BURHAN

Calcul trigonométrique

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/calcul-trigonometrique/cours

Chapitre	Semestre
Calcul trigonométrique	Semestre 1

Mesurer un tour de roue

Une roue de vélo tourne. Ton ami dit : « la valve a tourné de 90° ». Cette phrase ne dit pas tout.

Dans quel sens la roue a-t-elle tourné ? A-t-elle fait des tours complets avant ? Et de combien le vélo a-t-il avancé ?

Devine : Un quart de tour

La roue a un rayon de 30 cm et roule sans glisser. Elle fait un quart de tour. De combien le vélo avance-t-il ?

A. De 90 cm.

Faux.

Le nombre 90 mesure l'angle en degrés, pas une longueur.

B. De 30 cm.

Faux.

C'est le rayon : la roue avance de la longueur d'un arc, pas d'un rayon.

C. De 15π cm.

Juste.

Juste : c'est le quart de la longueur du cercle, 60π cm.

D. De 60π cm.

Faux.

C'est la longueur d'un tour complet ; ici, la roue ne fait qu'un quart de tour.

Correction

Le vélo avance de la longueur de l'arc parcouru par le pneu.

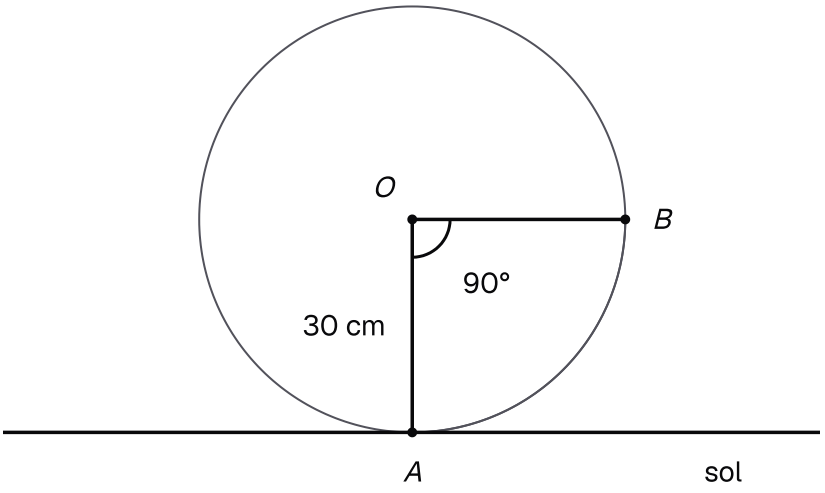
Notons ℓ la longueur du cercle, en centimètres :

$$\ell = 2\pi \times 30 = 60\pi.$$

Un quart de tour correspond au quart de cette longueur :

$$\frac{60\pi}{4} = 15\pi.$$

Le vélo avance donc d'environ 47 cm.



La roue de rayon 30 cm et le quart de tour de sa valve, de A en B, autour du centre O.

Mesurer un angle par la longueur d'un arc : c'est l'idée du **radian**.

Dans ce chapitre, tu repères chaque réel par un point d'un cercle, en tenant compte du sens et des tours. Tu mesures ensuite des angles orientés, et tu définis le cosinus et le sinus de n'importe quel réel.

Tu pars de ce que tu sais du collège : degrés, longueur d'un cercle, cosinus d'un angle aigu.

Degré, radian, grade

Mesurer un angle par un arc

Rappel du collège. Un tour complet mesure $360°$. Un cercle de rayon R a pour longueur $2\pi R$. Un angle au centre intercepte un arc : plus l'angle est grand, plus l'arc est long.

Devine : Deux cercles, un même angle

Deux cercles de même centre ont pour rayons 1 cm et 3 cm. Un même angle au centre de $60°$ intercepte un arc sur chacun. Que peux-tu dire de l'arc du grand cercle ?

A. Il a la même longueur que l'autre arc.
Faux.
L'angle est le même, mais le grand cercle est plus long : son arc aussi.

B. Il est trois fois plus long que l'autre arc.
Juste.
Juste : la longueur de l'arc est proportionnelle au rayon.

C. Il est neuf fois plus long que l'autre arc.
Faux.
Le rayon est multiplié par 3, pas son carré : la longueur d'un cercle est $2\pi r$.

D. On ne peut pas comparer sans mesurer.

Faux.

Le calcul suffit : chaque arc est un sixième de son cercle.

Correction

Un angle de $60°$ est un sixième de tour.

Sur le petit cercle, l'arc mesure, en centimètres :

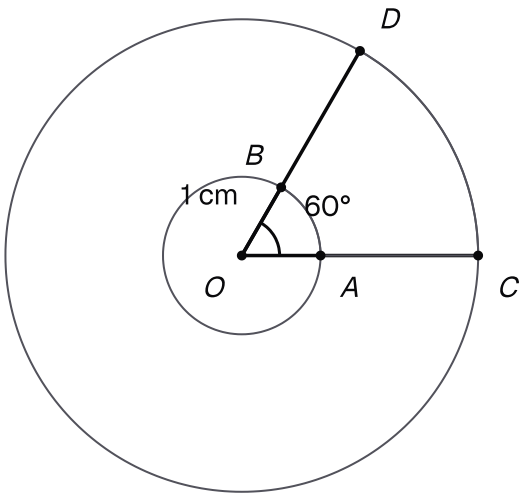
$$\frac{2\pi \times 1}{6} = \frac{\pi}{3}.$$

Sur le grand cercle, il mesure :

$$\frac{2\pi \times 3}{6} = \pi,$$

soit trois fois plus.

Le quotient « longueur de l'arc sur rayon » vaut $\frac{\pi}{3}$ dans les deux cas.



Deux cercles de même centre O, de rayons 1 cm et 3 cm, et le même angle au centre de 60 degrés.

En clair. Pour un angle donné, le quotient de la longueur de l'arc par le rayon ne dépend pas du cercle.

Pour un angle droit, l'arc est un quart du cercle :

$$\frac{2\pi R}{4} = \frac{\pi R}{2},$$

et le quotient vaut $\frac{\pi}{2}$. Ce nombre mesure l'angle : c'est sa mesure en **radians**.

Trois unités

Définition : Unités de mesure des angles : degré, radian, grade

Un angle géométrique se mesure avec l'une des trois unités suivantes, fixées par la mesure de l'**angle plein** (un tour complet) :

- en **degrés** : l'angle plein mesure 360° ;
- en **radians** : l'angle plein mesure $2\pi \text{ rad}$;
- en **grades** : l'angle plein mesure 400 gr.

Sur un cercle de rayon R, un angle au centre de 1 rad intercepte un arc de longueur R ; plus généralement, un angle au centre de $\alpha \text{ rad}$ intercepte un arc de longueur αR, et l'angle au centre est proportionnel à l'arc qu'il intercepte.

Exemple : des arcs et des radians

- Sur un cercle de rayon 4 cm, un angle au centre de $\dfrac{\pi}{2} \text{ rad}$ intercepte un arc de longueur $\dfrac{\pi}{2} \times 4 = 2\pi$ cm.
- Sur un cercle de rayon 5 cm, un angle au centre de 2 rad intercepte un arc de 10 cm.
- Un angle de 1 rad intercepte un arc de même longueur que le rayon. Un tour complet mesure 2π radians, soit environ $6{,}28$: il faut un peu plus de six angles de 1 rad pour faire le tour.

Passer d'une unité à l'autre

L'angle plein mesure 360°, $2\pi \text{ rad}$ ou 400 gr. Comment passer d'une unité à l'autre ?

Pourquoi est-ce vrai ? Un angle représente une fraction de tour. Dans chaque unité, sa mesure est cette fraction multipliée par la mesure du tour complet.

Propriété : Conversion entre degré, radian et grade

Si un même angle mesure d°, $r \text{ rad}$ et $g \text{ gr}$, alors

$$\frac{d}{180} = \frac{r}{\pi} = \frac{g}{200}.$$

En particulier, l'angle plat mesure 180°, $\pi \text{ rad}$ et 200 gr, et l'angle droit mesure 90°, $\dfrac{\pi}{2} \text{ rad}$ et 100 gr.

Démonstration

Étape 1. Notons t la fraction de tour que représente l'angle : par exemple $t = \dfrac{1}{4}$ pour un angle droit. La mesure d'un angle est proportionnelle à cette fraction de tour ; d'après la définition des trois unités, $d = 360\,t$, $r = 2\pi\,t$ et $g = 400\,t$.

Étape 2. Donc $\frac{d}{180} = 2t$, $\frac{r}{\pi} = 2t$ et $\frac{g}{200} = 2t$: les trois quotients sont égaux.

Étape 3. Pour l'angle plat, $t = \frac{1}{2}$; pour l'angle droit, $t = \frac{1}{4}$: on obtient les mesures annoncées.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve introduit la **fraction de tour** t que représente l'angle. Les trois mesures sont proportionnelles à t : $360\,t$, $2\pi\,t$ et $400\,t$.

En les divisant par 180, π et 200, on obtient trois fois le même nombre, $2t$.

Vérifie : La fraction de tour

Dans la preuve, un angle représente la fraction de tour t. Quelle est sa mesure en grades ?

A. $360\,t$

Faux.
C'est sa mesure en degrés.

B. $2\pi\,t$

Faux.
C'est sa mesure en radians.

C. $\frac{t}{400}$

Faux.
On multiplie la mesure du tour par la fraction, on ne divise pas.

D. $400\,t$

Juste.
Juste : le tour complet mesure $400\ \text{gr}$.

Correction
D'après la définition des trois unités, le tour complet mesure $400\ \text{gr}$. Une fraction t du tour mesure donc $400\,t$ grades.

Par exemple, pour un angle droit, $t = \frac{1}{4}$ et la mesure vaut $100\ \text{gr}$.

Exemple : convertir soixante degrés

Un angle mesure $60°$. D'après la conversion entre degré, radian et grade :

$$\frac{60}{180} = \frac{r}{\pi} = \frac{g}{200}.$$

Le premier quotient vaut $\frac{1}{3}$. Donc $r = \frac{\pi}{3}$ et $g = \frac{200}{3}$: l'angle mesure $\frac{\pi}{3}\ \text{rad}$ et $\frac{200}{3}\ \text{gr}$.

Contrôle. $60°$ est un sixième de tour, et $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.

La méthode, puis à toi

Méthode : convertir une mesure d'angle

1. **Écris** l'égalité des quotients $\frac{d}{180} = \frac{r}{\pi} = \frac{g}{200}$.
2. **Remplace** la mesure connue, puis calcule le quotient correspondant.
3. **Déduis** chaque mesure cherchée de ce quotient ; en radians, garde π dans la valeur exacte.
4. **Contrôle** l'ordre de grandeur : un angle plus petit qu'un angle plat mesure moins de $180°$, de π rad et de 200 gr.

À toi : Trois conversions

Convertis $135°$ en radians et en grades. Convertis ensuite $\frac{5\pi}{6}$ rad en degrés, puis 50 gr en degrés et en radians. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Écris chaque fois l'égalité des quotients, puis calcule le quotient connu.
Indice 2
Pour $135°$, le quotient vaut $\frac{135}{180} = \frac{3}{4}$.
Indice 3
Point délicat : en radians, garde π dans le résultat ; n'écris pas une valeur approchée.

Réponse
D'après la conversion entre degré, radian et grade :

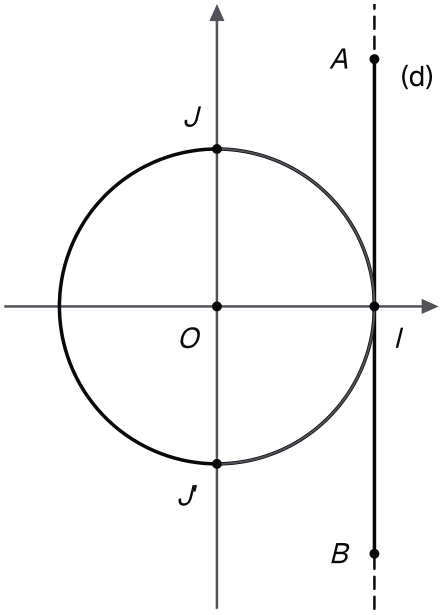
- $\frac{135}{180} = \frac{3}{4}$, donc $135°$ mesure $\frac{3\pi}{4}$ rad et $\frac{3}{4} \times 200 = 150$ gr ;
- $\frac{r}{\pi} = \frac{5}{6}$, donc $\frac{5\pi}{6}$ rad mesure $\frac{5}{6} \times 180 = 150°$;
- $\frac{50}{200} = \frac{1}{4}$, donc 50 gr mesure $45°$ et $\frac{\pi}{4}$ rad.

Le cercle trigonométrique et les abscisses curvilignes

Enrouler la droite des réels

En clair. Prends un cercle de rayon 1 et un point I de ce cercle. Imagine la droite des réels comme un fil gradué.

Tu poses son zéro sur I, puis tu l'enroules autour du cercle : les réels positifs dans un sens, les négatifs dans l'autre. Chaque réel vient se poser sur un point du cercle.



Le fil gradué posé en I, tangent au cercle de rayon 1 : en s'enroulant, le segment de I à A recouvre le quart de cercle de I à J.

Devine : Où arrive le réel pi ?

Le cercle a pour rayon 1, donc pour longueur 2π. En enroulant le fil à partir de I, où arrive le réel π ?

A. En I, après un tour complet.

Faux.

Un tour complet a pour longueur 2π, le double de π.

B. Au point diamétralement opposé à I.

Juste.

Juste : π est la moitié de la longueur du cercle.

C. Au bout d'un quart de cercle, à partir de I.

Faux.

Un quart de cercle a pour longueur $\dfrac{\pi}{2}$.

D. Sur la droite (OI), à la distance π de O.

Faux.

Le fil est enroulé sur le cercle : le réel arrive sur le cercle.

Correction

Le fil enroulé parcourt le cercle. Un demi-tour a pour longueur

$$\frac{2\pi}{2} = \pi.$$

Le réel π arrive donc au point diamétralement opposé à I, après un demi-tour.

