{u},k\,\vec{v}) \equiv (\vec{u},\vec{v})\ [2\pi]$.



Changer u en son opposé, c'est faire un demi-tour : la mesure augmente de π.

Propriété : Angles orientés et colinéarité

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

- $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv 0\ [2\pi]$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens ;
- $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \pi\ [2\pi]$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraires.

En particulier, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si 0 ou π est une mesure de $(\vec{u}, \vec{v})$.

Méthode : mesurer un angle orienté

1. **Découpe** l'angle cherché avec la relation de Chasles, en passant par des vecteurs bien connus.
2. **Remplace** un vecteur par son opposé : la mesure augmente de π.
3. **Échange** l'ordre des deux vecteurs : la mesure change de signe.
4. **Additionne**, puis ajoute ou retire des tours complets pour arriver dans $]-\pi, \pi]$.

Exemple

Énoncé. On sait que $([Ox), [Oy)) \equiv \dfrac{3\pi}{5}\ [2\pi]$ et $([Oy), [Oz)) \equiv \dfrac{4\pi}{5}\ [2\pi]$. Trouve la mesure principale de $([Ox), [Oz))$.

Chasles. D'après la relation de Chasles,

$$\begin{aligned}([Ox), [Oz)) &\equiv \frac{3\pi}{5} + \frac{4\pi}{5} \\ &= \frac{7\pi}{5}\ [2\pi].\end{aligned}$$

Mesure principale. $\dfrac{7\pi}{5} > \pi$: on retire un tour.

$$\frac{7\pi}{5} - 2\pi = -\frac{3\pi}{5},$$

qui appartient à $]-\pi, \pi]$.

Conclusion. La mesure principale de $([Ox), [Oz))$ est $-\dfrac{3\pi}{5}$.

Exemple

Énoncé. On sait que $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \dfrac{\pi}{5}\ [2\pi]$. Mesure $(-\vec{u}, \vec{v})$ et $(\vec{v}, \vec{u})$.

Vecteur opposé. D'après la propriété des vecteurs opposés,

$$\begin{aligned}(-\vec{u}, \vec{v}) &\equiv \frac{\pi}{5} + \pi \\ &= \frac{6\pi}{5}\ [2\pi].\end{aligned}$$

Sa mesure principale est $\dfrac{6\pi}{5} - 2\pi = -\dfrac{4\pi}{5}$.

Ordre inversé. D'après la relation de Chasles, $(\vec{v}, \vec{u}) \equiv -\dfrac{\pi}{5}\ [2\pi]$.

Conclusion. Les mesures principales de $(-\vec{u}, \vec{v})$ et de $(\vec{v}, \vec{u})$ sont $-\dfrac{4\pi}{5}$ et $-\dfrac{\pi}{5}$.

Attention : Le premier vecteur, puis le second

Dire « l'angle de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ » ne suffit pas : l'ordre fixe le sens.

Si $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$, alors $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) \equiv -\dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$. Les deux angles ont la même ouverture, mais ils sont parcourus en sens contraires.

Cosinus, sinus et tangente

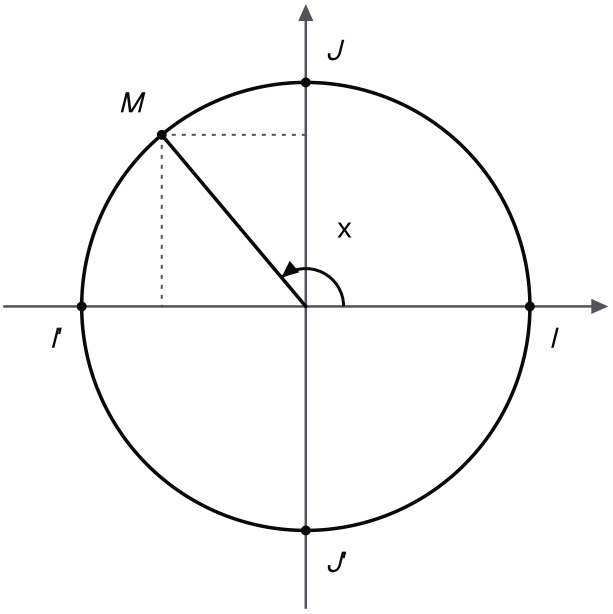
Définition : Cosinus, sinus et tangente d'un réel

Soit x un réel et M le point du cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ d'abscisse curviligne x. Dans le repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$:

- le **cosinus** de x, noté $\cos x$, est l'abscisse du point M ;
- le **sinus** de x, noté $\sin x$, est l'ordonnée du point M.

