BURHAN

Calcul trigonométrique : exercices, entraînement

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

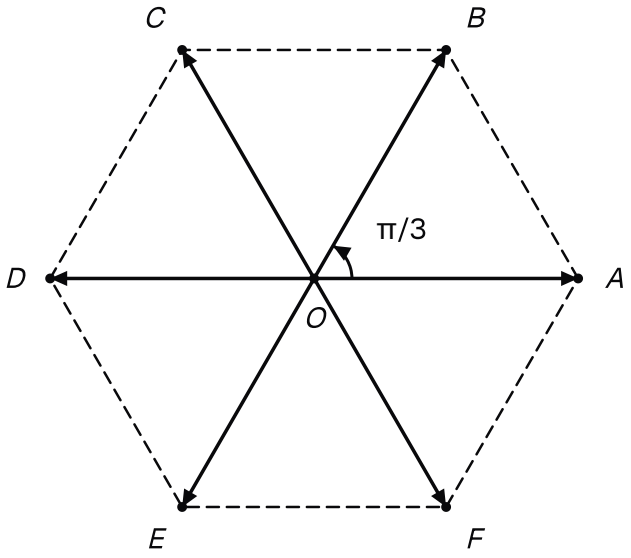
Version en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/calcul-trigonometrique/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Calcul trigonométrique	Entraînement	7

Exercice 1

Angles orientés dans un hexagone régulier

$ABCDEF$ est un hexagone régulier de centre O ; ses sommets se suivent dans le sens direct. Fais la figure sur ton cahier. On admet que chacun des six angles orientés $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$, $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD})$, $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE})$, $(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF})$ et $(\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OA})$ a pour mesure $\frac{\pi}{3}$.



L'hexagone régulier ABCDEF de centre O, dont les sommets se suivent dans le sens direct, et les vecteurs de O vers chaque sommet.

1.

Déterminer la mesure principale de $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$, puis celle de $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD})$.

INDICE

Outil : la relation de Chasles pour les vecteurs, en passant par $\overrightarrow{OB}$, puis par $\overrightarrow{OC}$.

CORRIGÉ

Angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$. D'après la relation de Chasles pour les vecteurs, en passant par $\overrightarrow{OB}$:

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) &\equiv \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{2\pi}{3}\ [2\pi].\end{aligned}$$

Comme $\frac{2\pi}{3} \in\ ]-\pi, \pi]$, c'est la mesure principale.

Angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD})$. On poursuit en passant par $\overrightarrow{OC}$:

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD}) &\equiv \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \\ &= \pi\ [2\pi].\end{aligned}$$

Comme $\pi \in\ ]-\pi, \pi]$, c'est la mesure principale.

Conclusion. Les mesures principales de $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$ et de $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD})$ sont $\frac{2\pi}{3}$ et π.

2.

En déduire que les points A, O et D sont alignés, et que O est entre A et D.

INDICE

Outil : une mesure égale à π caractérise deux vecteurs colinéaires de sens contraires.

CORRIGÉ

Colinéarité. D'après la propriété des angles orientés et de la colinéarité, $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD}) \equiv \pi\ [2\pi]$ signifie que $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OD}$ sont colinéaires et de sens contraires.

Position de O. Il existe donc un réel $k < 0$ tel que $\overrightarrow{OD} = k\,\overrightarrow{OA}$ (chapitre « Calcul vectoriel dans le plan ») : les points A et D sont sur une même droite passant par O, de part et d'autre de O.

Conclusion. Les points A, O et D sont alignés, et O est entre A et D.

3.

Déterminer la mesure principale de $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OF})$.

INDICE

Outil : passe par $\overrightarrow{OA}$; pour $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OF})$, inverse l'ordre de l'angle donné.

CORRIGÉ

Deux angles connus. D'après la relation de Chasles, inverser l'ordre des vecteurs change le signe de la mesure. Avec les angles de l'énoncé :

- $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) \equiv -\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$;
- $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OF}) \equiv -\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

Chasles. En passant par $\overrightarrow{OA}$:

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OF}) &\equiv -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} \\ &= -\frac{2\pi}{3}\ [2\pi].\end{aligned}$$

Comme $-\dfrac{2\pi}{3} \in\ ]-\pi, \pi]$, c'est la mesure principale.

Conclusion. La mesure principale de $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OF})$ est $-\dfrac{2\pi}{3}$.

4.

Justifier que $\overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OA}$. En déduire la mesure principale de $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OC})$, puis la contrôler avec un angle de l'énoncé.

