BURHAN

Calcul trigonométrique : exercices, niveau examen

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/calcul-trigonometrique/exercices/examen

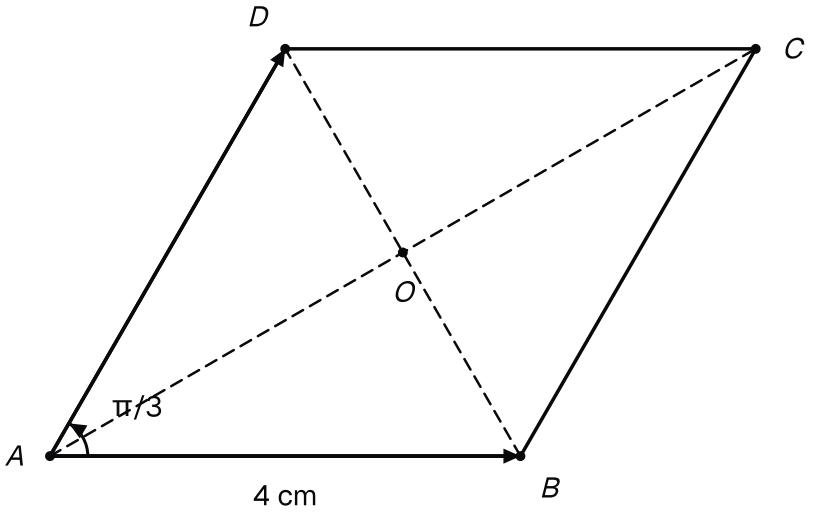
Chapitre	Palier	Exercices
Calcul trigonométrique	Niveau examen	5

Exercice 1 5 pts

Un losange et ses angles orientés

$ABCD$ est un losange de côté 4 cm, de centre O, dont les sommets A, B, C, D se suivent dans le sens direct ; dessine-le avant de commencer. On donne $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$, et on admet que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

On rappelle que les diagonales d'un losange se coupent en leur milieu et sont perpendiculaires, et que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$.



Le losange ABCD de côté 4 cm et de centre O, nommé dans le sens direct, ses diagonales et l'angle donné en A.

1. 1 pts

Donner une mesure de $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB})$. Donner ensuite la mesure principale de $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AD})$.

INDICE

Outil : inverser l'ordre change le signe. **Ensuite :** $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$, et un vecteur opposé ajoute π.

CORRIGÉ

Angle $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB})$. D'après la relation de Chasles, inverser l'ordre des vecteurs change le signe de la mesure :

$$(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi].$$

Angle $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AD})$. Comme $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$, d'après la propriété des vecteurs opposés :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AD}) &\equiv \frac{\pi}{3} + \pi \\ &= \frac{4\pi}{3}\ [2\pi].\end{aligned}$$

On retire un tour complet : $\frac{4\pi}{3} - 2\pi = -\frac{2\pi}{3}$, et $-\frac{2\pi}{3} \in\ ]-\pi, \pi]$.

Conclusion. $-\frac{\pi}{3}$ est une mesure de $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB})$, et la mesure principale de $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AD})$ est $-\frac{2\pi}{3}$.

2. 1 pts

Calculer une mesure de $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$. En déduire la mesure principale de $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CA})$.

INDICE

Outil : la relation de Chasles en passant par $\overrightarrow{AB}$. **Ensuite :** $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC}$.

CORRIGÉ

Angle $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$. D'après la relation de Chasles, $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) \equiv -\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$. En passant par $\overrightarrow{AB}$:

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) &\equiv -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{\pi}{6}\ [2\pi].\end{aligned}$$

Angle $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CA})$. En inversant l'ordre, $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}) \equiv -\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$. Comme $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC}$, la propriété des vecteurs opposés donne :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CA}) &\equiv -\frac{\pi}{6} + \pi \\ &= \frac{5\pi}{6}\ [2\pi].\end{aligned}$$

Comme $\frac{5\pi}{6} \in\ ]-\pi, \pi]$, c'est la mesure principale.

Conclusion. $\frac{\pi}{6}$ est une mesure de $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$, et la mesure principale de $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CA})$ est $\frac{5\pi}{6}$.

3. 1 pts

Utiliser l'égalité $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ pour mesurer $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$. Donner ensuite la mesure principale de $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD})$.

INDICE

Début : deux vecteurs égaux forment les mêmes angles. **Ensuite :** écris $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CD}$ comme des opposés.

