BURHAN

Calcul trigonométrique : exercices, niveau examen

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/calcul-trigonometrique/exercices/examen

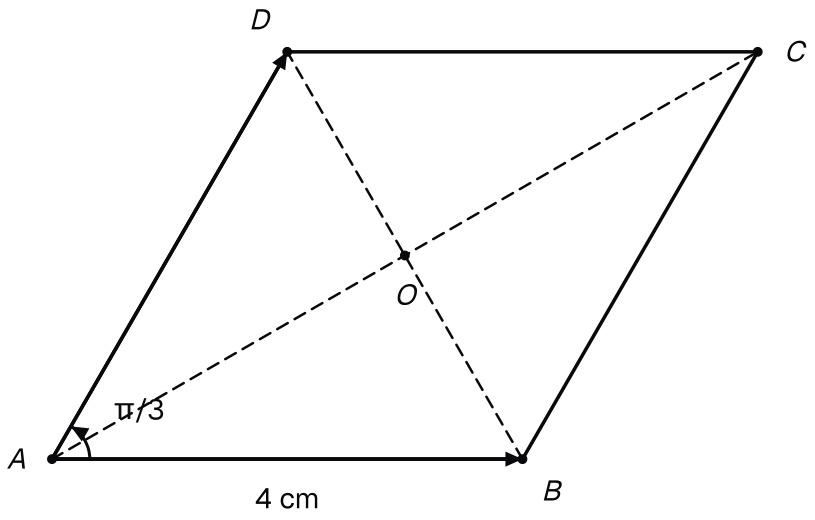
Chapitre	Palier	Exercices
Calcul trigonométrique	Niveau examen	5

Exercice 1 5 pts

Un losange et ses angles orientés

$ABCD$ est un losange de côté 4 cm, de centre O, dont les sommets A, B, C, D se suivent dans le sens direct ; dessine-le avant de commencer. On donne $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$, et on admet que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

On rappelle que les diagonales d'un losange se coupent en leur milieu et sont perpendiculaires, et que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$.



Le losange ABCD de côté 4 cm et de centre O, nommé dans le sens direct, ses diagonales et l'angle donné en A.

1. 1 pts

Donner une mesure de $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB})$. Donner ensuite la mesure principale de $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AD})$.

INDICE

Outil : inverser l'ordre change le signe. **Ensuite :** $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$, et un vecteur opposé ajoute π.

2. 1 pts

Calculer une mesure de $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$. En déduire la mesure principale de $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CA})$.

INDICE

Outil : la relation de Chasles en passant par $\overrightarrow{AB}$. **Ensuite :** $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC}$.

3. 1 pts

Utiliser l'égalité $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ pour mesurer $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$. Donner ensuite la mesure principale de $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD})$.

INDICE

Début : deux vecteurs égaux forment les mêmes angles. **Ensuite :** écris $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CD}$ comme des opposés.

4. 1 pts

Justifier que le triangle ABO est rectangle en O et que $\widehat{BAO}$ mesure $30°$. En déduire AO, puis la longueur AC.

INDICE

Début : place l'origine d'un cercle trigonométrique de centre A sur $[AB)$, puis utilise le lien avec la trigonométrie du collège. **Rappel du collège :** dans un triangle rectangle, $\cos\widehat{BAO} = \dfrac{AO}{AB}$.

5. 1 pts

Donner une mesure de $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB})$. En déduire le cosinus et le sinus de cet angle orienté.

INDICE

Outil : $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC}$, puis les angles associés avec $x = \dfrac{\pi}{6}$.

Exercice 2 — 5 pts

Un cosinus donné, du calcul exact à la calculatrice

Soit a un réel de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ tel que $\cos a = \frac{1}{4}$. On note M le point du cercle trigonométrique d'abscisse curviligne a.

1. — 1 pts

Sur quel quart de cercle se trouve le point M ? En déduire le signe de $\sin a$, puis la valeur exacte de $\sin a$.

INDICE

Début : nomme les extrémités du quart de cercle qui correspond à $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$. **Ensuite :** la relation fondamentale.

2. — 0,5 pts

Calculer $\tan a$. En déduire la valeur de $1 + \tan^2 a$ et contrôler avec $\frac{1}{\cos^2 a}$.