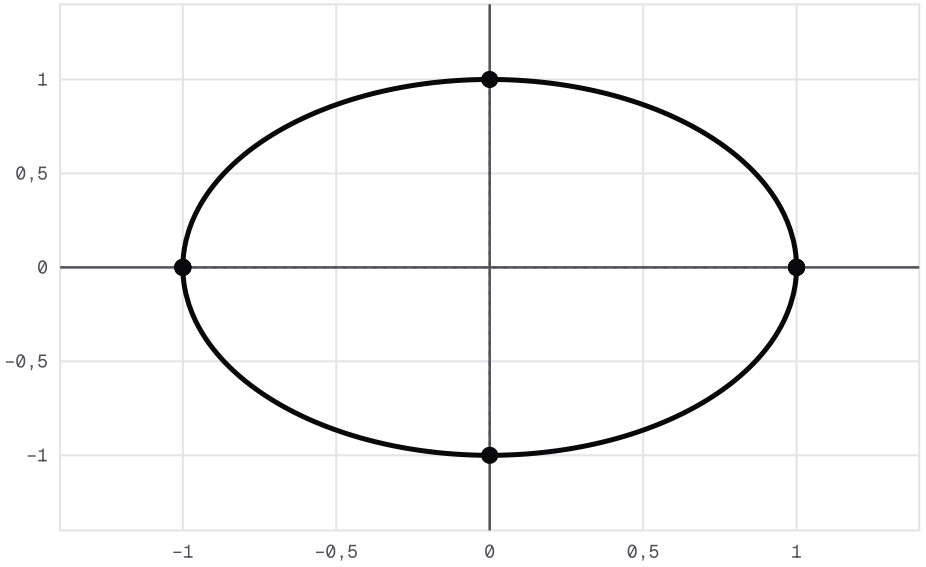
Le cercle et son orientation

Définition : Cercle trigonométrique

On **oriente** le plan : le sens contraire du mouvement des aiguilles d'une montre est appelé sens **direct** (ou positif), l'autre sens est appelé sens **indirect** (ou négatif).

Le **cercle trigonométrique** est un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1, muni d'un point I appelé **origine**, et orienté dans le sens direct.

On note J le point de $\mathcal{C}$ tel que le quart de cercle de I à J soit parcouru dans le sens direct, et I', J' les points de $\mathcal{C}$ diamétralement opposés à I et J. Le repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ est orthonormé ; on dit qu'il est **direct**.



Le cercle trigonométrique : son centre O, son origine I, et les points J, I' et J'.

Abscisses curvilignes

Définition : Abscisses curvilignes d'un point

Soit $\mathcal{C}$ un cercle trigonométrique d'origine I et x un réel. À partir de I, on parcourt $\mathcal{C}$:

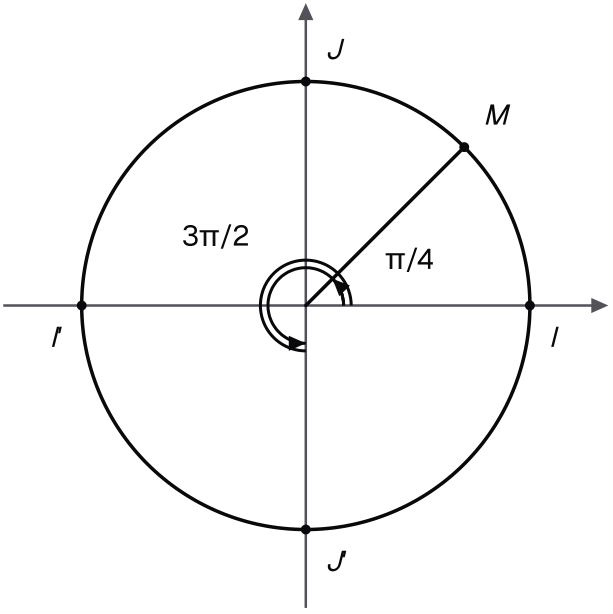
- sur une longueur x dans le sens direct, si $x \geq 0$;
- sur une longueur $-x$ dans le sens indirect, si $x < 0$.

On arrive en un point M de $\mathcal{C}$. On dit que x est **une abscisse curviligne** du point M.

Le cercle $\mathcal{C}$ a pour longueur 2π : 0 est une abscisse curviligne de I, $\frac{\pi}{2}$ une abscisse curviligne de J, π et $-\pi$ des abscisses curvilignes de I', et $-\frac{\pi}{2}$ une abscisse curviligne de J'.

Exemple : quelques points du cercle

- Le réel $\frac{\pi}{4}$ est la moitié de $\frac{\pi}{2}$: son point est au milieu du quart de cercle de I à J.
- Le réel $\frac{3\pi}{2}$ correspond à trois quarts de tour dans le sens direct : on arrive en J'. De plus, $-\frac{\pi}{2}$ est aussi une abscisse curviligne de J'.
- Le réel 2π correspond à un tour complet : on revient en I, qui a donc pour abscisses 0 et 2π.



Deux lectures de l'exemple : M d'abscisse π/4 au milieu du quart de cercle de I à J, et J' atteint après trois quarts de tour.

Plusieurs abscisses pour un même point

Propriété : Abscisses curvilignes d'un même point

Si x est une abscisse curviligne d'un point M de $\mathcal{C}$, alors les abscisses curvilignes de M sont exactement les réels $x + 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.

Ainsi, deux réels x et y sont des abscisses curvilignes d'un même point si et seulement si $y - x$ est un multiple entier de 2π. On écrit alors $y \equiv x\ [2\pi]$, et on lit « y est congru à x modulo 2π ».

Démonstration

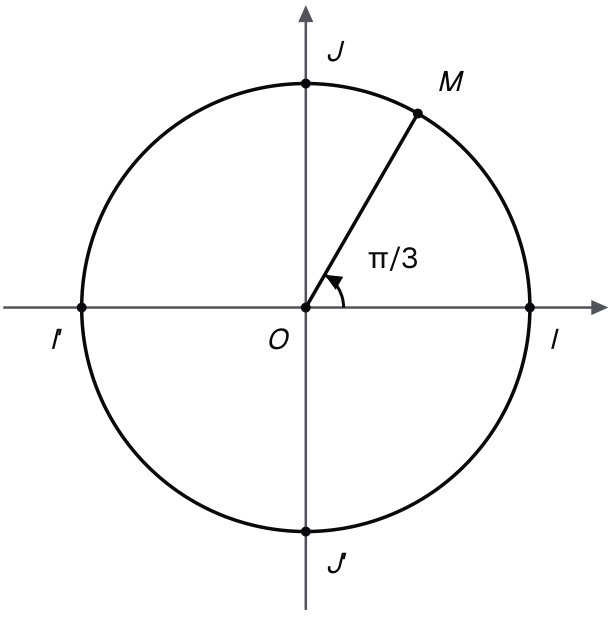
Idée de la preuve. Le cercle $\mathcal{C}$ a pour longueur 2π. Passer de x à $x + 2\pi$, c'est, au bout du compte, ajouter un tour complet dans le sens direct ; passer de x à $x - 2\pi$, ajouter un tour complet dans le sens indirect. Dans les deux cas, on revient au même point M ; en répétant, on obtient tous les réels $x + 2k\pi$. On admet la réciproque : deux parcours qui partent de I et arrivent au même point diffèrent d'un nombre entier de tours complets.

À retenir : un tour de plus, le même point

Ajouter 2π, c'est faire un tour complet de plus : on revient au même point.

L'idée de la preuve **admet** l'autre sens, qu'on appelle la réciproque : deux parcours qui arrivent au même point diffèrent d'un nombre entier de tours.

Un point a donc une infinité d'abscisses curvilignes, toutes égales à $2k\pi$ près.



Le point M d'abscisse π/3 : un tour complet de plus, soit 2π, ramène exactement au même point M.

Vérifie : Le même point

Lequel de ces réels est une abscisse curviligne du même point que $\frac{\pi}{3}$?

A. $\frac{7\pi}{3}$

Juste.

Juste : $\frac{7\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 2\pi$, un tour complet.

B. $\frac{4\pi}{3}$

Faux.

L'écart vaut π : c'est un demi-tour, le point diamétralement opposé.

C. $-\dfrac{\pi}{3}$

Faux.

L'écart vaut $\dfrac{2\pi}{3}$, qui n'est pas un multiple entier de 2π.

D. $\dfrac{\pi}{3}+2$

Faux.

On a ajouté 2, pas 2π : ce n'est pas un tour complet.

Correction

D'après la propriété des abscisses curvilignes d'un même point, il faut un écart égal à un multiple entier de 2π.

Seul $\dfrac{7\pi}{3}$ convient :

$$\frac{7\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+2\pi.$$

Les écarts des autres réels valent π, $\dfrac{2\pi}{3}$ et 2.

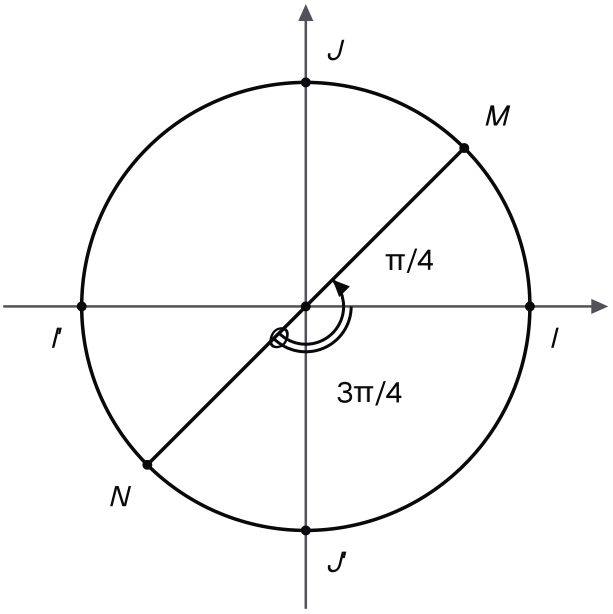
Placer un point

Méthode : placer un point d'abscisse curviligne donnée

1. **Retire** des tours complets : écris $x=x'+2k\pi$, avec k entier et x' dans $]-\pi,\pi]$. Le point d'abscisse x est celui d'abscisse x'.
2. **Choisis le sens** de parcours à partir de I : direct si $x'>0$, indirect si $x'<0$.
3. **Compte** les quarts de cercle : un quart mesure $\dfrac{\pi}{2}$; partage-le en deux pour $\dfrac{\pi}{4}$, en trois pour $\dfrac{\pi}{6}$.
4. **Place** le point, puis nomme le quart de cercle où il se trouve.

Exemple : placer deux points

- $\dfrac{9\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4}+2\pi$. D'après la propriété des abscisses curvilignes d'un même point, on place le point d'abscisse $\dfrac{\pi}{4}$: au milieu du quart de cercle de I à J.
- $-\dfrac{3\pi}{4}$ est déjà entre $-\pi$ et π. Il est négatif : on part de I dans le sens indirect. Or $\dfrac{3\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}$: on parcourt le quart de cercle de I à J', puis la moitié du suivant. Le point est au milieu du quart de cercle de J' à I'.



Les deux points de l'exemple : M, d'abscisse 9π/4, se place comme π/4 ; N, d'abscisse −3π/4, se place en tournant dans le sens indirect.

Une erreur, puis à toi

Erreur courante. Un réel négatif se parcourt dans le sens indirect. Le point d'abscisse $-\frac{\pi}{2}$ est J', et non J. Partir dans le mauvais sens donne le symétrique du bon point par rapport à l'axe (II').

À toi : Deux points à placer

Place sur le cercle trigonométrique les points d'abscisses curvilignes $\frac{7\pi}{2}$ et $-\frac{9\pi}{4}$. Pour chacun, nomme le point ou le quart de cercle où il se trouve. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Retire des tours complets pour te ramener entre $-\pi$ et π.

Indice 2

$\frac{7\pi}{2} = \frac{8\pi}{2} - \frac{\pi}{2}$, et $\frac{8\pi}{2}$ vaut deux tours.

Indice 3

Point délicat : pour $-\frac{9\pi}{4}$, ajoute 2π ; le résultat est négatif, on tourne dans le sens indirect.

Réponse

- $\frac{7\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + 4\pi$, soit deux tours complets. D'après la propriété des abscisses curvilignes d'un même point, c'est le point d'abscisse $-\frac{\pi}{2}$: le point J'.
- $-\frac{9\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} - 2\pi$. C'est le point d'abscisse $-\frac{\pi}{4}$: on part de I dans le sens indirect, sur la moitié d'un quart de cercle. Le point est au milieu du quart de cercle de I à J'.

L'abscisse curviligne principale

Un représentant par point

En clair. Un point du cercle a une infinité d'abscisses curvilignes. Pour en parler sans ambiguïté, on en choisit une seule.

On prend celle du chemin le plus court depuis I : positive dans le sens direct, négative dans le sens indirect. Elle est donc entre $-\pi$ et π.

Devine : Le chemin le plus court

Quelle abscisse curviligne du point d'abscisse $\dfrac{13\pi}{6}$ est comprise entre $-\pi$ et π ?

A. $\dfrac{7\pi}{6}$
Faux.
On a retiré π ; or seul un tour complet, 2π, ramène au même point.

B. $-\dfrac{11\pi}{6}$
Faux.
On a retiré deux tours : $-\dfrac{11\pi}{6}$ est inférieur à $-\pi$.

C. $\dfrac{\pi}{6}$
Juste.
Juste : $\dfrac{13\pi}{6} - 2\pi = \dfrac{\pi}{6}$.

D. $\dfrac{25\pi}{6}$
Faux.
On a ajouté un tour au lieu d'en retirer un.

Correction
On retire un tour complet :

$$\begin{aligned}\frac{13\pi}{6} - 2\pi &= \frac{13\pi}{6} - \frac{12\pi}{6} \\ &= \frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$

Ce réel est entre $-\pi$ et π. D'après la propriété des abscisses curvilignes d'un même point, il repère le même point.

L'abscisse curviligne principale

Propriété : Abscisse curviligne principale

Tout point M du cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ possède **une seule** abscisse curviligne appartenant à l'intervalle $]-\pi, \pi]$. On l'appelle l'**abscisse curviligne principale** du point M.

Démonstration

Idée de la preuve. Les intervalles $]-\pi+2k\pi, \pi+2k\pi]$, pour $k \in \mathbb{Z}$, ont pour longueur 2π, se suivent sans se chevaucher et recouvrent toute la droite réelle : on admet ce point. Si x est une abscisse curviligne de M, il appartient à l'un d'eux, d'indice k ; alors $x - 2k\pi$ appartient à $]-\pi, \pi]$ et c'est une abscisse curviligne de M, d'après la propriété des abscisses curvilignes d'un même point. Deux abscisses de M dans $]-\pi, \pi]$ diffèrent d'un multiple entier de 2π strictement compris entre -2π et 2π : ce multiple est nul, et elles sont égales.