INDICE

Outil : O est le milieu de $[AD]$; puis la propriété des vecteurs opposés et le résultat de la question 1.

CORRIGÉ

Vecteurs opposés. L'hexagone est régulier de centre O, donc $OA = OD$. D'après la question 2, O est entre A et D sur la droite (AD) : c'est le milieu de $[AD]$. Donc $\overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OA}$.

Mesure. D'après la propriété des vecteurs opposés, puis la question 1 :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OC}) &\equiv \frac{2\pi}{3} + \pi \\ &= \frac{5\pi}{3}\ [2\pi].\end{aligned}$$

Or $\frac{5\pi}{3} - 2\pi = -\frac{\pi}{3}$, et $-\frac{\pi}{3} \in\ ]-\pi, \pi]$: la mesure principale est $-\frac{\pi}{3}$.

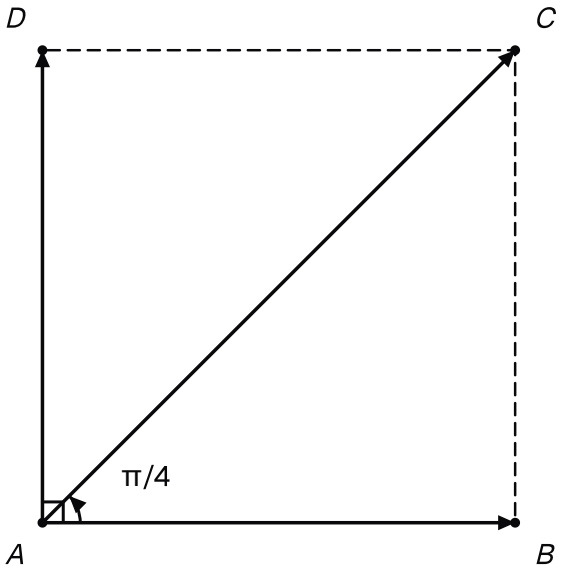
Contrôle. D'après la relation de Chasles, $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OC}) \equiv -(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}) \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$: l'angle de l'énoncé redonne ce résultat.

Conclusion. $\overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OA}$, et la mesure principale de $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OC})$ est $-\frac{\pi}{3}$.

Exercice 2

Angles orientés et lignes trigonométriques dans un carré

Trace sur ton cahier un carré $ABCD$, nommé dans le sens direct. On admet que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et que la diagonale $[AC]$ partage l'angle droit en deux : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.



Le carré ABCD nommé dans le sens direct, sa diagonale [AC] et les deux angles donnés en A.

1.

Déterminer la mesure principale de $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.

INDICE

Outil : la relation de Chasles en passant par $\overrightarrow{AB}$; commence par $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$.

CORRIGÉ

Angle inverse. D'après la relation de Chasles, $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) \equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

Chasles. En passant par $\overrightarrow{AB}$:

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) &\equiv -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi}{4}\ [2\pi].\end{aligned}$$

Comme $\frac{\pi}{4} \in\ ]-\pi, \pi]$, c'est la mesure principale.

Conclusion. La mesure principale de $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ est $\frac{\pi}{4}$.

2.

Déterminer la mesure principale de $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB})$.

INDICE

Outil : $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC}$; utilise la propriété des vecteurs opposés.

CORRIGÉ

Vecteur opposé. On a $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC}$. D'après la propriété des vecteurs opposés, on ajoute π à la mesure $-\dfrac{\pi}{4}$ de $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$:

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}) &\equiv -\frac{\pi}{4} + \pi \\ &= \frac{3\pi}{4}\ [2\pi].\end{aligned}$$

Mesure principale. Comme $\dfrac{3\pi}{4} \in\ ]-\pi, \pi]$, c'est la mesure principale.

Conclusion. La mesure principale de $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB})$ est $\dfrac{3\pi}{4}$.

3.

En déduire le cosinus, le sinus et la tangente de l'angle orienté $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB})$.

INDICE

Outil : les lignes d'un angle orienté sont celles de l'une de ses mesures ; écris $\dfrac{3\pi}{4} = \pi - \dfrac{\pi}{4}$.

CORRIGÉ

Réduction. D'après la définition des lignes d'un angle orienté, les lignes de $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB})$ sont celles de sa mesure $\dfrac{3\pi}{4}$, et $\dfrac{3\pi}{4} = \pi - \dfrac{\pi}{4}$.