Ainsi $M(\cos x, \sin x)$. Lorsque $\cos x \neq 0$, la **tangente** de x est le réel $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

Les réels $\cos x$, $\sin x$ et $\tan x$ s'appellent les **lignes trigonométriques** de x.



Le point M d'abscisse curviligne x a pour abscisse cos x et pour ordonnée sin x, lues par les lignes de rappel.

Propriété : Relation fondamentale

Pour tout réel x,

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

où $\cos^2 x$ désigne $(\cos x)^2$ et $\sin^2 x$ désigne $(\sin x)^2$.

Propriété : Encadrement et tours complets

Pour tout réel x et tout entier relatif k :

- $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$;
- $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$.

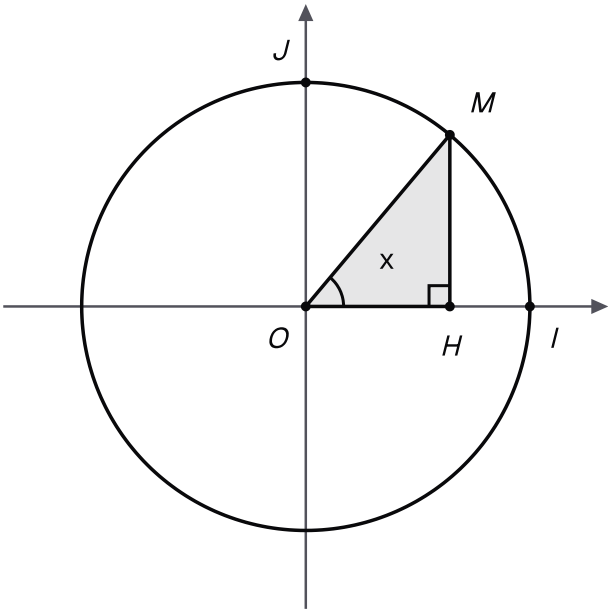
Propriété : Tangente : réels où elle existe et relation

- $\cos x = 0$ si et seulement si $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. La tangente est donc définie pour tout réel x différent de $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.
- Pour tout réel x tel que $\cos x \neq 0$,

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Propriété : Lien avec la trigonométrie du collège

Soit x un réel tel que $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, et M le point du cercle trigonométrique d'abscisse curviligne x. Alors l'angle géométrique $\widehat{IOM}$ est aigu et mesure x radians, et $\cos x$, $\sin x$ et $\tan x$ sont le cosinus, le sinus et la tangente de cet angle aigu, au sens du collège.



Pour 0 < x < π/2, le triangle OHM, rectangle en H, a une hypoténuse égale à 1 : ses côtés OH et HM valent cos x et sin x.

Définition : Lignes trigonométriques d'un angle orienté

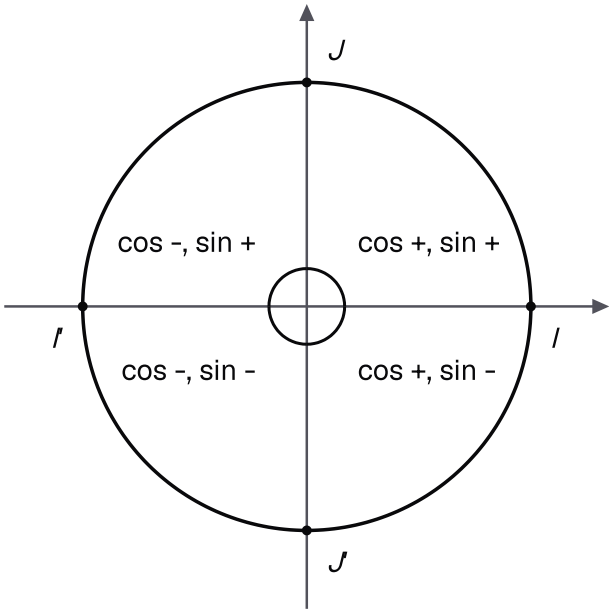
Soit $(\vec{u}, \vec{v})$ l'angle orienté de deux vecteurs non nuls et θ l'une de ses mesures. On appelle **cosinus**, **sinus** et, si $\cos\theta \neq 0$, **tangente** de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ les réels $\cos\theta$, $\sin\theta$ et $\tan\theta$. On les note $\cos(\vec{u}, \vec{v})$, $\sin(\vec{u}, \vec{v})$ et $\tan(\vec{u}, \vec{v})$.

Ces réels ne dépendent pas de la mesure θ choisie : deux mesures diffèrent d'un multiple entier de 2π, et leurs cosinus, sinus et tangentes sont égaux.