INDICE

Outil : $\tan a = \frac{\sin a}{\cos a}$; diviser par $\frac{1}{4}$, c'est multiplier par 4.

3. — 1 pts

Calculer $\cos(\pi - a)$ et $\sin(\pi + a)$. Calculer ensuite $\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right)$.

INDICE

Outil : les angles associés ; avec $\frac{\pi}{2}$, le cosinus devient un sinus.

4. — 1 pts

Pour tout réel x, on pose $E(x) = 3\sin(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \sin(-x)$. Simplifier $E(x)$. En déduire la valeur exacte de $E(a)$.

INDICE

Outil : transforme chacun des trois termes par les angles associés, puis regroupe.

5. — 0,5 pts

La touche réciproque du cosinus, appliquée à $0{,}25$ en mode degrés, donne une mesure positive, comprise entre 0° et 180°. Donner cette mesure au dixième.

INDICE

Outil : règle d'abord la calculatrice en mode degrés (DEG).

6. 1 pts

Le réel $-a$ est dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et a le même cosinus que a. En déduire une valeur approchée de a au centième, puis la mesure en degrés, au dixième, de l'angle orienté de mesure a radians.

INDICE

Attention : la calculatrice donne une mesure positive, alors que a est négatif. **Début :** $\cos(-x) = \cos x$ (angles associés).

Exercice 3 5 pts

La nacelle d'un manège

On représente un manège vu de dessus par le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ de centre O et d'origine I ; l'unité est le rayon du manège. Une nacelle part du point I et se déplace sur $\mathcal{C}$ dans le sens direct. Chaque minute, elle parcourt un arc d'angle au centre $300°$. On note M_n sa position au bout de n minutes.

1. 1 pts

Convertir $300°$ en radians. En déduire une abscisse curviligne de M_1, puis son abscisse curviligne principale.

INDICE

Outil : la conversion entre unités, puis retire un tour complet.

2. 0,5 pts

Sur quel quart de cercle se trouve M_1 ? En déduire les coordonnées exactes de M_1 dans le repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.

INDICE

Outil : $M_1\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right), \sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$; utilise les angles associés.

3. 1 pts

Donner une abscisse curviligne de M_3, puis son abscisse curviligne principale. En déduire le point M_3 et ses coordonnées.

INDICE

Début : en trois minutes, la nacelle parcourt trois fois $\dfrac{5\pi}{3}$.

4. 1 pts

Donner une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_3})$. En déduire sa mesure principale.

INDICE

Outil : la définition de l'angle orienté : une mesure est la différence des abscisses curvilignes, dans l'ordre (second moins premier).

5. 1,5 pts

Au bout de n minutes, une abscisse curviligne de M_n est $\dfrac{5n\pi}{3}$. Pour quelles valeurs de n entre 1 et 6 le réel $\dfrac{5n\pi}{3}$ est-il un multiple entier de 2π ? En déduire au bout de combien de minutes la position relevée M_n est, pour la première fois, le point I.

INDICE

Outil : d'après les abscisses d'un même point, $M_n = I$ si et seulement si $\dfrac{5n\pi}{3}$ est un multiple entier de 2π. **Début :** $\dfrac{5n\pi}{3} = \dfrac{5n}{6} \times 2\pi$.

Exercice 4 5 pts

Les branches d'un éventail

Un éventail ouvert est représenté, vu de face, par quatre branches : les demi-droites $[Ox)$, $[Oy)$, $[Oz)$ et $[Ot)$, de même origine O, qui se suivent dans le sens direct. On choisit la longueur d'une branche pour unité, et on note $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique de centre O dont l'origine I est l'extrémité de $[Ox)$. Les branches $[Oy)$, $[Oz)$ et $[Ot)$ coupent $\mathcal{C}$ en leurs extrémités P, Q et R. Fais la figure sur ton cahier.

On relève une mesure de chaque angle orienté formé par deux branches voisines, chaque fois dans une unité différente : $45°$ pour $([Ox), [Oy))$, 100 gr pour $([Oy), [Oz))$ et $-\dfrac{7\pi}{4}$ radians pour $([Oz), [Ot))$.