CORRIGÉ

Angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$. Comme $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, les angles $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ ont les mêmes mesures :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi].$$

Angle $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD})$. On a $\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{AB}$. D'après la propriété des vecteurs opposés, changer les deux vecteurs en leurs opposés ne modifie pas l'angle : $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) \equiv (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB})\ [2\pi]$. Avec la question 1 :

$$(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi].$$

Comme $-\frac{\pi}{3} \in\ ]-\pi, \pi]$, c'est la mesure principale.

Conclusion. $\frac{\pi}{3}$ est une mesure de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$, et la mesure principale de $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD})$ est $-\frac{\pi}{3}$.

4. 1 pts

Justifier que le triangle ABO est rectangle en O et que $\widehat{BAO}$ mesure $30°$. En déduire AO, puis la longueur AC.

INDICE

Début : place l'origine d'un cercle trigonométrique de centre A sur $[AB)$, puis utilise le lien avec la trigonométrie du collège. **Rappel du collège :** dans un triangle rectangle, $\cos\widehat{BAO} = \dfrac{AO}{AB}$.

CORRIGÉ

Triangle rectangle. Les diagonales du losange sont perpendiculaires et se coupent en O : le triangle ABO est rectangle en O.

Angle $\widehat{BAO}$. Le point O est le milieu de $[AC]$, donc $[AO) = [AC)$. Prenons le cercle trigonométrique de centre A dont l'origine I est le point où $[AB)$ le coupe, et notons N le point où $[AC)$ le coupe. Comme $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$, la définition de l'angle orienté et la propriété des abscisses d'un même point montrent que $\dfrac{\pi}{6}$ est une abscisse curviligne de N.

Comme $0 < \dfrac{\pi}{6} < \dfrac{\pi}{2}$, d'après le lien avec la trigonométrie du collège, l'angle $\widehat{IAN}$, c'est-à-dire $\widehat{BAO}$, mesure $\dfrac{\pi}{6}\ \text{rad}$, soit $30°$ d'après la conversion entre unités.

Longueurs. Dans le triangle ABO rectangle en O, d'après le cosinus d'un angle aigu, $AO = AB \times \cos 30°$, donc $AO = 4 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ cm. Comme O est le milieu de $[AC]$, $AC = 2\,AO$, soit $AC = 4\sqrt{3}$ cm.

Conclusion. Le triangle ABO est rectangle en O, l'angle $\widehat{BAO}$ mesure $30°$, $AO = 2\sqrt{3}$ cm et $AC = 4\sqrt{3}$ cm.

5. 1 pts

Donner une mesure de $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB})$. En déduire le cosinus et le sinus de cet angle orienté.

INDICE

Outil : $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC}$, puis les angles associés avec $x = \dfrac{\pi}{6}$.

CORRIGÉ

Mesure. D'après la relation de Chasles, $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) \equiv -\dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$. Comme $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC}$, la propriété des vecteurs opposés donne :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}) &\equiv -\frac{\pi}{6} + \pi \\ &= \frac{5\pi}{6}\ [2\pi].\end{aligned}$$

Lignes. D'après la définition des lignes d'un angle orienté, on calcule celles de $\dfrac{5\pi}{6} = \pi - \dfrac{\pi}{6}$. D'après les angles associés et les angles usuels :

- $\cos\dfrac{5\pi}{6} = -\cos\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;
- $\sin\dfrac{5\pi}{6} = \sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$.

Conclusion. $\dfrac{5\pi}{6}$ est une mesure de $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB})$; le cosinus de cet angle orienté est $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et son sinus $\dfrac{1}{2}$.

Exercice 2 — 5 pts

Un cosinus donné, du calcul exact à la calculatrice

Soit a un réel de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ tel que $\cos a = \frac{1}{4}$. On note M le point du cercle trigonométrique d'abscisse curviligne a.

1. — 1 pts

Sur quel quart de cercle se trouve le point M ? En déduire le signe de $\sin a$, puis la valeur exacte de $\sin a$.

INDICE

Début : nomme les extrémités du quart de cercle qui correspond à $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$. **Ensuite :** la relation fondamentale.

CORRIGÉ

Quart de cercle. Comme $a \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$, le point M est sur le quart de cercle de J' à I : son ordonnée est négative, donc $\sin a < 0$.

Valeur exacte. D'après la relation fondamentale :

$$\sin^2 a = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}.$$

Donc $\sin a = \frac{\sqrt{15}}{4}$ ou $\sin a = -\frac{\sqrt{15}}{4}$, et le signe trouvé retient la seconde valeur.

Conclusion. Le point M est sur le quart de cercle de J' à I, $\sin a$ est négatif et $\sin a = -\frac{\sqrt{15}}{4}$.