À retenir : un seul représentant

L'idée de la preuve **admet** que les intervalles de longueur 2π, centrés sur les multiples de 2π, recouvrent la droite réelle sans se chevaucher. On retire alors à x le bon multiple de 2π.

L'unicité vient de la longueur de l'intervalle : deux abscisses de $]-\pi, \pi]$ diffèrent de moins d'un tour.

Calculer une abscisse principale

Méthode : calculer une abscisse curviligne principale

1. **Écris** le réel sous la forme $x = \dfrac{p\pi}{q}$.
2. **Cherche** le multiple de 2π le plus proche de x : il s'écrit $2k\pi$, avec k entier.
3. **Calcule** $x_0 = x - 2k\pi$.
4. **Vérifie** que $-\pi < x_0 \leq \pi$; si tu trouves $-\pi$, prends π à sa place.

Exemple : un réel plus grand qu'un tour

Cherchons l'abscisse principale du point d'abscisse $\dfrac{11\pi}{3}$. On écrit :

$$\begin{aligned}\frac{11\pi}{3} &= \frac{12\pi}{3} - \frac{\pi}{3} \\ &= 4\pi - \frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$

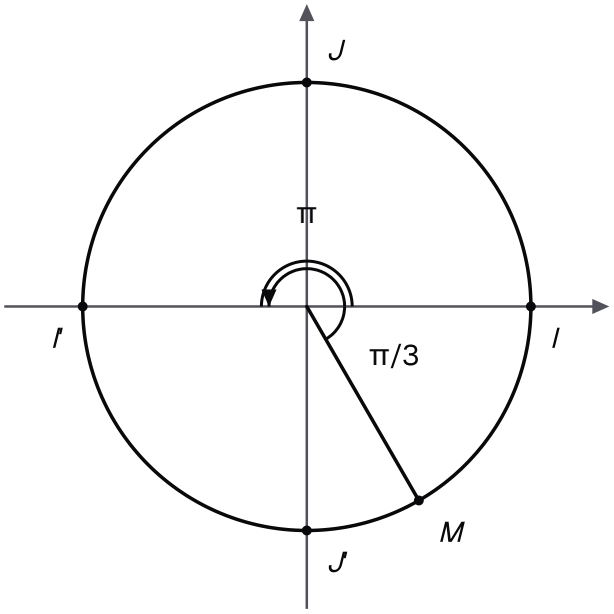
Le multiple de 2π le plus proche est 4π, avec $k = 2$. Donc

$$x_0 = \frac{11\pi}{3} - 4\pi = -\frac{\pi}{3}.$$

Comme $-\pi < -\dfrac{\pi}{3} \leq \pi$, d'après la propriété de l'abscisse curviligne principale, c'est la seule qui convient.

Exemple : la borne pi

- Le point I' a pour abscisses π et $-\pi$. Seul π appartient à $]-\pi, \pi]$: l'abscisse principale de I' est π.
- Pour -3π, on ajoute deux tours : $-3\pi + 4\pi = \pi$. L'abscisse principale est π. Ajouter un seul tour donnerait $-\pi$, exclu de l'intervalle.



Les abscisses principales lues sur le cercle : positives sur le demi-cercle du haut, négatives sur celui du bas ; M a pour abscisse principale –π/3 et I' a pour abscisse principale π.

Un piège, puis à toi

Attention : l'intervalle est]–π, π]

✗ « L'abscisse principale du point d'abscisse $\frac{11\pi}{3}$ est $\frac{5\pi}{3}$. »

✓ On a bien retiré un tour, mais $\frac{5\pi}{3}$ dépasse π : il n'est pas dans $]-\pi, \pi]$. Il faut retirer un tour de plus, et l'on trouve $-\frac{\pi}{3}$.

De même, l'abscisse principale de I' est π, jamais $-\pi$.

À toi : Trois abscisses principales

Détermine l'abscisse curviligne principale des points d'abscisses curvilignes $-\frac{11\pi}{3}$, $\frac{15\pi}{4}$ et 5π.

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Pour chaque réel, cherche le multiple de 2π le plus proche.

Indice 2

$-\dfrac{11\pi}{3}$ est proche de -4π, et $\dfrac{15\pi}{4}$ est proche de 4π.

Indice 3

Point délicat : pour 5π, deux multiples de 2π sont à égale distance ; garde le résultat qui est dans $]-\pi, \pi]$.

Réponse

D'après la propriété de l'abscisse curviligne principale :

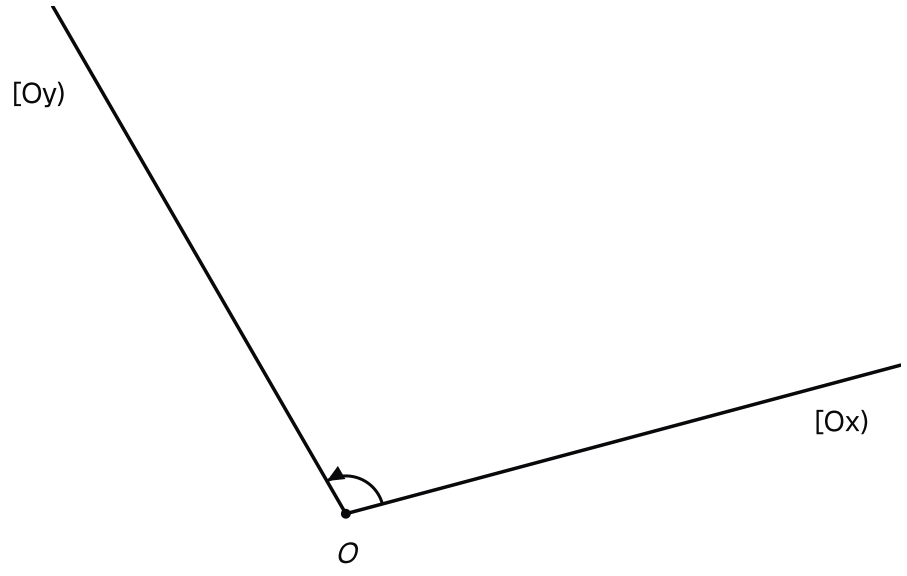
- $-\dfrac{11\pi}{3} + 4\pi = \dfrac{\pi}{3}$, et $\dfrac{\pi}{3}$ est dans $]-\pi, \pi]$;
- $\dfrac{15\pi}{4} - 4\pi = -\dfrac{\pi}{4}$, dans $]-\pi, \pi]$;
- $5\pi - 4\pi = \pi$, qui est dans $]-\pi, \pi]$; avec $5\pi - 6\pi = -\pi$, on sortirait de l'intervalle.

Angle orienté de deux demi-droites

Tourner d'une demi-droite à l'autre

En clair. Deux demi-droites $[Ox)$ et $[Oy)$ ont la même origine O. Pour amener $[Ox)$ sur $[Oy)$, tu tournes autour de O.

Tu peux tourner dans un sens ou dans l'autre, et ajouter des tours complets. Le cercle trigonométrique de centre O permet de mesurer ce mouvement.



Deux demi-droites [Ox) et [Oy) de même origine O, et le mouvement qui amène [Ox) sur [Oy) dans le sens direct.

Devine : Un quart de tour, mais dans quel sens ?

Sur le cercle trigonométrique de centre O, on amène $[OI)$ sur $[OJ')$ par le chemin le plus court. De combien tourne-t-on, en comptant positivement le sens direct ?

A. De $\frac{\pi}{2}$.

Faux.

Un quart de tour dans le sens direct mène de I à J, pas à J'.

B. De $-\frac{\pi}{2}$.

Juste.

Juste : un quart de tour dans le sens indirect.

C. De π.

Faux.

Un demi-tour mène de I à I'.

D. De $\frac{3\pi}{2}$.

Faux.

On arrive bien en J', mais par le chemin long : trois quarts de tour.

Correction

Le point J' a pour abscisse curviligne $-\frac{\pi}{2}$: de I à J', on parcourt un quart de cercle dans le sens indirect. Le chemin le plus court correspond à $-\frac{\pi}{2}$.

Le réel $\frac{3\pi}{2}$ mesure aussi ce mouvement, avec un tour de plus :

$$\frac{3\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi.$$

Mesures d'un angle orienté

Définition : Angle orienté de deux demi-droites

Soit $[Ox)$ et $[Oy)$ deux demi-droites de même origine O, et $\mathcal{C}$ un cercle trigonométrique de centre O. La demi-droite $[Ox)$ coupe $\mathcal{C}$ en un point M d'abscisse curviligne α, et la demi-droite $[Oy)$ coupe $\mathcal{C}$ en un point N d'abscisse curviligne β.

- Le couple $([Ox), [Oy))$ s'appelle un **angle orienté** de demi-droites.
- Chaque réel $\beta - \alpha + 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$, est **une mesure** de cet angle orienté. On écrit $([Ox), [Oy)) \equiv \beta - \alpha \ [2\pi]$.
- Parmi ces mesures, une seule appartient à $]-\pi, \pi]$: c'est la **mesure principale** de l'angle orienté.

On admet que ces mesures ne dépendent pas de l'origine choisie sur $\mathcal{C}$.

Exemple : une mesure, puis la mesure principale

La demi-droite $[Ox)$ coupe le cercle trigonométrique de centre O au point d'abscisse curviligne $\frac{2\pi}{3}$, et $[Oy)$ au point d'abscisse $-\frac{5\pi}{6}$.

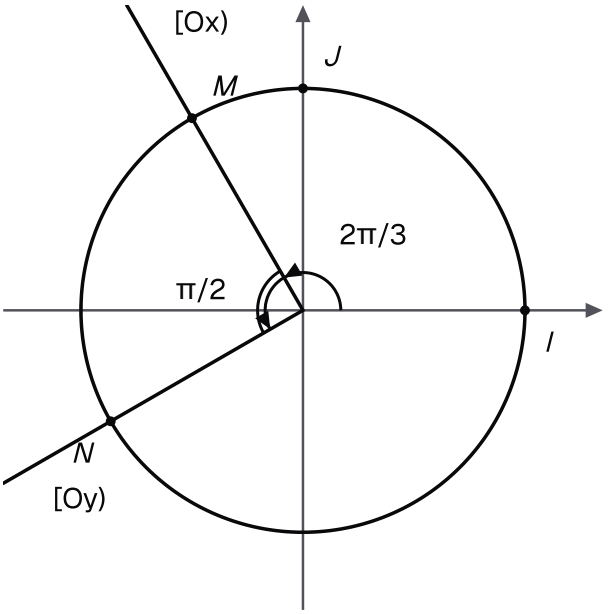
D'après la définition de l'angle orienté de deux demi-droites, une mesure est :

$$-\frac{5\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{3\pi}{2}.$$

Elle n'est pas dans $]-\pi, \pi]$: on ajoute 2π. Donc

$$([Ox), [Oy)) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi],$$

et la mesure principale est $\frac{\pi}{2}$.



L'exemple sur le cercle : [Ox) coupe le cercle en M, d'abscisse 2π/3, et [Oy) le coupe en N ; l'angle orienté de [Ox) vers [Oy) mesure π/2.

La relation de Chasles

Trois demi-droites $[Ox)$, $[Oy)$ et $[Oz)$ ont la même origine. Aller de $[Ox)$ à $[Oz)$, c'est aller de $[Ox)$ à $[Oy)$, puis de $[Oy)$ à $[Oz)$.

Pourquoi est-ce vrai ? Chaque mesure est une différence d'abscisses curvilignes : en les ajoutant, l'abscisse intermédiaire disparaît.

Propriété : Relation de Chasles pour les demi-droites

Soit $[Ox)$, $[Oy)$ et $[Oz)$ trois demi-droites de même origine O. Alors

$$([Ox),[Oy)) + ([Oy),[Oz)) \equiv ([Ox),[Oz)) \ [2\pi] :$$

la somme d'une mesure du premier angle et d'une mesure du deuxième est une mesure du troisième.

De plus, $([Oy),[Ox)) \equiv -([Ox),[Oy)) \ [2\pi]$ et $([Ox),[Ox)) \equiv 0 \ [2\pi]$.

Démonstration

Étape 1. On note α, β et γ des abscisses curvilignes des points où $[Ox)$, $[Oy)$ et $[Oz)$ coupent un cercle trigonométrique de centre O. D'après la définition de l'angle orienté de deux demi-droites, $\beta - \alpha$, $\gamma - \beta$ et $\gamma - \alpha$ sont des mesures respectives de $([Ox),[Oy))$, $([Oy),[Oz))$ et $([Ox),[Oz))$.

Étape 2. Deux mesures quelconques des deux premiers angles s'écrivent $\beta - \alpha + 2p\pi$ et $\gamma - \beta + 2q\pi$, avec $p, q \in \mathbb{Z}$. Leur somme vaut $\gamma - \alpha + 2(p+q)\pi$, et $p + q \in \mathbb{Z}$: c'est une mesure de $([Ox),[Oz))$.

Étape 3. De même, $\alpha - \beta = -(\beta - \alpha)$ est une mesure de $([Oy),[Ox))$, et $\alpha - \alpha = 0$ est une mesure de $([Ox),[Ox))$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Le calcul clé est le suivant :

$$(\beta - \alpha) + (\gamma - \beta) = \gamma - \alpha.$$

L'abscisse β du point intermédiaire s'élimine.

Chaque mesure n'est connue qu'à un multiple de 2π près : la relation est donc écrite avec $\equiv \dots \ [2\pi]$, et non avec une égalité.

Vérifie : Pourquoi le signe congru ?

Dans la preuve, pourquoi la relation de Chasles s'écrit-elle avec $\equiv \dots \ [2\pi]$ plutôt qu'avec le signe $=$?

A. Parce que la somme de deux mesures n'est jamais une mesure.
Faux.
L'étape 2 montre le contraire : $(\beta - \alpha) + (\gamma - \beta)$ est une mesure du troisième angle.

B. Parce que les demi-droites n'ont pas la même origine.
Faux.
L'énoncé suppose que les trois demi-droites ont la même origine O.

C. Parce que le sens de parcours change d'un angle à l'autre.
Faux.
Toutes les mesures sont comptées avec la même orientation.

D. Parce que chaque angle a une infinité de mesures, égales à $2k\pi$ près.

Juste.

Juste : une autre mesure diffère d'un multiple entier de 2π.

Correction

Chaque angle orienté a une infinité de mesures, qui diffèrent de multiples entiers de 2π.