1. 1 pts

Convertir en radians la mesure $45°$ de $([Ox), [Oy))$. Convertir de même la mesure 100 gr de $([Oy), [Oz))$.

INDICE

Outil : l'égalité des quotients $\dfrac{d}{180} = \dfrac{r}{\pi} = \dfrac{g}{200}$.

2. 1 pts

Donner une mesure de $([Ox), [Oz))$. En déduire une abscisse curviligne du point P, puis une abscisse curviligne du point Q.

INDICE

Outil : la relation de Chasles pour les demi-droites, en passant par $[Oy)$. **Ensuite :** le point I, où $[Ox)$ coupe $\mathcal{C}$, a pour abscisse curviligne 0 ; utilise la définition de l'angle orienté.

3. 1 pts

Déterminer la mesure principale de $([Oz), [Ot))$. En déduire la mesure principale de $([Ox), [Ot))$.

INDICE

Début : $-\dfrac{7\pi}{4}$ n'est pas dans $]-\pi, \pi]$; ajoute un tour complet. **Ensuite :** la relation de Chasles, en passant par $[Oz)$.

4. 0,5 pts

Donner l'abscisse curviligne principale du point R. En déduire le point R, puis la position de la branche $[Ot)$ par rapport à la branche $[Ox)$.

INDICE

Outil : raisonne comme à la question 2, avec $([Ox), [Ot))$. **Ensuite :** quel point du cercle a pour abscisse curviligne π ?

5. 1,5 pts

Calculer les coordonnées exactes de P et de Q dans le repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$. En déduire la longueur PQ entre les extrémités de deux branches.

INDICE

Outil : $Q\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}, \sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$ et $\dfrac{3\pi}{4} = \pi - \dfrac{\pi}{4}$; puis les angles associés. **Rappel du collège :** dans un repère orthonormé, $PQ = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}$.

Exercice 5 5 pts

Une expression à simplifier, puis à encadrer

Pour tout réel x, on pose

$$E(x) = \cos^2(\pi - x) + 2\sin^2(-x).$$

1. 1 pts

Transformer chacun des deux termes de $E(x)$ à l'aide des angles associés. En déduire que, pour tout réel x, $E(x) = 1 + \sin^2 x$.

INDICE

Outil : $\cos(\pi - x) = -\cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$; un carré efface le signe. **Ensuite :** écris $\cos^2 x + 2\sin^2 x = (\cos^2 x + \sin^2 x) + \sin^2 x$.

2. 1 pts

Calculer $E\left(\dfrac{7\pi}{4}\right)$ et $E\left(-\dfrac{4\pi}{3}\right)$ à l'aide de la forme simplifiée. Pour tout réel x, comparer ensuite $E(\pi + x)$ et $E(x)$.

INDICE

Outil : $\dfrac{7\pi}{4} = 2\pi - \dfrac{\pi}{4}$ (un tour complet ne change pas le sinus) et $\dfrac{4\pi}{3} = \pi + \dfrac{\pi}{3}$, puis les angles associés. **Ensuite :** $\sin(\pi + x) = -\sin x$.

3. 1 pts

À l'aide de la relation fondamentale, justifier que, pour tout réel x, $0 \leq \sin^2 x \leq 1$. En déduire un encadrement de $E(x)$, puis calculer $E(0)$ et $E\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

INDICE

Début : un carré est positif ou nul, et $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. **Ensuite :** on peut ajouter un même nombre aux deux membres d'une inégalité.

4. 1,5 pts

Soit a un réel de l'intervalle $\left]-\pi, -\dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $E(a) = \dfrac{10}{9}$. Calculer $\sin^2 a$, puis $\sin a$. En déduire $\cos a$ et $\tan a$.

INDICE

Début : utilise la forme simplifiée de la question 1. **Attention :** nomme le quart de cercle qui correspond à $\left]-\pi, -\dfrac{\pi}{2}\right[$ pour choisir chaque signe.

5. 0,5 pts

Exprimer $E\left(\dfrac{\pi}{2} - a\right)$ à l'aide de $\cos a$. En déduire la valeur exacte de $E\left(\dfrac{\pi}{2} - a\right)$.

INDICE

Outil : les angles associés avec un angle droit : $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$.