2. — 0,5 pts

Calculer $\tan a$. En déduire la valeur de $1 + \tan^2 a$ et contrôler avec $\frac{1}{\cos^2 a}$.

INDICE

Outil : $\tan a = \frac{\sin a}{\cos a}$; diviser par $\frac{1}{4}$, c'est multiplier par 4.

CORRIGÉ

Tangente. Comme $\cos a \neq 0$, d'après la définition de la tangente, diviser par $\frac{1}{4}$ revient à multiplier par 4 :

$$\begin{aligned} \tan a &= -\frac{\sqrt{15}}{4} \times 4 \\ &= -\sqrt{15}. \end{aligned}$$

Relation. $1 + \tan^2 a = 1 + 15 = 16$. D'autre part, $\cos^2 a = \frac{1}{16}$, donc $\frac{1}{\cos^2 a} = 16$.

Conclusion. $\tan a = -\sqrt{15}$ et $1 + \tan^2 a = 16 = \frac{1}{\cos^2 a}$: la relation de la tangente est vérifiée.

3. 1 pts

Calculer $\cos(\pi - a)$ et $\sin(\pi + a)$. Calculer ensuite $\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right)$.

INDICE

Outil : les angles associés ; avec $\frac{\pi}{2}$, le cosinus devient un sinus.

CORRIGÉ

D'après les angles associés et la question 1 :

- $\cos(\pi - a) = -\cos a = -\frac{1}{4}$;
- $\sin(\pi + a) = -\sin a = \frac{\sqrt{15}}{4}$;
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\sin a = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

Conclusion. $\cos(\pi - a) = -\frac{1}{4}$, $\sin(\pi + a) = \frac{\sqrt{15}}{4}$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

4. 1 pts

Pour tout réel x, on pose $E(x) = 3\sin(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \sin(-x)$. Simplifier $E(x)$. En déduire la valeur exacte de $E(a)$.

INDICE

Outil : transforme chacun des trois termes par les angles associés, puis regroupe.

CORRIGÉ

Simplification. D'après les angles associés, pour tout réel x :

- $\sin(\pi - x) = \sin x$;
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$;
- $\sin(-x) = -\sin x$.

Donc, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} E(x) &= 3\sin x - \sin x \\ &\quad - (-\sin x) \\ &= 3\sin x. \end{aligned}$$

Valeur en a. Avec la question 1 :

$$\begin{aligned} E(a) &= 3 \times \left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right) \\ &= -\frac{3\sqrt{15}}{4}. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $E(x) = 3\sin x$, et $E(a) = -\frac{3\sqrt{15}}{4}$.

5. 0,5 pts

La touche réciproque du cosinus, appliquée à $0{,}25$ en mode degrés, donne une mesure positive, comprise entre $0°$ et $180°$. Donner cette mesure au dixième.

INDICE

Outil : règle d'abord la calculatrice en mode degrés (DEG).

CORRIGÉ

Lecture. En mode degrés (DEG), la touche réciproque du cosinus appliquée à $0{,}25$ affiche environ $75{,}52$.

Conclusion. La mesure donnée par la calculatrice est environ $75{,}5°$ au dixième.

6. 1 pts

Le réel $-a$ est dans $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et a le même cosinus que a. En déduire une valeur approchée de a au centième, puis la mesure en degrés, au dixième, de l'angle orienté de mesure a radians.

INDICE

Attention : la calculatrice donne une mesure positive, alors que a est négatif. **Début :** $\cos(-x) = \cos x$ (angles associés).

CORRIGÉ

Le réel b. Soit b le réel de $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ qui correspond à la mesure affichée : $\cos b = \dfrac{1}{4}$ et, d'après la conversion entre unités, $b \approx 75{,}52 \times \dfrac{\pi}{180} \approx 1{,}318$.

Lien entre a et b. D'après les angles associés, $\cos(-b) = \cos b = \dfrac{1}{4}$, et $-b \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, 0\right[$. Les points d'abscisses curvilignes a et $-b$ sont donc tous deux sur le quart de cercle de J' à I, avec la même abscisse $\dfrac{1}{4}$. Un seul point de ce quart de cercle a cette abscisse : c'est le même point.

D'après la propriété de l'abscisse principale, ce point a une seule abscisse curviligne dans $]-\pi, \pi]$; or a et $-b$ appartiennent tous deux à cet intervalle. Donc $a = -b$.

Conclusion. Au centième, $a \approx -1{,}32$; l'angle orienté de mesure a radians mesure environ $-75{,}5°$ au dixième.