La somme de deux mesures choisies au hasard est **une** mesure du troisième angle, pas forcément celle qu'on a choisie. D'où l'écriture $\equiv \dots\ [2\pi]$.

Un exemple, puis à toi

Exemple : additionner deux angles

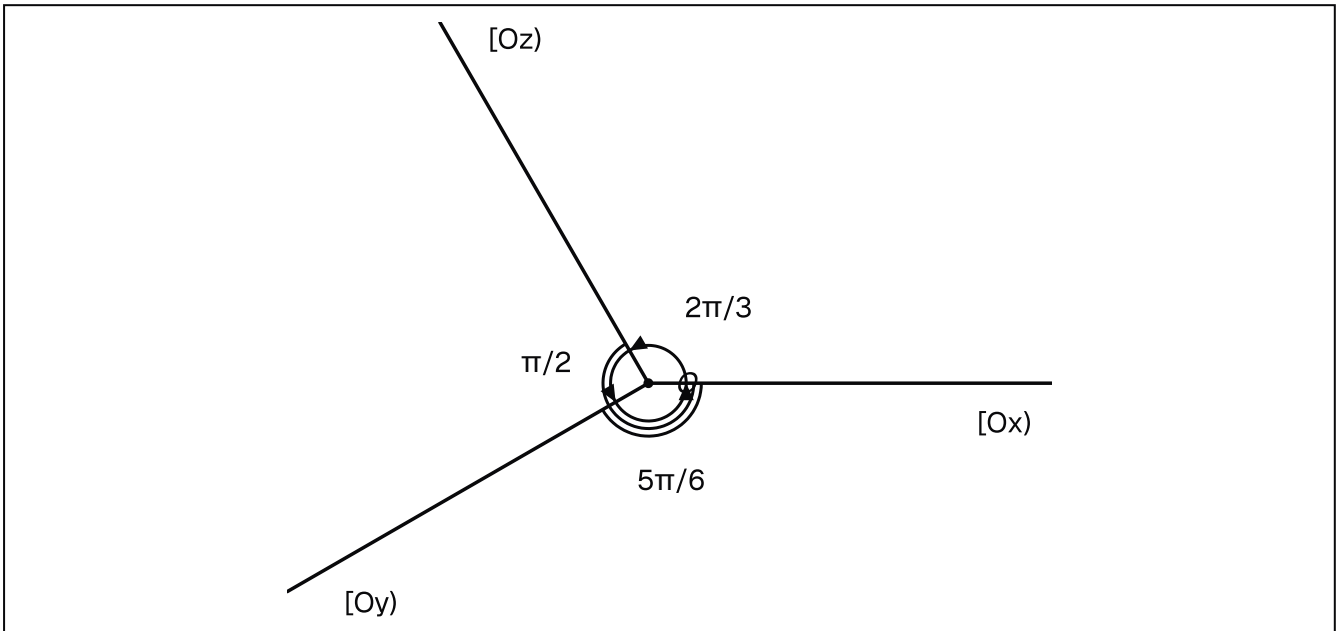
On sait que $([Ox),[Oy)) \equiv -\dfrac{5\pi}{6}\ [2\pi]$ et $([Oy),[Oz)) \equiv -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}([Ox),[Oz)) &\equiv -\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2} \\ &= -\frac{4\pi}{3}\ [2\pi].\end{aligned}$$

Comme $-\dfrac{4\pi}{3} < -\pi$, on ajoute 2π : la mesure principale est $\dfrac{2\pi}{3}$.

De plus, $([Oy),[Ox)) \equiv \dfrac{5\pi}{6}\ [2\pi]$: changer l'ordre change le signe.



Les trois demi-droites de l'exemple : les flèches montrent ([Oy), [Ox)) de mesure 5π/6, ([Oz), [Oy)) de mesure π/2, et le résultat ([Ox), [Oz)) de mesure principale 2π/3.

À toi : Une mesure principale par Chasles

On sait que $([Oy),[Ox)) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ et $([Oy),[Oz)) \equiv \frac{11\pi}{3}\ [2\pi]$. Détermine la mesure principale de $([Ox),[Oz))$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Passe par la demi-droite $[Oy)$ avec la relation de Chasles.

Indice 2

Il te faut d'abord une mesure de $([Ox),[Oy))$, dans cet ordre.

Indice 3

Point délicat : $([Ox),[Oy)) \equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$, et non $\frac{\pi}{4}$; ramène ensuite le résultat dans $]-\pi,\pi]$.

Réponse

Angle dans le bon ordre. D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}&([Ox),[Oy))\\&\equiv -([Oy),[Ox))\\&\equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi].\end{aligned}$$

Relation de Chasles. Toujours d'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}&([Ox),[Oz))\\&\equiv ([Ox),[Oy))\\&\quad + ([Oy),[Oz))\\&\equiv -\frac{\pi}{4}+\frac{11\pi}{3}\\&= \frac{41\pi}{12}\ [2\pi].\end{aligned}$$

Mesure principale. Le multiple de 2π le plus proche est $4\pi = \frac{48\pi}{12}$. La mesure principale est donc

$$\frac{41\pi}{12} - \frac{48\pi}{12} = -\frac{7\pi}{12},$$

qui est bien dans $]-\pi,\pi]$.

Conclusion. La mesure principale de $([Ox),[Oz))$ est $-\frac{7\pi}{12}$.

Angle orienté de deux vecteurs

Des demi-droites aux vecteurs

Devine : Dans un triangle équilatéral

ABC est un triangle équilatéral de sens direct : on lit A, B, C en tournant dans le sens direct. On amène la demi-droite $[AB)$ sur $[AC)$. De combien tourne-t-on, par le chemin le plus court ?

A. De $\frac{\pi}{3}$.
Juste.

Juste : l'angle en A mesure $60°$, et l'on tourne dans le sens direct.

B. De $-\frac{\pi}{3}$.

Faux.

Le sens est faux : de $[AB)$ vers $[AC)$, on tourne dans le sens direct.

C. De $\frac{2\pi}{3}$.

Faux.

Un angle d'un triangle équilatéral mesure $60°$, pas $120°$.

D. De 60.

Faux.

60 est la mesure en degrés ; en radians, on écrit $\frac{\pi}{3}$.

Correction

Chaque angle d'un triangle équilatéral mesure $60°$, soit $\frac{\pi}{3}\ \text{rad}$.

Le triangle est de sens direct : de $[AB)$ vers $[AC)$, on tourne dans le sens direct. On tourne donc de $\frac{\pi}{3}$.

C'est la mesure principale de l'angle orienté de vecteurs $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, défini ci-dessous.

Définition : Angle orienté de deux vecteurs non nuls

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et O un point du plan. On construit les points A et B tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$.

L'**angle orienté** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $(\vec{u}, \vec{v})$, est l'angle orienté de demi-droites $([OA), [OB))$. Ses mesures et sa mesure principale sont celles de $([OA), [OB))$; on écrit $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \theta\ [2\pi]$ lorsque θ est une mesure de $(\vec{u}, \vec{v})$.

On admet que cet angle orienté ne dépend pas du point O choisi. Pour trois points A, B, C avec $B \neq A$ et $C \neq A$, on note $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ l'angle orienté des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Exemple : les trois angles du triangle

Dans le triangle équilatéral ABC de sens direct, l'angle en A mesure $\frac{\pi}{3}$, et l'on tourne de $[AB)$ vers $[AC)$ dans le sens direct. D'après la définition de l'angle orienté de deux vecteurs :

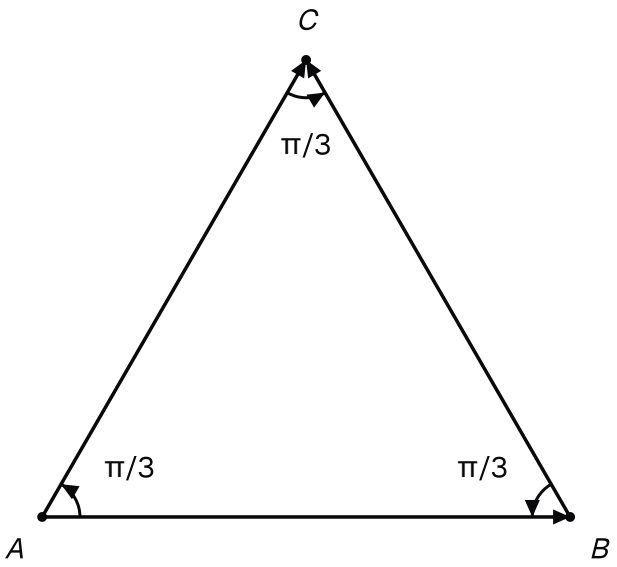
$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi].$$

De même, en B puis en C :

$$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi],$$

$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi].$$

Fais la figure sur ton cahier.



Le triangle équilatéral ABC de sens direct : en chaque sommet, l'angle orienté de l'exemple mesure π/3.

La relation de Chasles pour les vecteurs

Rappel du chapitre « Calcul vectoriel dans le plan ». Le vecteur $-\vec{u}$ a la même direction que $\vec{u}$ et le sens contraire. Deux vecteurs sont colinéaires si l'un s'écrit $\vec{v} = k\,\vec{u}$. Si $k > 0$ et $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, le point B tel que $\overrightarrow{OB} = k\,\vec{u}$ est sur la demi-droite $[OA)$.

Pourquoi est-ce vrai ? Un angle de vecteurs est un angle de demi-droites de même origine : la relation de Chasles se transporte. Et $-\vec{u}$ porte la demi-droite opposée, à un demi-tour.

Propriété : Relation de Chasles pour les vecteurs

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls. Alors

$$(\vec{u},\vec{v}) + (\vec{v},\vec{w}) \equiv (\vec{u},\vec{w}) \ [2\pi].$$

De plus, $(\vec{v},\vec{u}) \equiv -(\vec{u},\vec{v}) \ [2\pi]$ et $(\vec{u},\vec{u}) \equiv 0 \ [2\pi]$.

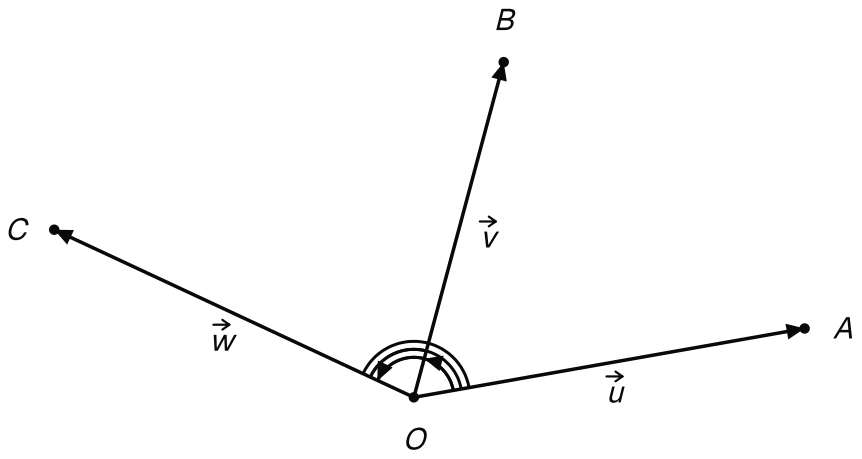
Démonstration

Étape 1. On fixe un point O et on construit les points A, B et C tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$. D'après la définition de l'angle orienté de deux vecteurs, les angles $(\vec{u},\vec{v})$, $(\vec{v},\vec{w})$ et $(\vec{u},\vec{w})$ sont les angles orientés de demi-droites $([OA),[OB))$, $([OB),[OC))$ et $([OA),[OC))$.

Étape 2. Ces trois demi-droites ont la même origine O. La relation de Chasles pour les demi-droites donne donc la relation annoncée, ainsi que $([OB),[OA)) \equiv -([OA),[OB))\ [2\pi]$ et $([OA),[OA)) \equiv 0\ [2\pi]$, c'est-à-dire les deux dernières égalités.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On construit les trois vecteurs à partir d'un **même point** O. Les trois angles de vecteurs deviennent des angles de demi-droites de même origine O. La relation de Chasles pour les demi-droites s'applique alors telle quelle.



Les vecteurs u, v et w construits à partir du même point O : trois demi-droites [OA), [OB) et [OC) de même origine, et les trois angles orientés de la relation de Chasles.

Vérifie : Le choix d'un même point

Dans la preuve, pourquoi construit-on les points A, B et C à partir d'un même point O ?

A. Pour que les trois vecteurs aient la même longueur.

Faux.

Les longueurs ne changent pas : OA est la norme de $\vec{u}$.

B. Pour que A, B et C forment un triangle.

Faux.

La preuve n'emploie aucun triangle.

C. Pour avoir trois demi-droites de même origine.

Juste.

Juste : la relation de Chasles pour les demi-droites exige une origine commune.

D. Pour que A, B et C soient sur le cercle trigonométrique.

Faux.
Rien n'impose cela : ce sont les demi-droites qui coupent le cercle.

Correction
La relation de Chasles pour les demi-droites porte sur trois demi-droites de **même origine**. En construisant $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$, on obtient $[OA)$, $[OB)$ et $[OC)$, toutes d'origine O.

Vecteurs opposés

Propriété : Angles orientés et vecteurs opposés

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et k un réel strictement positif. Alors :

- $(\vec{u}, -\vec{u}) \equiv \pi \ [2\pi]$;
- $(-\vec{u}, \vec{v}) \equiv (\vec{u}, \vec{v}) + \pi \ [2\pi]$ et $(\vec{u}, -\vec{v}) \equiv (\vec{u}, \vec{v}) + \pi \ [2\pi]$;
- $(-\vec{u}, -\vec{v}) \equiv (\vec{u}, \vec{v}) \ [2\pi]$;
- $(k\,\vec{u}, \vec{v}) \equiv (\vec{u}, \vec{v}) \ [2\pi]$ et $(\vec{u}, k\,\vec{v}) \equiv (\vec{u}, \vec{v}) \ [2\pi]$.

Démonstration

Étape 1. On fixe O et on construit A et A' tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OA'} = -\vec{u}$. Les demi-droites $[OA)$ et $[OA')$ sont opposées : elles coupent un cercle trigonométrique de centre O en deux points diamétralement opposés, séparés par un demi-cercle de longueur π. Si α est une abscisse curviligne du premier, $\alpha + \pi$ en est une du second ; d'après la définition de la mesure, $(\vec{u}, -\vec{u}) \equiv \pi \ [2\pi]$.