À retenir : Les signes, quart de cercle par quart de cercle

Le point M d'abscisse x a pour coordonnées $(\cos x, \sin x)$. Son quart de cercle donne donc les signes :

- $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$: de I à J, $\cos x > 0$ et $\sin x > 0$;
- $x \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$: de J à I', $\cos x < 0$ et $\sin x > 0$;
- $x \in \left]-\pi, -\dfrac{\pi}{2}\right[$: de I' à J', $\cos x < 0$ et $\sin x < 0$;
- $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, 0\right[$: de J' à I, $\cos x > 0$ et $\sin x < 0$.



Les signes du cosinus et du sinus dans chacun des quatre quarts du cercle trigonométrique.

Attention : Le carré porte sur la ligne trigonométrique

L'écriture $\sin^2 x$ veut dire $(\sin x)^2$: on élève le sinus au carré, pas le réel x.

Ainsi $\sin^2 \dfrac{\pi}{6} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$. Ce n'est pas le sinus du réel $\dfrac{\pi^2}{36}$.

Attention : Pas de tangente quand le cosinus est nul

Avant d'écrire une tangente, regarde le cosinus. Pour $x = \dfrac{3\pi}{2}$, le point est J' et $\cos \dfrac{3\pi}{2} = 0$: la tangente de $\dfrac{3\pi}{2}$ n'existe pas.

Il en va de même pour tout réel $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Une ligne à partir d'une autre

Méthode : calculer une ligne à partir d'une autre

1. **Pars** de la relation fondamentale : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
2. **Isole** le carré de la ligne inconnue, puis prends ses deux racines carrées possibles.
3. **Tranche** grâce à l'intervalle : nomme le quart de cercle du point, il donne le signe.
4. **Termine** par la tangente avec $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$. Si c'est la tangente qui est donnée, commence par $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Exemple

Énoncé. On sait que $\sin x = \dfrac{7}{25}$ et $x \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$. Calcule $\cos x$ et $\tan x$.

Carré. D'après la relation fondamentale,

$$\cos^2 x = 1 - \frac{49}{625} = \frac{576}{625}.$$

Signe. Comme $x \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$, le point est sur le quart de cercle de J à I' : $\cos x < 0$. Donc $\cos x = -\dfrac{24}{25}$.

Tangente. D'après la définition de la tangente,

$$\begin{aligned}\tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} \\ &= \frac{7}{25} \times \left(-\frac{25}{24}\right) \\ &= -\frac{7}{24}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\cos x = -\dfrac{24}{25}$ et $\tan x = -\dfrac{7}{24}$.

Exemple

Énoncé. On sait que $\tan x = -3$ et $x \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$. Calcule $\cos x$ et $\sin x$.

Cosinus. D'après la relation $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, on a

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + 9 = 10,$$

soit $\cos^2 x = \dfrac{1}{10}$.

Comme $x \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$, le point est sur le quart de cercle de J à I', donc $\cos x < 0$: $\cos x = -\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

Sinus. D'après la définition de la tangente,

$$\begin{aligned}\sin x &= \tan x \times \cos x \\ &= \frac{3\sqrt{10}}{10},\end{aligned}$$

positif comme prévu.

Conclusion. $\cos x = -\dfrac{\sqrt{10}}{10}$ et $\sin x = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$.

Attention : Deux racines carrées, un seul bon signe

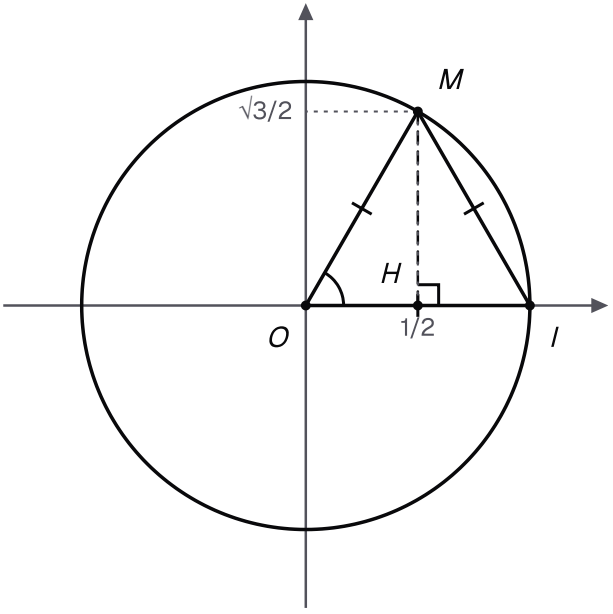
Un cosinus seul laisse deux sinus possibles. Avec $\cos x = \dfrac{1}{2}$, la relation fondamentale donne $\sin^2 x = \dfrac{3}{4}$.