Exercice 3 5 pts

La nacelle d'un manège

On représente un manège vu de dessus par le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ de centre O et d'origine I ; l'unité est le rayon du manège. Une nacelle part du point I et se déplace sur $\mathcal{C}$ dans le sens direct. Chaque minute, elle parcourt un arc d'angle au centre $300°$. On note M_n sa position au bout de n minutes.

1. 1 pts

Convertir $300°$ en radians. En déduire une abscisse curviligne de M_1, puis son abscisse curviligne principale.

INDICE

Outil : la conversion entre unités, puis retire un tour complet.

CORRIGÉ

Conversion. D'après la conversion entre unités, la mesure r en radians vérifie $\dfrac{300}{180} = \dfrac{r}{\pi}$:

$$r = \frac{300\pi}{180} = \frac{5\pi}{3}.$$

Abscisse de M_1. La nacelle part de I dans le sens direct et parcourt, sur un cercle de rayon 1, un arc d'angle au centre $\dfrac{5\pi}{3}$: ce réel est une abscisse curviligne de M_1.

Abscisse principale. On retire un tour complet : $\dfrac{5\pi}{3} - 2\pi = -\dfrac{\pi}{3}$, et $-\dfrac{\pi}{3} \in \,]-\pi, \pi]$.

Conclusion. $300° = \dfrac{5\pi}{3}\ \text{rad}$; $\dfrac{5\pi}{3}$ est une abscisse curviligne de M_1, et son abscisse curviligne principale est $-\dfrac{\pi}{3}$.

2. 0,5 pts

Sur quel quart de cercle se trouve M_1 ? En déduire les coordonnées exactes de M_1 dans le repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.

INDICE

Outil : $M_1\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right), \sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$; utilise les angles associés.

CORRIGÉ

Quart de cercle. Comme $-\dfrac{\pi}{3} \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, 0\right[$, le point M_1 est sur le quart de cercle de J' à I.

Coordonnées. D'après la définition du cosinus et du sinus, M_1 a pour coordonnées $\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right), \sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$. D'après les angles associés et les angles usuels :

- $\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$;
- $\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = -\sin\dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Conclusion. Le point M_1 est sur le quart de cercle de J' à I, et $M_1\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

3. 1 pts

Donner une abscisse curviligne de M_3, puis son abscisse curviligne principale. En déduire le point M_3 et ses coordonnées.

INDICE

Début : en trois minutes, la nacelle parcourt trois fois $\dfrac{5\pi}{3}$.

CORRIGÉ

Abscisse de M_3. En trois minutes, la nacelle parcourt trois arcs de $\dfrac{5\pi}{3}$:

$$3 \times \frac{5\pi}{3} = 5\pi.$$

Ce réel est une abscisse curviligne de M_3.

Abscisse principale. On retire deux tours complets : $5\pi - 4\pi = \pi$, et $\pi \in \,]-\pi, \pi]$.

Conclusion. L'abscisse curviligne principale de M_3 est π : le point M_3 est I', de coordonnées $(-1, 0)$.

4. 1 pts

Donner une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_3})$. En déduire sa mesure principale.

INDICE

Outil : la définition de l'angle orienté : une mesure est la différence des abscisses curvilignes, dans l'ordre (second moins premier).

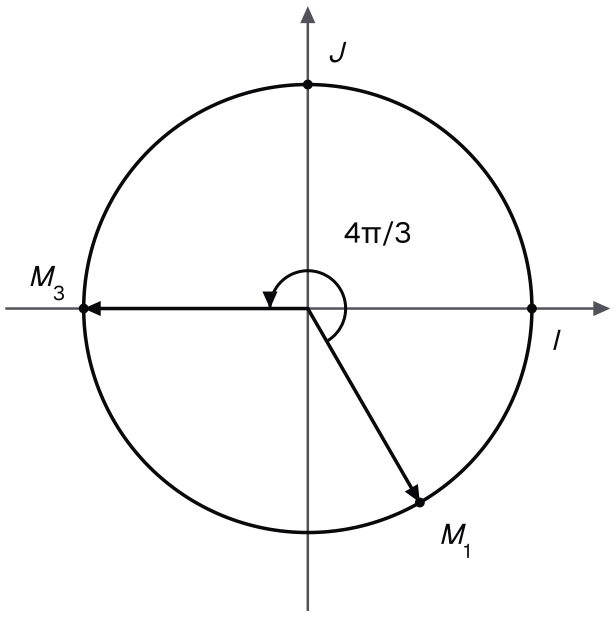
CORRIGÉ

Mesure. D'après la définition de l'angle orienté, une mesure de $(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_3})$ s'obtient en retranchant l'abscisse $-\dfrac{\pi}{3}$ de M_1 à l'abscisse π de M_3 :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_3}) &\equiv \pi - \left(-\frac{\pi}{3}\right) \\ &= \frac{4\pi}{3}\ [2\pi].\end{aligned}$$

Mesure principale. $\dfrac{4\pi}{3} - 2\pi = -\dfrac{2\pi}{3}$, et $-\dfrac{2\pi}{3} \in\ ]-\pi, \pi]$.