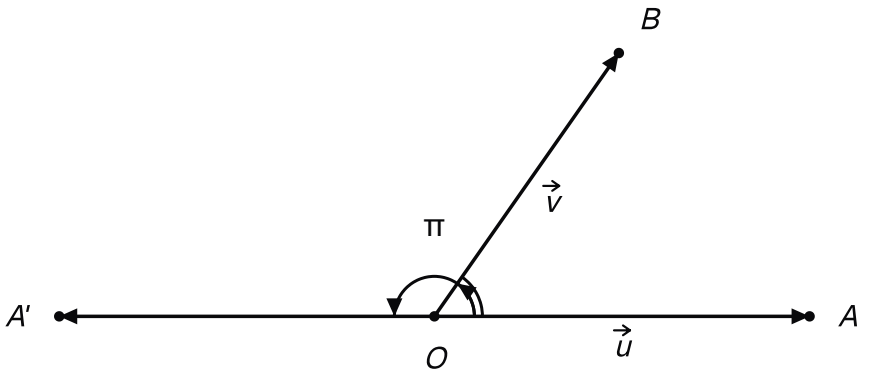
Étape 2. D'après la relation de Chasles pour les vecteurs, $(-\vec{u}, \vec{v}) \equiv (-\vec{u}, \vec{u}) + (\vec{u}, \vec{v}) \ [2\pi]$, et l'étape 1, appliquée au vecteur $-\vec{u}$, donne $(-\vec{u}, \vec{u}) \equiv \pi \ [2\pi]$. De même, $(\vec{u}, -\vec{v}) \equiv (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, -\vec{v}) \equiv (\vec{u}, \vec{v}) + \pi \ [2\pi]$.

Étape 3. Ces deux égalités donnent $(-\vec{u}, -\vec{v}) \equiv (\vec{u}, \vec{v}) + 2\pi \equiv (\vec{u}, \vec{v}) \ [2\pi]$. Enfin, $k\,\vec{u}$ et $\vec{u}$ définissent la même demi-droite d'origine O, car $k > 0$ (chapitre « Calcul vectoriel dans le plan ») : les angles ont les mêmes mesures.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Le vecteur $-\vec{u}$ porte la demi-droite opposée : sur le cercle, le point a fait un demi-tour, soit π.

Tout le reste vient de la relation de Chasles : remplacer un vecteur par son opposé **ajoute** π à la mesure. Multiplier un vecteur par $k > 0$ ne change pas sa demi-droite, donc ne change pas l'angle.



Le vecteur u, de O vers A, et son opposé, de O vers A' : ils portent deux demi-droites opposées, à un demi-tour l'une de l'autre, soit π.

Exemple : un angle extérieur du triangle

Dans le triangle équilatéral ABC de sens direct, cherchons $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$.

Vecteur opposé. Comme $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$, la propriété des vecteurs opposés donne :

$$\begin{aligned}&(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})\\ &\equiv (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) + \pi \ [2\pi].\end{aligned}$$

Ordre inversé. D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) &\equiv -(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})\\ &\equiv -\frac{\pi}{3} \ [2\pi].\end{aligned}$$

Conclusion. Comme $-\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3}$:

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) \equiv \frac{2\pi}{3} \ [2\pi].$$

Deux opposés à la fois. Enfin, $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC}$, donc :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CA}) &\equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\\ &\equiv \frac{\pi}{3} \ [2\pi].\end{aligned}$$

Changer les deux vecteurs en leurs opposés ne change rien.

Angles et colinéarité

Propriété : Angles orientés et colinéarité

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

- $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv 0\ [2\pi]$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens ;
- $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \pi\ [2\pi]$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraires.

En particulier, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si 0 ou π est une mesure de $(\vec{u}, \vec{v})$.

Démonstration

Étape 1. Avec $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$, les demi-droites $[OA)$ et $[OB)$ coupent un cercle trigonométrique de centre O, chacune en un seul point, M et N, d'abscisses curvilignes α et β.

Étape 2. $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv 0\ [2\pi]$ équivaut à $\beta \equiv \alpha\ [2\pi]$, donc à $M = N$ (abscisses curvilignes d'un même point), donc à $[OA) = [OB)$, c'est-à-dire, d'après le chapitre « Calcul vectoriel dans le plan », à $\vec{v} = k\,\vec{u}$ avec $k > 0$.

Étape 3. D'après la propriété des angles orientés et des vecteurs opposés, $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \pi\ [2\pi]$ équivaut à $(\vec{u}, -\vec{v}) \equiv 0\ [2\pi]$: d'après l'étape 2, $\vec{u}$ et $-\vec{v}$ sont colinéaires de même sens, c'est-à-dire $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires de sens contraires.

Étape 4. Deux vecteurs non nuls colinéaires sont de même sens ou de sens contraires : d'où la dernière équivalence.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Le cas de la mesure 0 se lit sur le cercle : même point, donc même demi-droite. Le cas π se ramène au cas 0 en remplaçant $\vec{v}$ par $-\vec{v}$, grâce à la propriété des vecteurs opposés.

Enfin, deux vecteurs colinéaires non nuls sont de même sens ou de sens contraires.

Retiens l'usage : une mesure 0 ou π prouve une colinéarité. Par exemple, $(\vec{u}, 2\,\vec{u}) \equiv 0\ [2\pi]$ et $(\vec{u}, -3\,\vec{u}) \equiv \pi\ [2\pi]$.

Vérifie : Ramener un cas à l'autre

Dans l'étape 3 de la preuve, par quel vecteur remplace-t-on $\vec{v}$ pour ramener le cas π au cas 0 ?

A. Par $2\,\vec{v}$.

Faux.
Multiplier par $2 > 0$ ne change pas la mesure : on resterait dans le cas π.

B. Par $-\vec{v}$.

Juste.
Juste : changer $\vec{v}$ en son opposé ajoute π, et $\pi + \pi \equiv 0\ [2\pi]$.

C. Par $\vec{v} + \vec{u}$.

Faux.
La preuve n'additionne aucun vecteur.

D. Par $\frac{1}{2}\,\vec{u}$.

Faux.

On obtiendrait l'angle $(\vec{u},\vec{u})$, qui ne dit rien sur $\vec{v}$.

Correction

D'après la propriété des vecteurs opposés :

$$\begin{aligned}&(\vec{u},-\vec{v})\\&\equiv(\vec{u},\vec{v})+\pi\ [2\pi].\end{aligned}$$

Donc $(\vec{u},\vec{v})\equiv\pi\ [2\pi]$ équivaut à $(\vec{u},-\vec{v})\equiv 0\ [2\pi]$. L'étape 2 s'applique alors aux vecteurs $\vec{u}$ et $-\vec{v}$.

La méthode et un piège

Méthode : calculer une mesure d'angle orienté

1. **Décompose** l'angle par la relation de Chasles, pour faire apparaître des angles connus.
2. **Remplace** un vecteur par son opposé en ajoutant π ; échange l'ordre des vecteurs en changeant le signe de la mesure.
3. **Additionne** les mesures obtenues.
4. **Ramène** le résultat dans $]-\pi,\pi]$ en ajoutant un multiple de 2π : c'est la mesure principale.

Attention : l'ordre des vecteurs compte

✗ « $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB})\equiv\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$, puisque le triangle ABC est équilatéral. »

✓ De $[AC)$ vers $[AB)$, on tourne dans le sens indirect. D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB})&\equiv-(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\\&\equiv-\frac{\pi}{3}\ [2\pi].\end{aligned}$$

L'angle géométrique est le même, mais pas l'angle orienté.

À toi, puis le coin devoir

À toi : Deux angles du triangle

Dans le triangle équilatéral ABC de sens direct, détermine la mesure principale de $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BA})$, puis celle de $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CB})$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Applique la méthode : relation de Chasles, puis vecteurs opposés.

Indice 2

$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}) \equiv (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA})\ [2\pi]$, et $\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BC}$.

Indice 3

Point délicat : l'ordre des vecteurs compte, $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$ n'est pas $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Pour le second angle, ramène le résultat dans $]-\pi, \pi]$.

Réponse

Premier angle. D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}) &\equiv (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) \\ &\quad + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA})\ [2\pi].\end{aligned}$$

Or $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) \equiv -\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$, et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}) \equiv \pi\ [2\pi]$ d'après la propriété des vecteurs opposés. La mesure principale est donc

$$-\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3}.$$

Second angle. D'après l'exemple de l'angle extérieur, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) \equiv \dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$. Comme $\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BC}$, d'après la propriété des vecteurs opposés :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}) &\equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + \pi \\ &\equiv \frac{2\pi}{3} + \pi \\ &= \frac{5\pi}{3}\ [2\pi].\end{aligned}$$

On retire 2π : la mesure principale est $-\dfrac{\pi}{3}$.

Conclusion. Les mesures principales de $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA})$ et de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB})$ sont $\dfrac{2\pi}{3}$ et $-\dfrac{\pi}{3}$.

Remarque : Coin devoir : rédiger un calcul d'angle orienté

En devoir, chaque égalité cite sa propriété, par une phrase du type « d'après la relation de Chasles », et la conclusion donne la mesure principale. Voici la rédaction attendue pour $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB})$.

D'après la relation de Chasles,

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}) &\equiv (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AC}) \\ &\quad + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})\ [2\pi].\end{aligned}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont opposés, donc $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AC}) \equiv \pi\ [2\pi]$.

D'après la relation de Chasles,

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) &\equiv -(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \\ &\equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi].\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}) &\equiv \pi - \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{2\pi}{3}\ [2\pi].\end{aligned}$$

Vérifie enfin que $\frac{2\pi}{3}$ est dans $]-\pi, \pi]$: c'est la mesure principale.

Cosinus et sinus d'un réel

Lire les coordonnées d'un point

Rappel du collège. Dans un triangle OHM rectangle en H, le cosinus de l'angle aigu en O vaut $\frac{OH}{OM}$ et son sinus vaut $\frac{HM}{OM}$. Ces rapports n'ont de sens que pour un angle aigu.

Le cercle trigonométrique va plus loin : à chaque réel x, il associe un point M, puis ses deux coordonnées.

Devine : Les coordonnées d'un point du cercle

Le point M d'abscisse curviligne π est le point I'. Quelles sont ses coordonnées dans le repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$?

A. $(1, 0)$

Faux.

Ce sont les coordonnées de I, le point d'abscisse curviligne 0.

B. $(0, -1)$

Faux.

Ce sont les coordonnées de J', d'abscisse curviligne $-\frac{\pi}{2}$.

C. $(\pi, 0)$

Faux.

Le cercle a pour rayon 1 : aucune coordonnée ne dépasse 1 en valeur absolue.

D. $(-1, 0)$

Juste.

Juste : I' est diamétralement opposé à $I(1, 0)$.

Correction

Le point I' est diamétralement opposé à I sur le cercle de centre O et de rayon 1. Comme I a pour coordonnées $(1, 0)$, le point I' a pour coordonnées $(-1, 0)$.

Cosinus, sinus et tangente

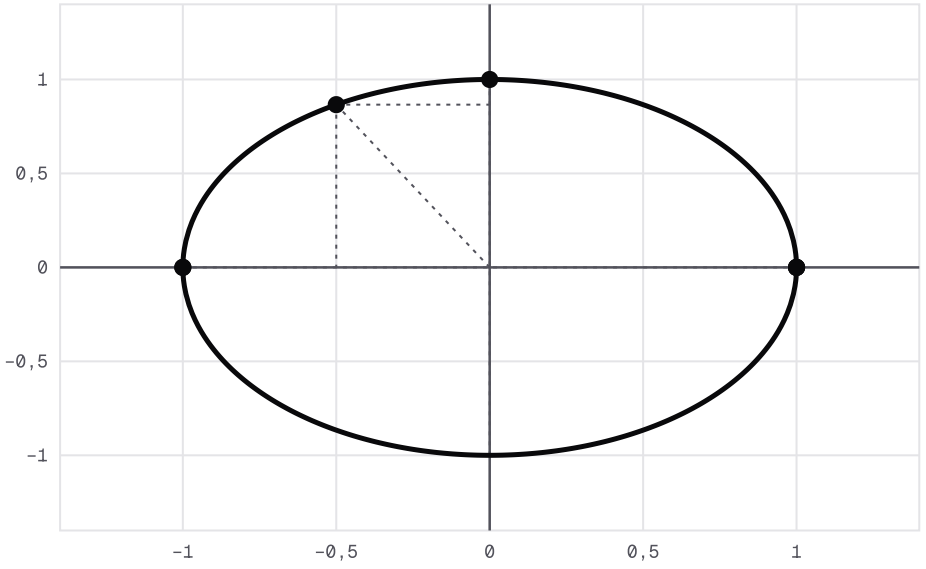
Définition : Cosinus, sinus et tangente d'un réel

Soit x un réel et M le point du cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ d'abscisse curviligne x. Dans le repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$:

- le **cosinus** de x, noté $\cos x$, est l'abscisse du point M ;
- le **sinus** de x, noté $\sin x$, est l'ordonnée du point M.

Ainsi $M(\cos x, \sin x)$. Lorsque $\cos x \neq 0$, la **tangente** de x est le réel $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

Les réels $\cos x$, $\sin x$ et $\tan x$ s'appellent les **lignes trigonométriques** de x.



Le point M d'abscisse curviligne x, avec x entre π/2 et π : ses projections sur les axes donnent cos x et sin x.

Exemple : lire des lignes sur le cercle

- $I(1,0)$ donne $\cos 0 = 1$ et $\sin 0 = 0$; $J(0,1)$ donne $\cos \dfrac{\pi}{2} = 0$ et $\sin \dfrac{\pi}{2} = 1$.
- $I'(-1,0)$ donne $\cos \pi = -1$ et $\sin \pi = 0$, donc $\tan \pi = \dfrac{0}{-1} = 0$.
- Comme $\cos \dfrac{\pi}{2} = 0$, la tangente de $\dfrac{\pi}{2}$ n'est pas définie.
- Pour $x \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$, le point M est sur le quart de cercle de J à I', comme sur la figure : $\cos x < 0$ et $\sin x > 0$.

La relation fondamentale

Le point M est sur le cercle de centre O et de rayon 1 : $OM = 1$.

Pourquoi est-ce vrai ? Dans un repère orthonormé, la distance OM se calcule avec les coordonnées de M, comme au collège. Ces coordonnées sont $\cos x$ et $\sin x$.

Propriété : Relation fondamentale

Pour tout réel x,

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

où $\cos^2 x$ désigne $(\cos x)^2$ et $\sin^2 x$ désigne $(\sin x)^2$.