Le sinus vaut alors $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ou $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Sans intervalle de travail, tu ne peux pas trancher.

Angles usuels

Propriété : Lignes trigonométriques des angles usuels

- $\cos 0 = 1, \sin 0 = 0$ et $\tan 0 = 0$;
- $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ et $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$;
- $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\tan \frac{\pi}{4} = 1$;
- $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$;
- $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ et $\sin \frac{\pi}{2} = 1$; $\tan \frac{\pi}{2}$ n'est pas défini.



Le triangle équilatéral OIM coupé par sa hauteur [MH] donne les valeurs exactes en π/3 ; la même figure, lue depuis l'axe des ordonnées, donne celles en π/6.

Angle nul : 0 degré, 0 grade

$$\cos 0 = 1$$
$$\sin 0 = 0$$
$$\tan 0 = 0$$

30 degrés, soit 100/3 grades

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$
$$\tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

45 degrés, soit 50 grades

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\tan \frac{\pi}{4} = 1$$

60 degrés, soit 200/3 grades

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$
$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

Angle droit : 90 degrés, 100 grades ; pas de tangente

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0$$
$$\sin\frac{\pi}{2} = 1$$

À retenir : Une liste pour deux colonnes

De 0 à $\frac{\pi}{2}$, les sinus montent : 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 1. Les cosinus parcourent la même liste à l'envers.

Retiens donc une seule liste, puis contrôle avec la relation fondamentale :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1.$$

Angles associés et simplification

Propriété : Angles associés : opposé, somme ou différence avec π

Pour tout réel x :

- $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$;
- $\cos(\pi - x) = -\cos x$ et $\sin(\pi - x) = \sin x$;
- $\cos(\pi + x) = -\cos x$ et $\sin(\pi + x) = -\sin x$.

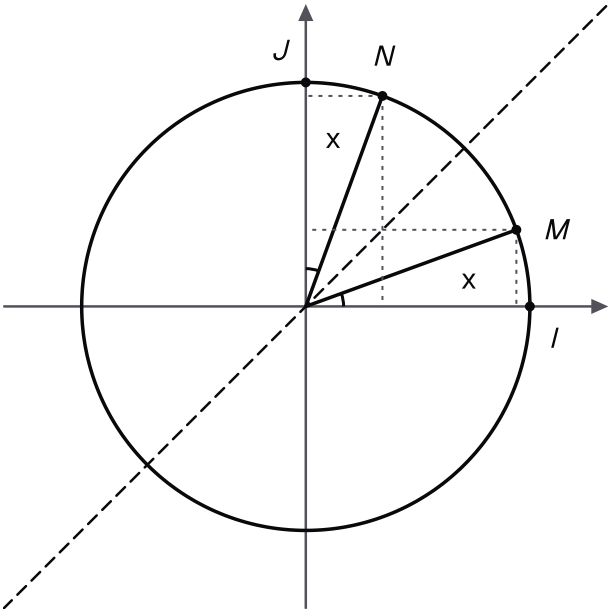
Pour tout réel x tel que $\cos x \neq 0$: $\tan(-x) = -\tan x$, $\tan(\pi - x) = -\tan x$ et $\tan(\pi + x) = \tan x$.

Propriété : Angles associés : somme ou différence avec un angle droit

Pour tout réel x :

- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$;
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$.

Pour tout réel x tel que $\cos x \neq 0$ et $\sin x \neq 0$: $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x}$.



Symétrie par rapport à la bissectrice de l'angle IOJ : N, d'abscisse π/2 − x, a pour abscisse sin x et pour ordonnée cos x.

Méthode : lignes d'un angle associé

1. **Écris** le réel avec un angle usuel a : $-a$, $\pi - a$, $\pi + a$, $\dfrac{\pi}{2} - a$ ou $\dfrac{\pi}{2} + a$, plus des tours complets.
2. **Supprime** les tours complets : cosinus et sinus ne changent pas.
3. **Applique** la relation d'angles associés qui convient.
4. **Remplace** par la valeur du tableau, puis vérifie le signe avec le quart de cercle.

Exemple

Avec $\dfrac{4\pi}{3}$. On écrit $\dfrac{4\pi}{3} = \pi + \dfrac{\pi}{3}$. D'après les angles associés :

$$\cos\frac{4\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2},$$

$$\sin\frac{4\pi}{3} = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Contrôle : $\dfrac{4\pi}{3} \in \left]\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right[$, le point est sur le quart de cercle de I' à J', où les deux signes sont négatifs.