Conclusion. $\dfrac{4\pi}{3}$ est une mesure de $(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_3})$, et sa mesure principale est $-\dfrac{2\pi}{3}$.



Les positions M1, d'abscisse principale −π/3, et M3, confondue avec I' ; l'angle orienté de OM1 vers OM3 a pour mesure 4π/3.

5. 1,5 pts

Au bout de n minutes, une abscisse curviligne de M_n est $\dfrac{5n\pi}{3}$. Pour quelles valeurs de n entre 1 et 6 le réel $\dfrac{5n\pi}{3}$ est-il un multiple entier de 2π ? En déduire au bout de combien de minutes la position relevée M_n est, pour la première fois, le point I.

INDICE

Outil : d'après les abscisses d'un même point, $M_n = I$ si et seulement si $\dfrac{5n\pi}{3}$ est un multiple entier de 2π. **Début :** $\dfrac{5n\pi}{3} = \dfrac{5n}{6} \times 2\pi$.

CORRIGÉ

Quotients. Pour tout entier n, $\dfrac{5n\pi}{3} = \dfrac{5n}{6} \times 2\pi$. Pour $n = 1, 2, 3, 4, 5$, le quotient $\dfrac{5n}{6}$ vaut successivement $\dfrac{5}{6}$, $\dfrac{5}{3}$, $\dfrac{5}{2}$, $\dfrac{10}{3}$ et $\dfrac{25}{6}$: aucun n'est entier. Pour $n = 6$, il vaut 5.

Entre 1 et 6, le réel $\dfrac{5n\pi}{3}$ n'est donc un multiple entier de 2π que pour $n = 6$.

Passage en I. Le point I a pour abscisse curviligne 0. D'après la propriété des abscisses d'un même point, $M_n = I$ si et seulement si $\dfrac{5n\pi}{3}$ est un multiple entier de 2π. Parmi les positions relevées chaque minute, la première égale à I est donc M_6, au bout de 6 minutes.

Remarque. La nacelle a alors fait 5 tours complets : elle est déjà passée par I entre deux relevés, à la fin de chaque tour.

Conclusion. Seul $n = 6$ convient entre 1 et 6 ; la position relevée est pour la première fois le point I au bout de 6 minutes.

Exercice 4 5 pts

Les branches d'un éventail

Un éventail ouvert est représenté, vu de face, par quatre branches : les demi-droites $[Ox)$, $[Oy)$, $[Oz)$ et $[Ot)$, de même origine O, qui se suivent dans le sens direct. On choisit la longueur d'une branche pour unité, et on note $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique de centre O dont l'origine I est l'extrémité de $[Ox)$. Les branches $[Oy)$, $[Oz)$ et $[Ot)$ coupent $\mathcal{C}$ en leurs extrémités P, Q et R. Fais la figure sur ton cahier.

On relève une mesure de chaque angle orienté formé par deux branches voisines, chaque fois dans une unité différente : 45° pour $([Ox), [Oy))$, $100\ \text{gr}$ pour $([Oy), [Oz))$ et $-\dfrac{7\pi}{4}$ radians pour $([Oz), [Ot))$.

1. 1 pts

Convertir en radians la mesure 45° de $([Ox), [Oy))$. Convertir de même la mesure $100\ \text{gr}$ de $([Oy), [Oz))$.

INDICE

Outil : l'égalité des quotients $\dfrac{d}{180} = \dfrac{r}{\pi} = \dfrac{g}{200}$.

CORRIGÉ

Degrés. D'après la conversion entre unités, la mesure r en radians de $([Ox), [Oy))$ vérifie $\dfrac{45}{180} = \dfrac{r}{\pi}$:

$$r = \frac{45\pi}{180} = \frac{\pi}{4}.$$

Grades. De même, la mesure r en radians de $([Oy), [Oz))$ vérifie $\dfrac{r}{\pi} = \dfrac{100}{200}$:

$$r = \frac{100\pi}{200} = \frac{\pi}{2}.$$

Conclusion. $\dfrac{\pi}{4}$ est une mesure en radians de $([Ox), [Oy))$, et $\dfrac{\pi}{2}$ une mesure en radians de $([Oy), [Oz))$.