Démonstration

Étape 1. Soit M le point du cercle trigonométrique d'abscisse curviligne x. D'après la définition du cosinus et du sinus, $M(\cos x, \sin x)$ dans le repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.

Étape 2. Ce repère est orthonormé : d'après la formule de la distance de deux points (rappel du collège), $OM^2 = (\cos x - 0)^2 + (\sin x - 0)^2 = \cos^2 x + \sin^2 x$.

Étape 3. Or M appartient au cercle de centre O et de rayon 1, donc $OM = 1$. Par conséquent, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Une seule idée : écrire OM^2 avec les coordonnées de M, puis utiliser $OM = 1$. Le second membre 1 vient du rayon du cercle trigonométrique.

Vérifie : Un outil du collège

Quel acquis du collège la preuve de la relation fondamentale emploie-t-elle ?

A. La distance de deux points dans un repère.

Juste.

Juste : $OM^2 = (\cos x - 0)^2 + (\sin x - 0)^2$.

B. Le théorème de Thalès dans un triangle.

Faux.

La preuve ne compare aucun rapport de longueurs de triangles emboîtés.

C. La somme des angles d'un triangle.

Faux.

La preuve ne calcule aucun angle.

D. Les symétries par rapport aux axes.

Faux.

Les symétries serviront aux angles associés, pas ici.

Correction

La preuve écrit la distance de $O(0,0)$ à $M(\cos x, \sin x)$ dans le repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$:

$$OM^2 = \cos^2 x + \sin^2 x.$$

Comme $OM = 1$, la somme vaut 1.

Encadrement et tours complets

Propriété : Encadrement et tours complets

Pour tout réel x et tout entier relatif k :

- $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$;
- $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$.

Démonstration

Étape 1. D'après la relation fondamentale, $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Comme $\sin^2 x \geq 0$, on obtient $\cos^2 x \leq 1$. D'après les propriétés de l'ordre (chapitre « L'ordre dans $\mathbb{R}$ »), un réel dont le carré est inférieur ou égal à 1 est compris entre -1 et 1 : $-1 \leq \cos x \leq 1$. Le même raisonnement, avec $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, donne $-1 \leq \sin x \leq 1$.

Étape 2. D'après la propriété des abscisses curvilignes d'un même point, x et $x + 2k\pi$ sont des abscisses curvilignes du même point M. Les cosinus et les sinus de ces deux réels sont les coordonnées de ce même point : ils sont égaux.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

L'encadrement vient de la relation fondamentale : un carré qui complète un autre carré positif jusqu'à 1 ne dépasse pas 1.

Les égalités viennent d'un tour complet : x et $x + 2k\pi$ repèrent le même point M, donc les mêmes coordonnées.

Exemple : ce que permettent ces deux propriétés

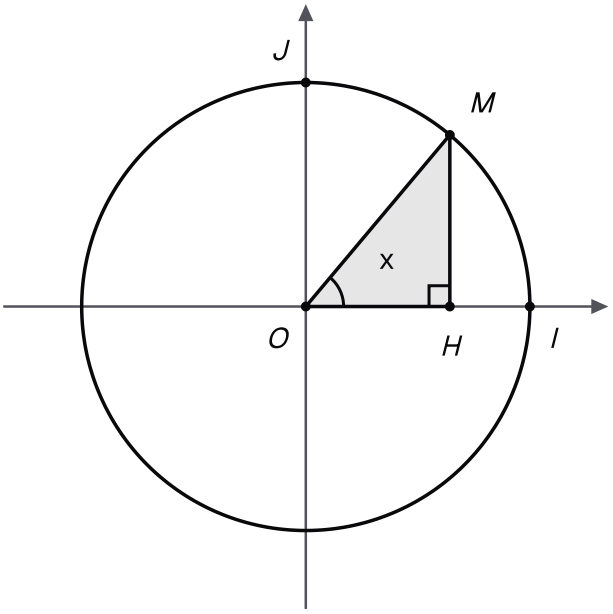
- D'après la relation fondamentale, aucun réel n'a pour cosinus et pour sinus $\frac{1}{2}$: $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \neq 1$.

- Aucun réel x ne vérifie $\cos x = \dfrac{6}{5}$, car $\dfrac{6}{5} > 1$.
- $\dfrac{7\pi}{2} = -\dfrac{\pi}{2} + 4\pi$. D'après les tours complets, $\sin\dfrac{7\pi}{2} = \sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$, l'ordonnée de J'.
- **L'hypothèse compte** : k est entier. Ajouter π ne conserve pas le cosinus : $\cos 0 = 1$, mais $\cos\pi = -1$.

Le lien avec le collège

Pour $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, le point M est sur le quart de cercle de I à J. Soit H le pied de la perpendiculaire à (OI) passant par M. Le triangle OHM est rectangle en H.

Pourquoi est-ce vrai ? Son hypoténuse OM vaut 1 : les rapports du collège deviennent les coordonnées de M.



Pour x entre 0 et π/2, le point M du quart de cercle de I à J et son projeté H sur (OI) : le triangle OHM est rectangle en H, d'hypoténuse OM de longueur 1.

Propriété : Lien avec la trigonométrie du collège

Soit x un réel tel que $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, et M le point du cercle trigonométrique d'abscisse curviligne x. Alors l'angle géométrique $\widehat{IOM}$ est aigu et mesure x radians, et $\cos x$, $\sin x$ et $\tan x$ sont le cosinus, le sinus et la tangente de cet angle aigu, au sens du collège.

Démonstration

Étape 1. L'arc de I à M, dans le sens direct, a pour longueur x sur un cercle de rayon 1. D'après la définition du radian (l'angle au centre est proportionnel à l'arc), $\widehat{IOM}$ mesure x radians ; comme $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, il est aigu.

Étape 2. Le point M est sur le quart de cercle de I à J : ses coordonnées $\cos x$ et $\sin x$ sont strictement positives. Soit H le pied de la perpendiculaire à (OI) passant par M : $OH = \cos x$ et $HM = \sin x$.

Étape 3. Comme $\cos x > 0$, H est sur $[OI)$, donc $\widehat{HOM} = \widehat{IOM}$. Le triangle OHM est rectangle en H, d'hypoténuse $OM = 1$. D'après la trigonométrie du triangle rectangle (rappel du collège), le cosinus de $\widehat{IOM}$ vaut $\dfrac{OH}{OM} = \cos x$, son sinus $\dfrac{HM}{OM} = \sin x$ et sa tangente $\dfrac{HM}{OH} = \tan x$.

À retenir **: Ce qu'il faut retenir de la preuve**

Deux faits se combinent. Un arc de longueur x sur un cercle de rayon 1 donne un angle au centre de x radians.

L'hypoténuse OM vaut 1 : les rapports $\dfrac{OH}{OM}$ et $\dfrac{HM}{OM}$ se réduisent à OH et HM, les coordonnées de M.

Vérifie : Un rapport devenu une longueur

Dans la preuve, pourquoi le cosinus de l'angle aigu $\widehat{IOM}$, au sens du collège, est-il égal à OH ?

A. Parce que l'angle $\widehat{IOM}$ est aigu.

Faux.

C'est nécessaire pour le triangle rectangle, mais le rapport vaut toujours $\dfrac{OH}{OM}$.

B. Parce que l'angle mesure x radians.

Faux.

La mesure en radians ne change pas le rapport $\dfrac{OH}{OM}$.

C. Parce que l'hypoténuse OM vaut 1.

Juste.

Juste : $\dfrac{OH}{OM} = \dfrac{OH}{1} = OH$.

D. Parce que le triangle OHM est isocèle.

Faux.

Il n'est isocèle que pour $x = \dfrac{\pi}{4}$.

Correction

Au sens du collège, le cosinus de l'angle aigu $\widehat{IOM}$ est $\dfrac{OH}{OM}$. Le point M est sur le cercle trigonométrique, donc $OM = 1$, et le rapport vaut OH.

Or $OH = \cos x$, puisque M est sur le quart de cercle de I à J.

Exemple **: quand l'hypothèse manque**

- Comme $\pi > 3$, on a $\frac{\pi}{2} > 1{,}5$: le réel 1 est dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Pour $x = 1$, l'angle $\widehat{IOM}$ est aigu et mesure $1\ \text{rad}$. D'après le lien avec la trigonométrie du collège, $\cos 1$ est le cosinus de cet angle aigu.
- Pour $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, comme sur la figure, l'angle $\widehat{IOM}$ est obtus : le cosinus du collège n'existe pas. Pourtant $\cos x$ existe. Le point M est sur le quart de cercle de J à I', donc $\cos x < 0$.

Tangente et calculs avec les relations

Un quotient qui peut manquer

En clair. La tangente est un quotient : $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$. Elle n'existe que si $\cos x \neq 0$.

Pourquoi est-ce vrai ? Un cosinus nul place M sur l'axe des ordonnées, donc en J ou en J'. Et en divisant la relation fondamentale par $\cos^2 x$, on relie la tangente au cosinus.

Devine : Où la tangente manque-t-elle ?

Pour quels réels x de l'intervalle $]-\pi, \pi]$ la tangente n'est-elle pas définie ?

A. Pour 0 et π.

Faux.

En 0 et en π, c'est le sinus qui est nul ; la tangente vaut 0.

B. Pour $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.

Juste.

Juste : ce sont les abscisses principales de J' et de J.

C. Pour $\frac{\pi}{2}$ seulement.

Faux.

Le cosinus est nul aussi en J', d'abscisse $-\frac{\pi}{2}$.

D. Pour aucun : elle existe toujours.

Faux.

Un quotient par 0 n'existe pas.

Correction

La tangente manque quand $\cos x = 0$, c'est-à-dire quand M est sur l'axe des ordonnées : $M = J$ ou $M = J'$.

Dans $]-\pi, \pi]$, leurs abscisses curvilignes sont $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$.

La relation de la tangente

Propriété : Tangente : réels où elle existe et relation

- $\cos x = 0$ si et seulement si $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. La tangente est donc définie pour tout réel x différent de $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.
- Pour tout réel x tel que $\cos x \neq 0$,

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Démonstration

Étape 1. Si $\cos x = 0$, la relation fondamentale donne $\sin^2 x = 1$, donc $\sin x = 1$ ou $\sin x = -1$: le point M d'abscisse curviligne x est J ou J', et réciproquement. Or $\dfrac{\pi}{2}$ est une abscisse curviligne de J et $-\dfrac{\pi}{2}$ une abscisse curviligne de J'. D'après la propriété des abscisses curvilignes d'un même point, $\cos x = 0$ équivaut à $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi = \dfrac{\pi}{2} + (2k-1)\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Soit $n \in \mathbb{Z}$: selon que n est pair ($n = 2k$) ou impair ($n = 2k-1$), le réel $\dfrac{\pi}{2} + n\pi$ appartient à l'une ou à l'autre famille : $\cos x = 0$ équivaut à $x = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$ avec $n \in \mathbb{Z}$.

Étape 2. Si $\cos x \neq 0$, d'après la définition de la tangente puis la relation fondamentale,

$$1 + \tan^2 x = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Deux idées. Un cosinus nul se lit sur le cercle : M est en J ou en J', à un demi-tour l'un de l'autre, d'où les réels $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

Ensuite, on réduit $1 + \tan^2 x$ au même dénominateur, et l'on reconnaît la relation fondamentale.

Vérifie : Un demi-tour, pas un tour

Dans la preuve, pourquoi les réels où $\cos x = 0$ s'écrivent-ils $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$, et non $\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$?

A. Parce que la tangente change de signe à chaque demi-tour.
Faux.
La preuve ne parle pas du signe de la tangente.

B. Parce que $\sin x$ vaut 1 en ces réels.
Faux.
En J', le sinus vaut -1.

C. Parce que $\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ est faux pour k négatif.
Faux.
Cette écriture est juste, mais elle ne donne que le point J.

D. Parce que deux points du cercle, J et J', ont une abscisse nulle.

Juste.
Juste : ils sont à un demi-tour l'un de l'autre.

Correction
Les réels $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ repèrent seulement le point J. Le point J', diamétralement opposé, est repéré par les réels $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

Ensemble, ces réels s'écrivent $\frac{\pi}{2} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Exemple : la relation et son hypothèse

Avec $x = \pi$. On a $\tan \pi = 0$, donc $1 + \tan^2 \pi = 1$. Et

$$\frac{1}{\cos^2 \pi} = \frac{1}{(-1)^2} = 1 :$$

la relation est vérifiée.

L'hypothèse compte. $\frac{7\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 3\pi$: d'après la propriété de la tangente, $\cos \frac{7\pi}{2} = 0$. La tangente de $\frac{7\pi}{2}$ n'existe pas, et la relation ne s'écrit pas.

Une ligne à partir d'une autre

Attention : une tangente qui n'existe pas

✗ « $\tan \frac{\pi}{2} = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\cos \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{0}$. »

✓ Le quotient par 0 n'existe pas : écrire $\tan \frac{\pi}{2}$ n'a aucun sens.

Avant d'écrire $\tan x$, vérifie que x n'est pas de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$.

Méthode : calculer une ligne à partir d'une autre

1. **Écris** la relation fondamentale, ou la relation $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ si la tangente est donnée.
2. **Déduis-en** le carré de l'autre ligne.
3. **Fixe le signe** : nomme l'intervalle de x, puis le quart de cercle où se trouve M.
4. **Termine** par la tangente, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, si elle est demandée.

Exemple : un cosinus donné

Soit $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ tel que $\cos x = \frac{1}{3}$.

Carré du sinus. D'après la relation fondamentale,

$$\sin^2 x = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}.$$

Donc $\sin x = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ ou $\sin x = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Signe. Comme $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, 0\right[$, le point M est sur le quart de cercle de J' à I : $\sin x < 0$. Donc $\sin x = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Tangente. D'après la définition de la tangente,

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = -2\sqrt{2}.$$

Deux pièges, une tangente, puis à toi

Attention : un cosinus ne donne pas le signe du sinus

✗ « $\cos x = \dfrac{1}{4}$, donc $\sin x = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$. »

✓ D'après la relation fondamentale, $\sin^2 x = \dfrac{15}{16}$: $\sin x = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$ ou $\sin x = -\dfrac{\sqrt{15}}{4}$. Sans l'intervalle de x, on ne peut pas choisir.

Si $x \in]-\pi, 0[$, le point M est sous l'axe des abscisses, et $\sin x = -\dfrac{\sqrt{15}}{4}$.