Lignes. D'après les angles associés, puis les angles usuels :

- $\cos\dfrac{3\pi}{4} = -\cos\dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;
- $\sin\dfrac{3\pi}{4} = \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;
- $\cos\dfrac{\pi}{4} \neq 0$, donc $\tan\dfrac{3\pi}{4} = -\tan\dfrac{\pi}{4} = -1$.

Conclusion. Le cosinus, le sinus et la tangente de $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB})$ valent $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et -1.

Exercice 3

Un sinus donné, puis la tangente

Soit x un réel de l'intervalle $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ tel que $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

1.

Calculer $\cos x$.

INDICE

Outil : la relation fondamentale, puis le quart de cercle du point pour le signe.

CORRIGÉ

Carré du cosinus. D'après la relation fondamentale, $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, donc :

$$\cos^2 x = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}.$$

Ainsi $\cos x = \frac{2}{3}$ ou $\cos x = -\frac{2}{3}$.

Signe. Comme $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, le point du cercle trigonométrique d'abscisse curviligne x est sur le quart de cercle de J à I' : son abscisse $\cos x$ est négative.

Conclusion. Seule la valeur négative convient. Donc $\cos x = -\frac{2}{3}$.

2.

En déduire $\tan x$.

INDICE

Outil : $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$; diviser par $-\frac{2}{3}$, c'est multiplier par $-\frac{3}{2}$.

CORRIGÉ

Comme $\cos x \neq 0$, d'après la définition de la tangente, diviser par $-\frac{2}{3}$ revient à multiplier par $-\frac{3}{2}$:

$$\begin{aligned}\tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{3} \times \left(-\frac{3}{2}\right) \\ &= -\frac{\sqrt{5}}{2}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\tan x = -\frac{\sqrt{5}}{2}$.

3.

Contrôler ces résultats avec la relation $1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

INDICE

Début : calcule séparément chaque membre.

CORRIGÉ

Premier membre. Avec la question 2, $\tan^2 x = \dfrac{5}{4}$, donc :

$$1+\tan^2 x = 1+\frac{5}{4} = \frac{9}{4}.$$

Second membre. Avec la question 1, $\cos^2 x = \dfrac{4}{9}$, donc $\dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{9}{4}$.

Conclusion. Les deux membres valent $\dfrac{9}{4}$: la relation $1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ est vérifiée, ce qui confirme les valeurs de $\cos x$ et de $\tan x$.

Exercice 4

Une tangente donnée

Soit x un réel de l'intervalle $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ tel que $\tan x = -\frac{8}{15}$.

1.

Calculer $\cos^2 x$, puis $\cos x$.

INDICE

Outil : la relation $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$; puis le signe d'après l'intervalle.

CORRIGÉ

Carré du cosinus. D'après la relation de la tangente, $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$, donc :

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \frac{64}{225} = \frac{289}{225}.$$

Ainsi $\cos^2 x = \frac{225}{289}$, et $\cos x = \frac{15}{17}$ ou $\cos x = -\frac{15}{17}$.

Signe. Comme $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, le point du cercle trigonométrique d'abscisse curviligne x est sur le quart de cercle de J à I' : $\cos x < 0$.

Conclusion. $\cos^2 x = \frac{225}{289}$, et seule la valeur négative convient. Donc $\cos x = -\frac{15}{17}$.

2.

En déduire $\sin x$, puis contrôler avec la relation fondamentale.

INDICE

Outil : $\sin x = \tan x \times \cos x$, car $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

CORRIGÉ

Sinus. Comme $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, on a $\sin x = \tan x \times \cos x$:

$$\begin{aligned}\sin x &= \left(-\frac{8}{15}\right) \times \left(-\frac{15}{17}\right) \\ &= \frac{8}{17}.\end{aligned}$$

Ce sinus est positif, comme il se doit sur le quart de cercle de J à I'.

Contrôle. $\cos^2 x + \sin^2 x = \frac{225}{289} + \frac{64}{289} = 1$: la relation fondamentale est vérifiée.

Conclusion. $\sin x = \frac{8}{17}$.

Exercice 5

Lignes de cinq angles associés

Pour chaque réel, écris-le à l'aide d'un angle usuel, puis calcule son cosinus, son sinus et sa tangente sous forme exacte.

1.

Le réel $\frac{5\pi}{6}$, puis le réel $\frac{3\pi}{4}$.

INDICE

Outil : $\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$ et $\frac{3\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4}$; les angles associés.