2. 1 pts

Donner une mesure de $([Ox), [Oz))$. En déduire une abscisse curviligne du point P, puis une abscisse curviligne du point Q.

INDICE

Outil : la relation de Chasles pour les demi-droites, en passant par $[Oy)$. **Ensuite :** le point I, où $[Ox)$ coupe $\mathcal{C}$, a pour abscisse curviligne 0 ; utilise la définition de l'angle orienté.

CORRIGÉ

Chasles. D'après la relation de Chasles pour les demi-droites, en passant par $[Oy)$:

$$\begin{aligned}([Ox), [Oz)) &\equiv \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{3\pi}{4}\ [2\pi].\end{aligned}$$

Abscisse de P. La demi-droite $[Ox)$ coupe $\mathcal{C}$ en I, d'abscisse curviligne 0. Soit β une abscisse curviligne de P. D'après la définition de l'angle orienté, $\beta - 0 = \beta$ est une mesure de $([Ox), [Oy))$, donc $\beta \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$. D'après la propriété des abscisses d'un même point, $\frac{\pi}{4}$ est alors une abscisse curviligne de P.

Abscisse de Q. Le même raisonnement, mené avec $([Ox), [Oz))$, montre que $\frac{3\pi}{4}$ est une abscisse curviligne de Q.

Conclusion. $([Ox), [Oz)) \equiv \frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$; $\frac{\pi}{4}$ est une abscisse curviligne de P, et $\frac{3\pi}{4}$ une abscisse curviligne de Q.

3. 1 pts

Déterminer la mesure principale de $([Oz), [Ot))$. En déduire la mesure principale de $([Ox), [Ot))$.

INDICE

Début : $-\frac{7\pi}{4}$ n'est pas dans $]-\pi, \pi]$; ajoute un tour complet. **Ensuite :** la relation de Chasles, en passant par $[Oz)$.

CORRIGÉ

Angle $([Oz), [Ot))$. Le réel $-\frac{7\pi}{4}$ est inférieur à $-\pi$: on ajoute un tour complet.

$$-\frac{7\pi}{4} + 2\pi = \frac{\pi}{4}.$$

Comme $\frac{\pi}{4} \in]-\pi, \pi]$, c'est la mesure principale de $([Oz), [Ot))$.

Angle $([Ox), [Ot))$. D'après la relation de Chasles, en passant par $[Oz)$:

$$\begin{aligned}([Ox), [Ot)) &\equiv \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \\ &= \pi\ [2\pi].\end{aligned}$$

Comme $\pi \in]-\pi, \pi]$, c'est la mesure principale.

Conclusion. Les mesures principales de $([Oz), [Ot))$ et de $([Ox), [Ot))$ sont $\frac{\pi}{4}$ et π.

4. 0,5 pts

Donner l'abscisse curviligne principale du point R. En déduire le point R, puis la position de la branche $[Ot)$ par rapport à la branche $[Ox)$.

INDICE

Outil : raisonne comme à la question 2, avec $([Ox), [Ot))$. **Ensuite :** quel point du cercle a pour abscisse curviligne π ?

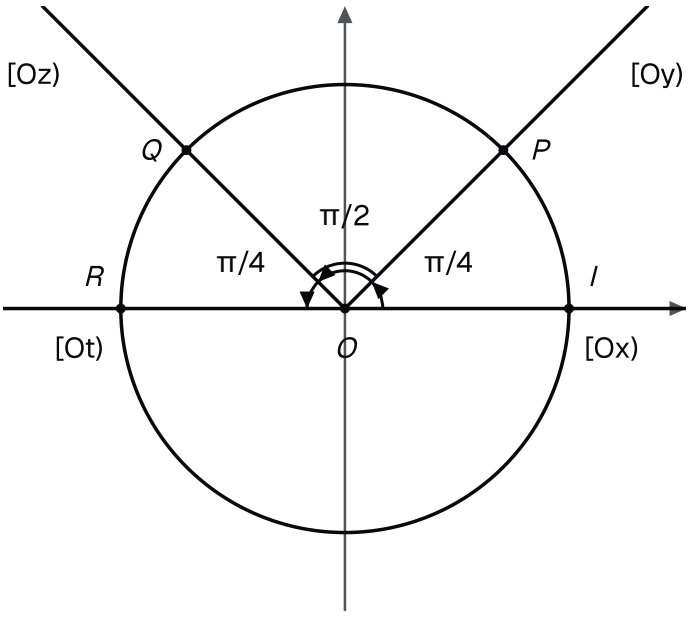
CORRIGÉ

Abscisse de R. Comme à la question 2, la définition de l'angle orienté et la question 3 montrent que π est une abscisse curviligne de R. Comme $\pi \in]-\pi, \pi]$, c'est son abscisse curviligne principale.