Attention : l'écriture des carrés

✗ « $\cos^2 \pi = \cos\left(\pi^2\right)$. »

✓ $\cos^2 \pi$ désigne $(\cos \pi)^2 = (-1)^2 = 1$. Le nombre $\cos\left(\pi^2\right)$ est le cosinus du réel π^2 : c'est un tout autre nombre.

De même, $\sin^2 x$ s'écrit avec l'exposant collé au mot « sin ».

Exemple : une tangente donnée

Soit $x \in \left]-\pi, -\dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan x = 2$.

Carré du cosinus. D'après la relation de la tangente,

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + 4 = 5,$$

donc $\cos^2 x = \dfrac{1}{5}$.

Signe. Comme $x \in \left]-\pi, -\dfrac{\pi}{2}\right[$, le point M est sur le quart de cercle de I' à J' : $\cos x < 0$. Donc

$$\cos x = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Sinus. Enfin, d'après la définition de la tangente,

$$\begin{aligned}\sin x &= \tan x \times \cos x \\ &= -\frac{2\sqrt{5}}{5}.\end{aligned}$$

À toi : Un sinus donné

Soit $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ tel que $\sin x = \frac{3}{4}$. Calcule $\cos x$, puis $\tan x$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Applique la relation fondamentale pour obtenir $\cos^2 x$.

Indice 2

Tu dois trouver une fraction de dénominateur 16.

Indice 3

Point délicat : le signe. Nomme le quart de cercle où se trouve M ; écris ensuite la tangente sans racine au dénominateur.

Réponse

Carré du cosinus. D'après la relation fondamentale,

$$\cos^2 x = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}.$$

Signe. Comme $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, le point M est sur le quart de cercle de J à I' : $\cos x < 0$. Donc $\cos x = -\frac{\sqrt{7}}{4}$.

Tangente. D'après la définition de la tangente :

$$\begin{aligned}\tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} \\ &= \frac{3}{4} \times \left(-\frac{4}{\sqrt{7}}\right) \\ &= -\frac{3}{\sqrt{7}} = -\frac{3\sqrt{7}}{7}.\end{aligned}$$

Conclusion. On obtient $\cos x = -\frac{\sqrt{7}}{4}$ et $\tan x = -\frac{3\sqrt{7}}{7}$.

Angles usuels, angles orientés et calculatrice

Des figures simples

En clair. Certains points du cercle se repèrent par une figure simple. Fais-la sur ton cahier.

Pour $x = \frac{\pi}{4}$, le point M est au milieu du quart de cercle de I à J : ses deux coordonnées sont égales.
Pour $x = \frac{\pi}{3}$, le triangle OIM a deux côtés de longueur 1 et un angle de $60°$ en O.

Devine : Un triangle dans le cercle

Pour $x = \frac{\pi}{3}$, quelle est la nature du triangle OIM ?

A. Équilatéral.

Juste.

Juste : isocèle en O avec un angle de $60°$, il a ses trois angles égaux.

B. Rectangle en O.

Faux.

L'angle en O mesure $60°$, pas $90°$.

C. Isocèle en O, sans plus.

Faux.

Il est bien isocèle, mais l'angle de $60°$ en dit plus.

D. Rectangle et isocèle.

Faux.

Ce serait le cas pour un angle de $90°$ en O.

Correction

On a $OI = OM = 1$: le triangle est isocèle en O. Ses angles en I et en M sont égaux, et leur somme vaut $180° - 60° = 120°$.

Chacun mesure $60°$: le triangle est équilatéral. Donc $IM = 1$.

Les valeurs à connaître

Propriété : Lignes trigonométriques des angles usuels

- $\cos 0 = 1, \sin 0 = 0$ et $\tan 0 = 0$;
- $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ et $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$;
- $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\tan \frac{\pi}{4} = 1$;
- $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$;
- $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ et $\sin \frac{\pi}{2} = 1$; $\tan \frac{\pi}{2}$ n'est pas défini.

Démonstration

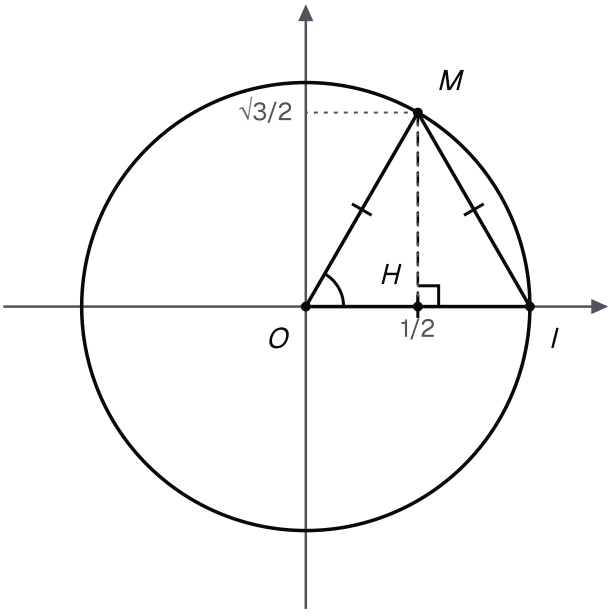
Idée de la preuve. Pour 0 et $\frac{\pi}{2}$, les points sont $I(1,0)$ et $J(0,1)$. Pour $\frac{\pi}{4}$, le point M est sur la bissectrice de l'angle $\widehat{IOJ}$, ce qu'on admet : $\cos\frac{\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{4}>0$, et la relation fondamentale donne $2\cos^2\frac{\pi}{4}=1$. Pour $\frac{\pi}{3}$, le triangle OIM est isocèle en O avec un angle de $60°$: il est équilatéral, et le pied de la hauteur issue de M est le milieu de $[OI]$, d'où $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$. Pour $\frac{\pi}{6}$, le point M et son symétrique M' par rapport à (OI) forment avec O un triangle isocèle d'angle $2\times 30°$ en O, donc équilatéral de côté 1 ; or $MM'=2\sin\frac{\pi}{6}$, d'où $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$. Les autres valeurs viennent de la relation fondamentale, du signe des coordonnées et de la définition de la tangente.

À retenir : des figures, puis du calcul

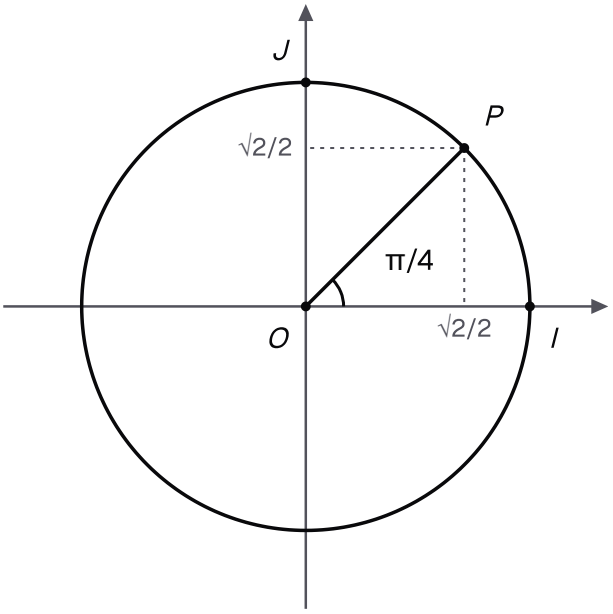
L'idée de la preuve **admet** un fait de géométrie : pour $\frac{\pi}{4}$, le point M est sur la bissectrice de l'angle $\widehat{IOJ}$.

Pour $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{6}$, elle emploie deux propriétés du collège : un triangle isocèle qui a un angle de $60°$ est équilatéral, et sa hauteur tombe au milieu d'un côté. Pour $\frac{\pi}{6}$, ce triangle a pour sommets O, M et le symétrique de M par rapport à l'axe (OI).

Le reste est du calcul. La relation fondamentale donne la seconde ligne. Le signe vient du quart de cercle de I à J, où les deux coordonnées sont positives.



Pour x = π/3, le triangle OIM est équilatéral et sa hauteur issue de M tombe au milieu H de [OI] : on lit cos π/3 = 1/2 et sin π/3 = √3/2.



Pour x = π/4, le point P est sur la bissectrice de l'angle IOJ : ses deux coordonnées sont égales à √2/2.

Angle nul

$$\cos 0 = 1$$
$$\sin 0 = 0$$
$$\tan 0 = 0$$

30 degrés, un douzième de tour

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$
$$\tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

45 degrés, un huitième de tour

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\tan \frac{\pi}{4} = 1$$

60 degrés, un sixième de tour

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$
$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

90 degrés, un quart de tour (tangente non définie)

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0$$
$$\sin \frac{\pi}{2} = 1$$

Exemple : un triangle rectangle du collège

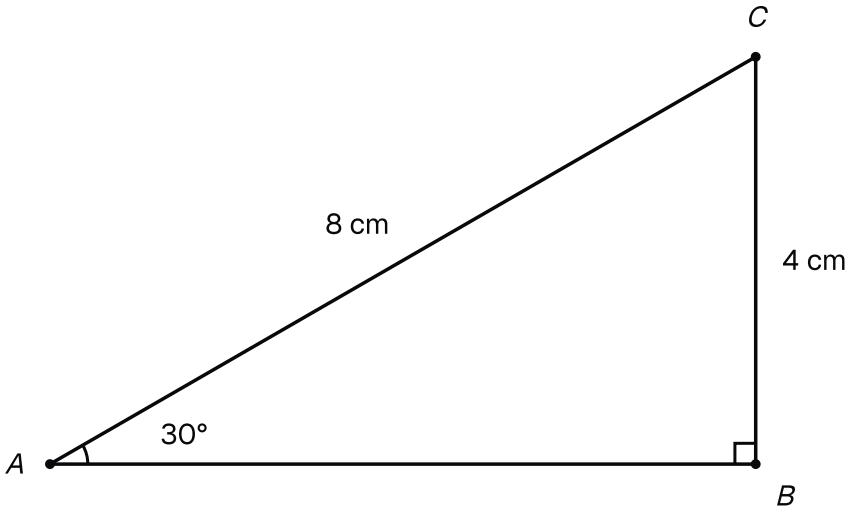
Un triangle ABC est rectangle en B, avec $AC = 8$ cm et un angle de $30°$ en A, soit $\frac{\pi}{6}$ rad.

D'après le lien avec la trigonométrie du collège et les angles usuels, en centimètres :

$$BC = AC \times \sin \frac{\pi}{6}$$
$$= 8 \times \frac{1}{2} = 4.$$

De même, avec le cosinus, $AB = 8 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ cm.

Contrôle par le théorème de Pythagore. $BC^2 + AB^2 = 16 + 48 = 64 = 8^2$.



Le triangle ABC rectangle en B de l'exemple, avec AC = 8 cm et un angle de 30 degrés en A : le côté opposé BC mesure 4 cm.

Lignes d'un angle orienté

Définition : Lignes trigonométriques d'un angle orienté

Soit $(\vec{u}, \vec{v})$ l'angle orienté de deux vecteurs non nuls et θ l'une de ses mesures. On appelle **cosinus**, **sinus** et, si $\cos\theta \neq 0$, **tangente** de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ les réels $\cos\theta$, $\sin\theta$ et $\tan\theta$. On les note $\cos(\vec{u}, \vec{v})$, $\sin(\vec{u}, \vec{v})$ et $\tan(\vec{u}, \vec{v})$.

Ces réels ne dépendent pas de la mesure θ choisie : deux mesures diffèrent d'un multiple entier de 2π, et leurs cosinus, sinus et tangentes sont égaux.

Exemple : les lignes d'un angle du triangle

Dans le triangle équilatéral ABC de sens direct, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

D'après la définition des lignes d'un angle orienté :

$$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},$$

$$\sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

De plus, $\tan(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \sqrt{3}$.

Avec la mesure $\dfrac{7\pi}{3}$ du même angle, on trouve les mêmes lignes, d'après les tours complets.

La calculatrice

Méthode : utiliser la calculatrice

1. **Règle** le mode : degré ou radian, selon l'unité de l'énoncé.
2. **Pour une ligne**, tape la touche cos, sin ou tan, puis la mesure.
3. **Pour un angle**, utilise la touche réciproque. La calculatrice donne une seule mesure : entre $0°$ et $180°$ pour le cosinus, entre $-90°$ et $90°$ pour le sinus et la tangente. Sur la calculatrice, elle est marquée $\cos^{-1}$, $\sin^{-1}$ ou $\tan^{-1}$: ce n'est pas l'inverse $\dfrac{1}{\cos x}$.
4. **Arrondis** à la précision demandée et écris le signe $\approx$.

Exemple : deux angles définis par une ligne

- Un angle aigu α vérifie $\tan\alpha = 2$. En mode degré, la touche réciproque de tan donne $\alpha \approx 63{,}43°$. En mode radian, elle donne $\alpha \approx 1{,}107\ \text{rad}$.
- Pour le cosinus $\dfrac{1}{3}$, la touche réciproque de cos donne $1{,}231\ \text{rad}$ environ, soit $70{,}53°$ environ. C'est la seule mesure entre 0 et π qui convient.

Un piège, puis à toi

Attention : le mode de la calculatrice

✗ « En mode radian, la calculatrice donne $\sin 30 = 0{,}5$. »

✓ En mode radian, elle calcule le sinus de 30 radians : $\sin 30 \approx -0{,}988$. La valeur $0{,}5$ est le sinus de $30°$: elle s'obtient en mode degré.

Vérifie le mode avant chaque calcul.

À toi : À la calculatrice

Donne une valeur approchée à 10^{-3} près de $\cos 1{,}2$, où $1{,}2$ est en radians. Donne ensuite l'angle aigu α tel que $\sin\alpha = 0{,}4$: en degrés à 10^{-2} près, puis en radians à 10^{-3} près. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Pour le premier calcul, règle la calculatrice en mode radian.

Indice 2

Pour l'angle, utilise la touche réciproque de sin.

Indice 3

Point délicat : change de mode entre les deux résultats de l'angle, et arrondis seulement à la fin.

Réponse

- En mode radian, $\cos 1{,}2 \approx 0{,}362$.
- En mode degré, la touche réciproque de sin donne $\alpha \approx 23{,}58°$. En mode radian, elle donne $\alpha \approx 0{,}412\ \text{rad}$. L'angle est bien aigu : il est entre $0°$ et $90°$.

