BURHAN

Calcul trigonométrique : exercices, entraînement

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

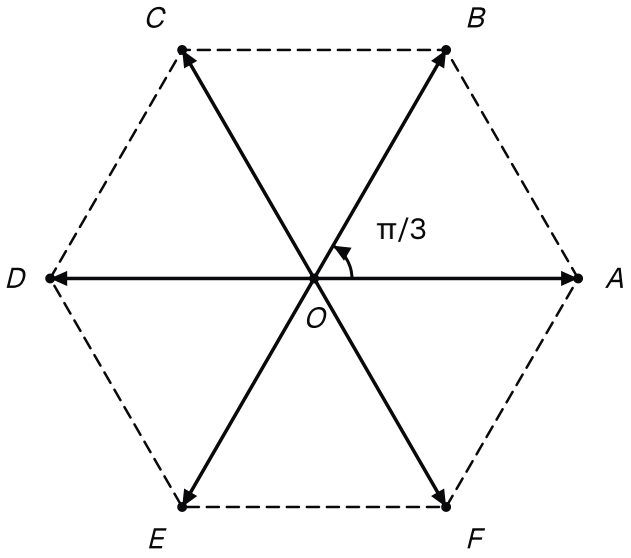
Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/calcul-trigonometrique/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Calcul trigonométrique	Entraînement	7

Exercice 1

Angles orientés dans un hexagone régulier

$ABCDEF$ est un hexagone régulier de centre O ; ses sommets se suivent dans le sens direct. Fais la figure sur ton cahier. On admet que chacun des six angles orientés $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$, $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD})$, $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE})$, $(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF})$ et $(\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OA})$ a pour mesure $\frac{\pi}{3}$.



L'hexagone régulier ABCDEF de centre O, dont les sommets se suivent dans le sens direct, et les vecteurs de O vers chaque sommet.

1.

Déterminer la mesure principale de $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$, puis celle de $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD})$.

INDICE

Outil : la relation de Chasles pour les vecteurs, en passant par $\overrightarrow{OB}$, puis par $\overrightarrow{OC}$.

2.

En déduire que les points A, O et D sont alignés, et que O est entre A et D.

INDICE

Outil : une mesure égale à π caractérise deux vecteurs colinéaires de sens contraires.

3.

Déterminer la mesure principale de $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OF})$.

INDICE

Outil : passe par $\overrightarrow{OA}$; pour $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OF})$, inverse l'ordre de l'angle donné.

4.

Justifier que $\overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OA}$. En déduire la mesure principale de $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OC})$, puis la contrôler avec un angle de l'énoncé.

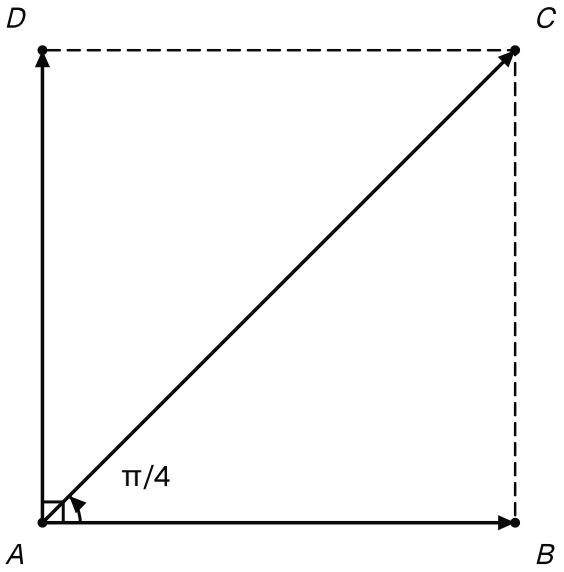
INDICE

Outil : O est le milieu de $[AD]$; puis la propriété des vecteurs opposés et le résultat de la question 1.

Exercice 2

Angles orientés et lignes trigonométriques dans un carré

Trace sur ton cahier un carré $ABCD$, nommé dans le sens direct. On admet que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et que la diagonale $[AC]$ partage l'angle droit en deux : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.