Le point R. Le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse curviligne π est I' : donc $R = I'$, de coordonnées $(-1, 0)$.

Position des branches. Les branches $[Ox) = [OI)$ et $[Ot) = [OI')$ sont deux demi-droites opposées de la droite (II') : l'éventail est ouvert en demi-cercle.

Conclusion. L'abscisse curviligne principale de R est π, le point R est I', et la branche $[Ot)$ est l'opposée de la branche $[Ox)$.



L'éventail reconstitué : P, Q et R d'abscisses π/4, 3π/4 et π ; la branche [Ot) prolonge [Ox) de l'autre côté de O.

5. 1,5 pts

Calculer les coordonnées exactes de P et de Q dans le repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$. En déduire la longueur PQ entre les extrémités de deux branches.

INDICE

Outil : $Q\left(\cos\frac{3\pi}{4}, \sin\frac{3\pi}{4}\right)$ et $\frac{3\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4}$; puis les angles associés. **Rappel du collège :** dans un repère orthonormé, $PQ = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}$.

CORRIGÉ

Coordonnées de P. D'après la définition du cosinus et du sinus, puis les angles usuels, $P\left(\cos\frac{\pi}{4}, \sin\frac{\pi}{4}\right)$, soit $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Coordonnées de Q. On a $\frac{3\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4}$. D'après les angles associés :

- $\cos\frac{3\pi}{4} = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;
- $\sin\frac{3\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Donc $Q\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Longueur PQ. Les points P et Q ont la même ordonnée, et $x_Q - x_P = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$. Le repère est orthonormé, donc $PQ = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + 0^2} = \sqrt{2}$.

Conclusion. $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $Q\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $PQ = \sqrt{2}$: la distance entre les extrémités de $[Oy)$ et de $[Oz)$ vaut $\sqrt{2}$ fois la longueur d'une branche.

Exercice 5 — 5 pts

Une expression à simplifier, puis à encadrer

Pour tout réel x, on pose

$$E(x) = \cos^2(\pi - x) + 2\sin^2(-x).$$

1. — 1 pts

Transformer chacun des deux termes de $E(x)$ à l'aide des angles associés. En déduire que, pour tout réel x, $E(x) = 1 + \sin^2 x$.

INDICE

Outil : $\cos(\pi - x) = -\cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$; un carré efface le signe. **Ensuite :** écris $\cos^2 x + 2\sin^2 x = (\cos^2 x + \sin^2 x) + \sin^2 x$.

CORRIGÉ

Premier terme. D'après les angles associés, $\cos(\pi - x) = -\cos x$, donc $\cos^2(\pi - x) = (-\cos x)^2 = \cos^2 x$.

Second terme. De même, $\sin(-x) = -\sin x$, donc $\sin^2(-x) = (-\sin x)^2 = \sin^2 x$.

Regroupement. Pour tout réel x, la relation fondamentale donne $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, donc :

$$\begin{aligned} E(x) &= \cos^2 x + 2\sin^2 x \\ &= \left(\cos^2 x + \sin^2 x\right) \\ &\quad + \sin^2 x \\ &= 1 + \sin^2 x. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $E(x) = 1 + \sin^2 x$.

2. 1 pts

Calculer $E\left(\frac{7\pi}{4}\right)$ et $E\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$ à l'aide de la forme simplifiée. Pour tout réel x, comparer ensuite $E(\pi + x)$ et $E(x)$.

INDICE

Outil : $\frac{7\pi}{4} = 2\pi - \frac{\pi}{4}$ (un tour complet ne change pas le sinus) et $\frac{4\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3}$, puis les angles associés. **Ensuite :** $\sin(\pi + x) = -\sin x$.

CORRIGÉ

Valeur en $\frac{7\pi}{4}$. Comme $\frac{7\pi}{4} = 2\pi - \frac{\pi}{4}$, la propriété des tours complets, puis les angles associés et les angles usuels donnent :

$$\begin{aligned}\sin\frac{7\pi}{4} &= \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\\ &= -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

Donc $E\left(\frac{7\pi}{4}\right) = 1 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 + \frac{2}{4} = \frac{3}{2}$.