Angles associés

Les symétries du cercle

En clair. Soit M le point d'abscisse curviligne x. Le point d'abscisse $-x$ s'obtient en tournant de la même longueur, dans l'autre sens : c'est le symétrique de M par rapport à l'axe (II').

Le point d'abscisse $\pi + x$ s'obtient après un demi-tour de plus : c'est le symétrique de M par rapport à O.

Une symétrie change le signe d'une coordonnée, ou des deux.

Devine : Le point d'abscisse pi moins x

Pour atteindre le point N d'abscisse curviligne $\pi - x$, on va jusqu'à I', puis on revient de la longueur x. Par rapport à quoi N est-il le symétrique de M ?

A. Par rapport à l'axe (II').

Faux.

C'est le cas du point d'abscisse $-x$.

B. Par rapport au centre O.

Faux.

C'est le cas du point d'abscisse $\pi + x$.

C. Par rapport à l'axe (JJ').

Juste.

Juste : M est à la longueur x de I, et N à la longueur x de I', le long du cercle.

D. Par rapport à la bissectrice de $\widehat{IOJ}$.

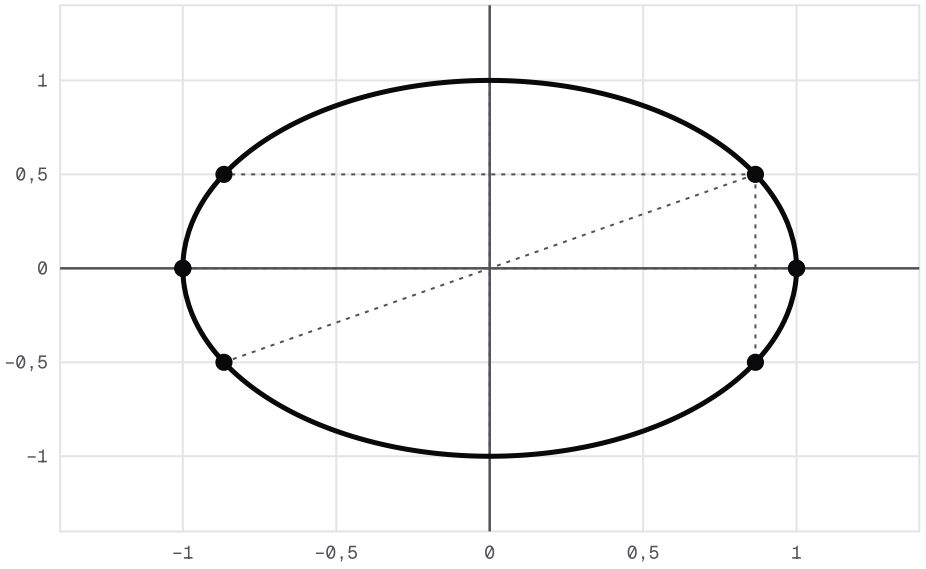
Faux.

Cette symétrie donne le point d'abscisse $\dfrac{\pi}{2} - x$.

Correction

Le point M est à la longueur x de I, et N à la longueur x de I'. Les rôles de I et I' sont échangés.

> Donc N est le symétrique de M par rapport à l'axe (JJ'), l'axe des ordonnées. Seule l'abscisse change de signe.



Le point M d'abscisse curviligne x, avec x entre 0 et π/2, et ses trois symétriques : M1 d'abscisse −x, M2 d'abscisse π − x, M3 d'abscisse π + x.

Opposé, somme ou différence avec pi

Propriété : Angles associés : opposé, somme ou différence avec π

Pour tout réel x :

- $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$;
- $\cos(\pi - x) = -\cos x$ et $\sin(\pi - x) = \sin x$;
- $\cos(\pi + x) = -\cos x$ et $\sin(\pi + x) = -\sin x$.

Pour tout réel x tel que $\cos x \neq 0$: $\tan(-x) = -\tan x$, $\tan(\pi - x) = -\tan x$ et $\tan(\pi + x) = \tan x$.

Démonstration

Idée de la preuve. Soit $M(\cos x, \sin x)$ le point du cercle trigonométrique d'abscisse curviligne x. Le point d'abscisse curviligne $\pi + x$ s'obtient par un demi-tour de plus : comme dans la preuve de la propriété des vecteurs opposés, c'est le point diamétralement opposé à M, son symétrique par rapport à O. On admet les deux constats suivants, lus sur le cercle : le point d'abscisse curviligne $-x$ est le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses, et le point d'abscisse curviligne $\pi - x$

est son symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Les points d'abscisses curvilignes $-x$, $\pi - x$ et $\pi + x$ ont pour coordonnées $(\cos x, -\sin x)$, $(-\cos x, \sin x)$ et $(-\cos x, -\sin x)$: on y lit les cosinus et les sinus. Chaque tangente est le quotient du sinus par le cosinus, $\cos x$ ou $-\cos x$, non nul.

À retenir : une symétrie, un changement de signe

L'idée de la preuve **admet** deux symétries lues sur le cercle, par rapport aux deux axes : elles donnent les points d'abscisses $-x$ et $\pi - x$.

Le point d'abscisse $\pi + x$ vient du demi-tour, comme pour les vecteurs opposés : c'est le symétrique de M par rapport à O.

Ensuite, on lit les coordonnées du symétrique : seuls des signes changent. Pour retrouver une relation, place les deux points sur le cercle et compare leurs coordonnées.

Exemple : deux angles associés

Avec $\frac{2\pi}{3}$. On écrit $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$. D'après les angles associés :

$$\cos\frac{2\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2},$$
$$\sin\frac{2\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Contrôle : $\frac{2\pi}{3} \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, le point est sur le quart de cercle de J à I'.

Avec $\frac{5\pi}{4}$. On écrit $\frac{5\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4}$. D'après les angles associés :

$$\cos\frac{5\pi}{4} = \sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\tan\frac{5\pi}{4} = \tan\frac{\pi}{4} = 1.$$

Contrôle : $\frac{5\pi}{4} \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$, le point est sur le quart de cercle de I' à J'.

Somme ou différence avec un angle droit

Propriété : Angles associés : somme ou différence avec un angle droit

Pour tout réel x :

- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$;
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$.

Pour tout réel x tel que $\cos x \neq 0$ et $\sin x \neq 0$: $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x}$.

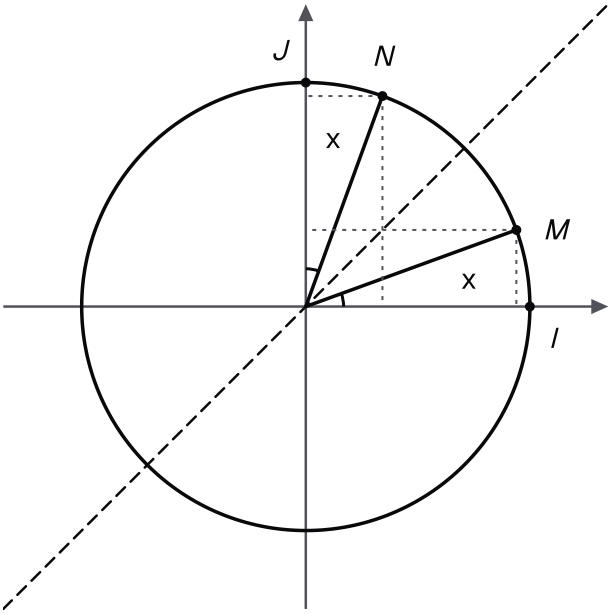
Démonstration

Idée de la preuve. Soit $M(\cos x, \sin x)$ le point du cercle trigonométrique d'abscisse curviligne x. On admet que le point d'abscisse curviligne $\frac{\pi}{2} - x$ est le symétrique de M par rapport à la bissectrice de l'angle $\widehat{IOJ}$; cette symétrie, on l'admet aussi, échange l'abscisse et l'ordonnée d'un point, d'où les coordonnées $(\sin x, \cos x)$. Ensuite, $\frac{\pi}{2} + x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$: les relations de $\pi - x$, appliquées au réel $\frac{\pi}{2} - x$, donnent $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$. La tangente s'obtient par quotient.

À retenir : échanger les coordonnées

L'idée de la preuve **admet** deux faits : le point d'abscisse $\frac{\pi}{2} - x$ est le symétrique de M par rapport à la bissectrice de l'angle $\widehat{IOJ}$, et cette symétrie échange l'abscisse et l'ordonnée.

Pour $\frac{\pi}{2} + x$, on n'admet rien de plus : on écrit $\frac{\pi}{2} + x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, puis on applique la relation de $\pi - x$.



Le point M d'abscisse x et le point N d'abscisse π/2 − x, symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle IOJ : leurs coordonnées sont échangées.

Vérifie : Sans nouvelle symétrie

Dans l'idée de la preuve, comment obtient-on $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$?

A. On admet une quatrième symétrie du cercle.
Faux.

L'idée de la preuve n'admet rien d'autre que la symétrie par rapport à la bissectrice et l'échange des coordonnées.

B. On écrit $\frac{\pi}{2}+x=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, puis on applique la relation de $\pi-x$.
Juste.
Juste : on réutilise deux relations déjà établies.

C. On ajoute $\frac{\pi}{2}$ au sinus de x.
Faux.
Une ligne trigonométrique ne se calcule pas en ajoutant l'angle.

D. On le lit sur une figure, pour une seule valeur de x.
Faux.
Une figure particulière ne prouve rien pour tout réel x.

Correction
On écrit $\frac{\pi}{2}+x=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

La relation $\sin(\pi-a)=\sin a$, appliquée au réel $\frac{\pi}{2}-x$, donne :

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)&=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\\&=\cos x.\end{aligned}$$

Calculer les lignes d'un angle associé

Méthode : lignes d'un angle associé à un angle usuel

1. **Écris** le réel sous l'une des formes $-a$, $\pi-a$, $\pi+a$, $\frac{\pi}{2}-a$ ou $\frac{\pi}{2}+a$, à des tours complets près, avec a un angle usuel.
2. **Retire** les tours complets : ils ne changent ni le cosinus ni le sinus.
3. **Applique** la relation d'angles associés qui correspond.
4. **Remplace** par la valeur usuelle, puis **contrôle** le signe avec le quart de cercle.

Exemple : les lignes d'un angle négatif

On a $-\frac{5\pi}{6}=-\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)$.

Cosinus. D'après les angles associés, le cosinus de l'opposé ne change pas, puis on applique la relation de $\pi-x$:

$$\begin{aligned}\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)&=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\\&=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

Sinus. De même, le sinus de l'opposé change de signe :

$$\begin{aligned}\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) &= -\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)\\ &= -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Contrôle. $-\frac{5\pi}{6} \in \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[$, le point est sur le quart de cercle de I' à J'. Les deux lignes sont bien négatives.

Attention : quel signe change ?

✗ « $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. »

✓ $\cos(-x) = \cos x$, mais $\sin(-x) = -\sin x$. Donc $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

De même, $\sin(\pi - x) = \sin x$, mais $\cos(\pi - x) = -\cos x$. En cas de doute, place les deux points sur le cercle et compare leurs coordonnées.

Simplifier, à toi, puis le coin devoir

Méthode : simplifier une expression

1. **Réduis** chaque argument en retirant les tours complets.
2. **Transforme** chaque terme avec les angles associés, pour n'écrire que $\cos x$ et $\sin x$.
3. **Regroupe** les termes semblables.
4. **Utilise** la relation fondamentale si une somme $\cos^2 x + \sin^2 x$ apparaît.

Exemple : une simplification complète

Pour tout réel x, simplifions

$$\begin{aligned}E = &\sin(\pi - x)\\ &- \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\\ &+ \cos^2(\pi - x)\\ &+ \sin^2(x + 2\pi).\end{aligned}$$

- D'après les tours complets, $\sin(x + 2\pi) = \sin x$.
- D'après les angles associés, $\sin(\pi - x) = \sin x$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$ et $\cos(\pi - x) = -\cos x$, donc $\cos^2(\pi - x) = \cos^2 x$.

Ainsi

$$\begin{aligned} E &= \sin x + \sin x \\ &\quad + \cos^2 x + \sin^2 x. \end{aligned}$$

D'après la relation fondamentale, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Conclusion. Pour tout réel x, $E = 2\sin x + 1$.

À toi : Une simplification

Pour tout réel x, simplifie

$$\begin{aligned} G &= \sin(\pi + x) \\ &\quad + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ &\quad - \cos(-x). \end{aligned}$$

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Transforme chaque terme avec les angles associés.
Indice 2
Le premier terme devient $-\sin x$; le deuxième s'écrit avec $\sin x$.
Indice 3
Point délicat : le cosinus de l'opposé ne change pas de signe.

Réponse
D'après les angles associés, $\sin(\pi + x) = -\sin x$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ et $\cos(-x) = \cos x$.

Donc

$$\begin{aligned} G &= -\sin x + \sin x \\ &\quad - \cos x \\ &= -\cos x. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $G = -\cos x$.

Remarque : Coin devoir : rédiger les lignes d'un angle

En devoir, écris la forme de l'angle, puis la relation, puis la valeur, chaque fois avec une phrase du type « d'après les angles associés ». Voici la rédaction attendue pour $\frac{11\pi}{3}$.
On a $\frac{11\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + 4\pi$. D'après les tours complets, $\cos\frac{11\pi}{3} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.
D'après les angles associés,

$$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

De même,

$$\sin\frac{11\pi}{3} = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Contrôle le signe : $-\frac{\pi}{3} \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$, le point est sur le quart de cercle de J' à I.

Ce qu'il faut savoir faire

À retenir : quel outil pour quelle question

- **Convertir** une mesure : l'égalité des quotients $\frac{d}{180} = \frac{r}{\pi} = \frac{g}{200}$.
- **Placer** un point ou trouver son abscisse principale : retirer des tours complets, puis viser $]-\pi, \pi]$.
- **Mesurer** un angle orienté : la relation de Chasles, les vecteurs opposés, l'ordre des vecteurs.
- **Calculer** une ligne à partir d'une autre : la relation fondamentale, puis le signe par l'intervalle.
- **Calculer** les lignes de $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{4}$ ou $-\frac{5\pi}{6}$: les angles associés et les valeurs usuelles.
- **Simplifier** une expression : tours complets, angles associés, regroupement, relation fondamentale.

Le mot du prof. Le cercle trigonométrique est ton meilleur brouillon. Avant chaque calcul, place le point, nomme son quart de cercle, puis cite la relation que tu emploies. Ces réflexes te serviront dans les chapitres suivants.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Calcul trigonométrique » (tc · sciences · mathematiques)