CORRIGÉ

Le réel $\frac{5\pi}{6}$. On a $\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$. D'après les angles associés, puis les angles usuels :

- $\cos\frac{5\pi}{6} = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;
- $\sin\frac{5\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$;
- $\tan\frac{5\pi}{6} = -\tan\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Le réel $\frac{3\pi}{4}$. De même, $\frac{3\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4}$:

- $\cos\frac{3\pi}{4} = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;
- $\sin\frac{3\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
- $\tan\frac{3\pi}{4} = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$.

Contrôle. Les réels $\frac{5\pi}{6}$ et $\frac{3\pi}{4}$ sont dans $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$: les deux points sont sur le quart de cercle de J à I', où le cosinus est négatif et le sinus positif.

Conclusion. Les lignes de $\frac{5\pi}{6}$ sont $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2}$ et $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; celles de $\frac{3\pi}{4}$ sont $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et -1.

2.

Le réel $-\dfrac{2\pi}{3}$.

INDICE

Outil : les angles associés pour l'opposé, puis $\dfrac{2\pi}{3} = \pi - \dfrac{\pi}{3}$.

CORRIGÉ

Réduction. On a $-\dfrac{2\pi}{3} = -\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right)$. D'après les angles associés (opposé, puis différence avec π) et les angles usuels :

- $\cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) = \cos\dfrac{2\pi}{3} = -\cos\dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$;
- $\sin\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) = -\sin\dfrac{2\pi}{3} = -\sin\dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Tangente. Le cosinus n'est pas nul ; le quotient du sinus par le cosinus donne $\tan\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$.

Contrôle. $-\dfrac{2\pi}{3} \in \left]-\pi, -\dfrac{\pi}{2}\right[$: le point est sur le quart de cercle de I' à J', où les deux lignes sont négatives.

Conclusion. Le cosinus, le sinus et la tangente de $-\dfrac{2\pi}{3}$ valent $-\dfrac{1}{2}$, $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sqrt{3}$.

3.

Le réel $\dfrac{7\pi}{6}$.

INDICE

Outil : $\dfrac{7\pi}{6} = \pi + \dfrac{\pi}{6}$; les angles associés.

CORRIGÉ

Réduction. On a $\dfrac{7\pi}{6} = \pi + \dfrac{\pi}{6}$. D'après les angles associés, puis les angles usuels :

- $\cos\dfrac{7\pi}{6} = -\cos\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;
- $\sin\dfrac{7\pi}{6} = -\sin\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{1}{2}$;
- la tangente ne change pas : $\tan\dfrac{7\pi}{6} = \tan\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Contrôle. $\dfrac{7\pi}{6} \in \left]\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right[$: le point est sur le quart de cercle de I' à J', où le cosinus et le sinus sont négatifs et la tangente positive.

Conclusion. Le cosinus, le sinus et la tangente de $\dfrac{7\pi}{6}$ valent $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $-\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

4.

Le réel $\dfrac{17\pi}{3}$.

INDICE

Début : $\dfrac{17\pi}{3} = 6\pi - \dfrac{\pi}{3}$; trois tours complets ne changent ni le cosinus ni le sinus.

CORRIGÉ

Réduction. On a $\dfrac{17\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{3} + 3 \times 2\pi$. D'après la propriété des tours complets, puis les angles associés et les angles usuels :

- $\cos \dfrac{17\pi}{3} = \cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$;
- $\sin \dfrac{17\pi}{3} = \sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Tangente. Le quotient du sinus par le cosinus donne $\tan \dfrac{17\pi}{3} = -\sqrt{3}$.

Contrôle. $-\dfrac{\pi}{3} \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, 0\right[$: le point est sur le quart de cercle de J' à I, où le cosinus est positif et le sinus négatif.

Conclusion. Le cosinus, le sinus et la tangente de $\dfrac{17\pi}{3}$ valent $\dfrac{1}{2}$, $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\sqrt{3}$.

Exercice 6

Deux simplifications

Pour tout réel x, on pose

$$\begin{aligned} A(x) = &\cos(-x) \\ &+ \sin(\pi + x) \\ &- \cos(3\pi + x) \\ &- \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} B(x) = &\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ &+ \sin^2(\pi + x). \end{aligned}$$

1.

Simplifier $A(x)$.

INDICE

Début : $3\pi + x = (\pi + x) + 2\pi$; retire le tour complet, puis transforme chaque terme.

CORRIGÉ

Tour complet. On a $3\pi + x = (\pi + x) + 2\pi$. D'après la propriété des tours complets, $\cos(3\pi + x) = \cos(\pi + x)$.