Valeur en $-\frac{4\pi}{3}$. On a $\frac{4\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3}$, donc $\sin\frac{4\pi}{3} = -\sin\frac{\pi}{3}$ d'après les angles associés. Avec l'opposé :

$$\begin{aligned}\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right) &= -\sin\frac{4\pi}{3}\\ &= \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

Donc $E\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = 1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$.

Comparaison. Pour tout réel x, $\sin(\pi + x) = -\sin x$, donc $\sin^2(\pi + x) = \sin^2 x$ et $E(\pi + x) = 1 + \sin^2 x = E(x)$.

Conclusion. $E\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{3}{2}$, $E\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{7}{4}$ et, pour tout réel x, $E(\pi + x) = E(x)$.

3. 1 pts

À l'aide de la relation fondamentale, justifier que, pour tout réel x, $0 \leq \sin^2 x \leq 1$. En déduire un encadrement de $E(x)$, puis calculer $E(0)$ et $E\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

INDICE

Début : un carré est positif ou nul, et $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. **Ensuite :** on peut ajouter un même nombre aux deux membres d'une inégalité.

CORRIGÉ

Encadrement de $\sin^2 x$. Soit x un réel. Un carré est positif ou nul, donc $\sin^2 x \geq 0$ et $\cos^2 x \geq 0$. D'après la relation fondamentale, $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, et $1 - \cos^2 x \leq 1$ car on retire de 1 le nombre positif ou nul $\cos^2 x$. Donc :

$$0 \leq \sin^2 x \leq 1.$$

Encadrement de $E(x)$. On ajoute 1 à chaque membre (on peut ajouter un même nombre aux membres d'une inégalité) :

$$1 \leq 1 + \sin^2 x \leq 2.$$

D'après la question 1, cela s'écrit $1 \leq E(x) \leq 2$.

Valeurs en 0 et en $\dfrac{\pi}{2}$. D'après les angles usuels, $\sin 0 = 0$ et $\sin \dfrac{\pi}{2} = 1$, donc $E(0) = 1 + 0^2 = 1$ et $E\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1 + 1^2 = 2$.

Conclusion. Pour tout réel x, $0 \leq \sin^2 x \leq 1$ et $1 \leq E(x) \leq 2$; comme $E(0) = 1$ et $E\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2$, les deux bornes de l'encadrement sont atteintes.

4. 1,5 pts

Soit a un réel de l'intervalle $\left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $E(a) = \frac{10}{9}$. Calculer $\sin^2 a$, puis $\sin a$. En déduire $\cos a$ et $\tan a$.

INDICE

Début : utilise la forme simplifiée de la question 1. **Attention :** nomme le quart de cercle qui correspond à $\left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[$ pour choisir chaque signe.

CORRIGÉ

Carré du sinus. D'après la question 1, $1 + \sin^2 a = \frac{10}{9}$, donc $\sin^2 a = \frac{10}{9} - 1 = \frac{1}{9}$.

Signes. Comme $a \in \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[$, le point du cercle trigonométrique d'abscisse curviligne a est sur le quart de cercle de I' à J' : son abscisse et son ordonnée sont négatives, donc $\cos a < 0$ et $\sin a < 0$.

Sinus. De $\sin^2 a = \frac{1}{9}$ et $\sin a < 0$, on tire $\sin a = -\frac{1}{3}$.

Cosinus. D'après la relation fondamentale, $\cos^2 a = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$. Avec $\cos a < 0$, on obtient $\cos a = -\frac{\sqrt{8}}{3} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Tangente. Comme $\cos a \neq 0$, d'après la définition de la tangente, diviser par $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ revient à multiplier par $-\frac{3}{2\sqrt{2}}$:

$$\begin{aligned}\tan a &= \left(-\frac{1}{3}\right) \times \left(-\frac{3}{2\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\sin^2 a = \frac{1}{9}$, $\sin a = -\frac{1}{3}$, $\cos a = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ et $\tan a = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

5. 0,5 pts

Exprimer $E\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$ à l'aide de $\cos a$. En déduire la valeur exacte de $E\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$.

INDICE

Outil : les angles associés avec un angle droit : $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$.

CORRIGÉ

Expression. D'après la question 1, puis les angles associés avec un angle droit, qui donnent $\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$:

$$\begin{aligned}&E\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \\ &= 1 + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \\ &= 1 + \cos^2 a.\end{aligned}$$

Valeur. D'après la question 4, $\cos^2 a = \frac{8}{9}$, donc $E\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = 1 + \frac{8}{9} = \frac{17}{9}$.

Conclusion. $E\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = 1 + \cos^2 a$, et sa valeur exacte est $\frac{17}{9}$.