Le carré ABCD nommé dans le sens direct, sa diagonale [AC] et les deux angles donnés en A.

1.

Déterminer la mesure principale de $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.

INDICE

Outil : la relation de Chasles en passant par $\overrightarrow{AB}$; commence par $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$.

2.

Déterminer la mesure principale de $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB})$.

INDICE

Outil : $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC}$; utilise la propriété des vecteurs opposés.

3.

En déduire le cosinus, le sinus et la tangente de l'angle orienté $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB})$.

INDICE

Outil : les lignes d'un angle orienté sont celles de l'une de ses mesures ; écris $\frac{3\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4}$.

Exercice 3

Un sinus donné, puis la tangente

Soit x un réel de l'intervalle $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ tel que $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

1.

Calculer $\cos x$.

INDICE

Outil : la relation fondamentale, puis le quart de cercle du point pour le signe.

2.

En déduire $\tan x$.

INDICE

Outil : $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$; diviser par $-\frac{2}{3}$, c'est multiplier par $-\frac{3}{2}$.

3.

Contrôler ces résultats avec la relation $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.

INDICE

Début : calcule séparément chaque membre.

Exercice 4

Une tangente donnée

Soit x un réel de l'intervalle $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ tel que $\tan x = -\frac{8}{15}$.

1.

Calculer $\cos^2 x$, puis $\cos x$.

INDICE

Outil : la relation $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$; puis le signe d'après l'intervalle.

2.

En déduire $\sin x$, puis contrôler avec la relation fondamentale.

INDICE

Outil : $\sin x = \tan x \times \cos x$, car $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

Exercice 5

Lignes de cinq angles associés

Pour chaque réel, écris-le à l'aide d'un angle usuel, puis calcule son cosinus, son sinus et sa tangente sous forme exacte.

1.

Le réel $\frac{5\pi}{6}$, puis le réel $\frac{3\pi}{4}$.

INDICE

Outil : $\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$ et $\frac{3\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4}$; les angles associés.

2.

Le réel $-\frac{2\pi}{3}$.

INDICE

Outil : les angles associés pour l'opposé, puis $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$.

3.

Le réel $\frac{7\pi}{6}$.

INDICE

Outil : $\frac{7\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}$; les angles associés.

4.

Le réel $\frac{17\pi}{3}$.

INDICE

Début : $\frac{17\pi}{3} = 6\pi - \frac{\pi}{3}$; trois tours complets ne changent ni le cosinus ni le sinus.

Exercice 6

Deux simplifications

Pour tout réel x, on pose

$$\begin{aligned} A(x) = &\cos(-x) \\ &+ \sin(\pi + x) \\ &- \cos(3\pi + x) \\ &- \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} B(x) = &\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ &+ \sin^2(\pi + x). \end{aligned}$$

1.

Simplifier $A(x)$.

INDICE

Début : $3\pi + x = (\pi + x) + 2\pi$; retire le tour complet, puis transforme chaque terme.

2.

Simplifier $B(x)$.

INDICE

Outil : transforme chaque sinus, puis élève au carré ; la relation fondamentale termine.

3.

Contrôler le résultat de la question 1 en calculant directement $A\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

INDICE

Début : $\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$, $3\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{10\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$.

Exercice 7

Deux identités courtes

Dans cet exercice, x désigne un réel quelconque.

1.

Développer $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2$ et simplifier le résultat.

INDICE

Outil : les identités remarquables, puis la relation fondamentale.

2.

Écrire $\cos^4 x - \sin^4 x$ comme un produit de deux facteurs. En déduire que $\cos^4 x - \sin^4 x = 2\cos^2 x - 1$.

INDICE

Outil : $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ avec $a = \cos^2 x$ et $b = \sin^2 x$. **Ensuite :** $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$.

3.

Contrôler l'égalité de la question 2 pour $x = \dfrac{\pi}{6}$.

INDICE

Début : $\cos^2 \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{3}{4}$ et $\sin^2 \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{4}$.