Angles associés. Pour tout réel x :

- $\cos(-x) = \cos x$;
- $\sin(\pi + x) = -\sin x$;
- $\cos(\pi + x) = -\cos x$;
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$.

Regroupement. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} &A(x) \\ &= \cos x - \sin x \\ &\quad - (-\cos x) - (-\sin x) \\ &= 2\cos x. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $A(x) = 2\cos x$.

2.

Simplifier $B(x)$.

INDICE

Outil : transforme chaque sinus, puis élève au carré ; la relation fondamentale termine.

CORRIGÉ

Angles associés. Pour tout réel x, $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$ et $\sin(\pi+x)=-\sin x$.

Carrés. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}B(x)&=\cos^2 x+(-\sin x)^2\\&=\cos^2 x+\sin^2 x.\end{aligned}$$

Conclusion. D'après la relation fondamentale, $B(x)=1$ pour tout réel x.

3.

Contrôler le résultat de la question 1 en calculant directement $A\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

INDICE

Début : $\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}$, $3\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{10\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}$.

CORRIGÉ

Arguments. On a $\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}$, $3\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{10\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}$.

Valeurs. D'après les angles associés, les tours complets et les angles usuels :

- $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$;
- $\sin\frac{4\pi}{3}=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$;
- $\cos\frac{10\pi}{3}=\cos\frac{4\pi}{3}=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$;
- $\cos\frac{5\pi}{6}=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Calcul direct.

$$\begin{aligned}&A\left(\frac{\pi}{3}\right)\\&=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\\&\quad-\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\&=1.\end{aligned}$$

Conclusion. $A\left(\frac{\pi}{3}\right)=1$, et $2\cos\frac{\pi}{3}=2\times\frac{1}{2}=1$: le calcul direct confirme le résultat de la question 1.

Exercice 7

Deux identités courtes

Dans cet exercice, x désigne un réel quelconque.

1.

Développer $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2$ et simplifier le résultat.

INDICE

Outil : les identités remarquables, puis la relation fondamentale.

CORRIGÉ

Développement. D'après les identités remarquables :

- $(\cos x + \sin x)^2 = \cos^2 x + 2\sin x \cos x + \sin^2 x$;
- $(\cos x - \sin x)^2 = \cos^2 x - 2\sin x \cos x + \sin^2 x$.

Somme. Notons $S(x)$ la somme des deux carrés. Les termes $2\sin x \cos x$ s'éliminent, et la relation fondamentale termine :

$$\begin{aligned} S(x) &= 2\cos^2 x + 2\sin^2 x \\ &= 2\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right) \\ &= 2. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2$.

2.

Écrire $\cos^4 x - \sin^4 x$ comme un produit de deux facteurs. En déduire que $\cos^4 x - \sin^4 x = 2\cos^2 x - 1$.

INDICE

Outil : $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ avec $a = \cos^2 x$ et $b = \sin^2 x$. **Ensuite :** $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$.

CORRIGÉ

Factorisation. Avec $a = \cos^2 x$ et $b = \sin^2 x$, l'identité $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ donne :

$$\begin{aligned} &\cos^4 x - \sin^4 x \\ &= \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) \\ &\quad \times \left(\cos^2 x + \sin^2 x\right). \end{aligned}$$

Simplification. D'après la relation fondamentale, le second facteur vaut 1 et $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. Donc :

$$\begin{aligned} &\cos^4 x - \sin^4 x \\ &= \cos^2 x - \left(1 - \cos^2 x\right) \\ &= 2\cos^2 x - 1. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $\cos^4 x - \sin^4 x = \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)$, et $\cos^4 x - \sin^4 x = 2\cos^2 x - 1$.

3.

Contrôler l'égalité de la question 2 pour $x = \dfrac{\pi}{6}$.

INDICE

Début : $\cos^2\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{3}{4}$ et $\sin^2\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{4}$.

CORRIGÉ

Premier membre. D'après les angles usuels, $\cos^2\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{3}{4}$ et $\sin^2\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{4}$. En élevant au carré, $\cos^4\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{9}{16}$ et $\sin^4\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{16}$:

$$\begin{aligned}&\cos^4\frac{\pi}{6} - \sin^4\frac{\pi}{6}\\ &= \frac{9}{16} - \frac{1}{16} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Second membre. $2\cos^2\dfrac{\pi}{6} - 1 = 2 \times \dfrac{3}{4} - 1 = \dfrac{1}{2}$.

Conclusion. Les deux membres valent $\dfrac{1}{2}$: l'égalité de la question 2 est vérifiée pour $x = \dfrac{\pi}{6}$.