Avec $\dfrac{7\pi}{4}$. On écrit $\dfrac{7\pi}{4} = 2\pi - \dfrac{\pi}{4}$. On retire le tour complet, puis on applique les angles associés à $-\dfrac{\pi}{4}$:

$$\cos\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin\frac{7\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Contrôle : $-\dfrac{\pi}{4} \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, 0\right[$, quart de cercle de J' à I.

Attention : Un signe à chaque relation

Chaque relation a son propre signe. Le sinus de l'opposé change de signe : $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$.

Le cosinus de $\pi - a$ aussi : $\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Si tu hésites, dessine les deux points et compare leurs coordonnées.

Méthode : simplifier une expression

1. **Supprime** les tours complets dans chaque argument.
2. **Exprime** chaque terme avec $\cos x$ ou $\sin x$, grâce aux angles associés.
3. **Rassemble** les termes de même nature.
4. **Remplace** $\cos^2 x + \sin^2 x$ par 1 s'il apparaît.

Exemple

Énoncé. Pour tout réel x, on pose

$$\begin{aligned} A(x) = &\cos(x + 2\pi) \\ &+ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ &- \cos(\pi + x). \end{aligned}$$

Simplifie $A(x)$.

Terme à terme. Un tour complet ne change pas le cosinus : $\cos(x + 2\pi) = \cos x$. D'après les angles associés, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ et $\cos(\pi + x) = -\cos x$.

Regroupement. Donc $A(x) = \cos x + \cos x + \cos x$.

Conclusion. Pour tout réel x, $A(x) = 3\cos x$.

Valeurs approchées à la calculatrice

Méthode : utiliser la calculatrice

1. **Choisis** le mode : degrés (DEG) ou radians (RAD), comme l'unité de l'énoncé.
2. **Pour une ligne**, appuie sur cos, sin ou tan, puis tape la mesure.
3. **Pour un angle**, utilise la touche réciproque de cos, sin ou tan. Elle donne une seule mesure : entre $0°$ et $180°$ pour le cosinus, entre $-90°$ et $90°$ pour le sinus et la tangente.
4. **Arrondis** comme demandé et écris $\approx$.

5. **Si le réel cherché est négatif**, calcule avec son opposé : il a le même cosinus, d'après les angles associés.

Exemple

Une ligne. En mode degrés, la calculatrice affiche $\cos 40 \approx 0{,}766$: donc $\cos 40° \approx 0{,}766$ au millième.

Un angle. On cherche l'angle aigu dont le sinus vaut $0{,}3$. La touche réciproque du sinus donne environ $17{,}46$. L'angle mesure donc environ $17{,}5°$ au dixième.

Attention **: Vérifier le mode avant de calculer**

Le même calcul change avec le mode. En mode degrés, $\sin 30 = 0{,}5$.

En mode radians, la calculatrice affiche $\sin 30 \approx -0{,}988$: elle prend alors le sinus de 30 radians. Regarde l'indication DEG ou RAD avant de taper.

Quelle relation pour quelle question ?

Méthode **: Quelle relation pour quelle question ?**

- **Changer d'unité** : les quotients égaux du degré, du radian et du grade.
- **Placer un point** : l'abscisse curviligne principale, puis les quarts de cercle.
- **Mesurer un angle orienté** : la relation de Chasles et les vecteurs opposés.
- **Reconnaître des vecteurs colinéaires** : une mesure égale à 0 ou à π.
- **Trouver une ligne inconnue** : la relation fondamentale et l'intervalle de travail.
- **Lignes d'un angle comme $\frac{4\pi}{3}$** : les angles associés et le tableau des angles usuels.
- **Simplifier** : les tours complets, les angles associés, puis la relation fondamentale.
- **Valeur approchée** : la calculatrice, dans le bon mode.

Conversion entre unités

$$\frac{d}{180} = \frac{r}{\pi} = \frac{g}{200}$$

Relation de Chasles pour les vecteurs

$$(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) \equiv (\vec{u}, \vec{w})\ [2\pi]$$

Vecteur opposé

$$(-\vec{u}, \vec{v}) \equiv (\vec{u}, \vec{v}) + \pi\ [2\pi]$$

Relation fondamentale

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

Tangente, si le cosinus n'est pas nul

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$
$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Tours complets, k entier relatif

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x$$
$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x$$

À retenir : Rédiger en devoir

Pour chaque lecture sur le cercle, écris l'intervalle de travail et le quart de cercle du point. Pour chaque calcul, nomme la relation employée : « d'après la relation fondamentale », « d'après les angles associés ».

Donne les mesures principales dans $]-\pi, \pi]$. Garde les valeurs exactes ; la calculatrice ne sert qu'aux valeurs approchées.