BURHAN

Résumé : Triangles isométriques et triangles semblables

3ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/3ac/mathematiques/triangles-isometriques-et-semblables/resume

Chapitre	Semestre
Triangles isométriques et triangles semblables	Semestre 1

Triangles isométriques, éléments homologues

À retenir : Superposer, puis lire les égalités

Deux triangles isométriques se superposent exactement. Tout le travail consiste à savoir quels sommets se correspondent.

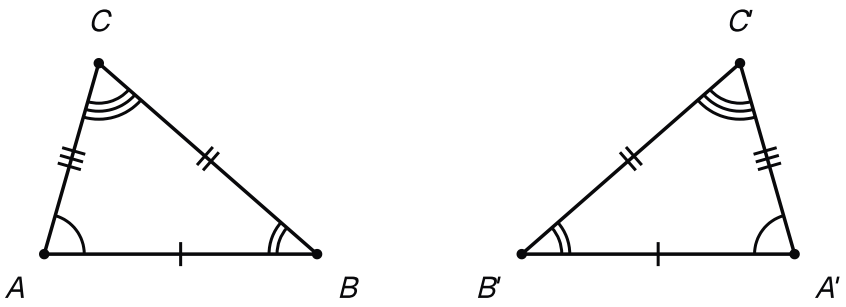
L'ordre d'écriture des sommets donne cette correspondance. On lit ensuite six égalités : trois longueurs et trois angles.

Définition : Triangles isométriques

Deux triangles sont **isométriques** lorsqu'on peut les superposer exactement. Par exemple, le dessin de l'un, décalqué sur du papier calque, recouvre exactement l'autre ; on a le droit de retourner le calque.

Les sommets qui se recouvrent sont dits **homologues**. Les côtés homologues et les angles homologues sont ceux qui se recouvrent.

On nomme les deux triangles en écrivant les sommets homologues dans le même ordre. « Les triangles ABC et EFG sont isométriques » signifie que A et E, B et F, C et G sont homologues.



Deux triangles superposables, le second dessiné à l'envers : les sommets A et A', B et B', C et C' se recouvrent.

Propriété : Éléments homologues de deux triangles isométriques

Si les triangles ABC et EFG sont isométriques, alors :

- leurs côtés homologues ont la même longueur : $AB = EF$, $BC = FG$ et $CA = GE$;
- leurs angles homologues ont la même mesure : $\widehat{BAC} = \widehat{FEG}$, $\widehat{ABC} = \widehat{EFG}$ et $\widehat{ACB} = \widehat{EGF}$.

Remarque : Un résultat admis

Ce résultat est admis. Tu l'as constaté en superposant deux triangles : ce qui se recouvre a la même mesure.

Exemple

Énoncé. Les triangles RST et XYZ sont isométriques. On sait que $RS = 7$ cm, $ST = 4$ cm et $TR = 5$ cm.

Sommets homologues. R et X, S et Y, T et Z.

Côtés. $XY = 7$ cm, $YZ = 4$ cm et $ZX = 5$ cm.

Angles. $\widehat{RST} = \widehat{XYZ}$, $\widehat{STR} = \widehat{YZX}$ et $\widehat{TRS} = \widehat{ZXY}$.

Une mesure. Au rapporteur, $\widehat{RST} \approx 44°$ au degré près. Donc $\widehat{XYZ} \approx 44°$ aussi.

Attention : Lis la correspondance avant d'écrire

Sur une figure, R recouvre Z, S recouvre X et T recouvre Y. Il faut alors écrire : « RST et ZXY sont isométriques ».

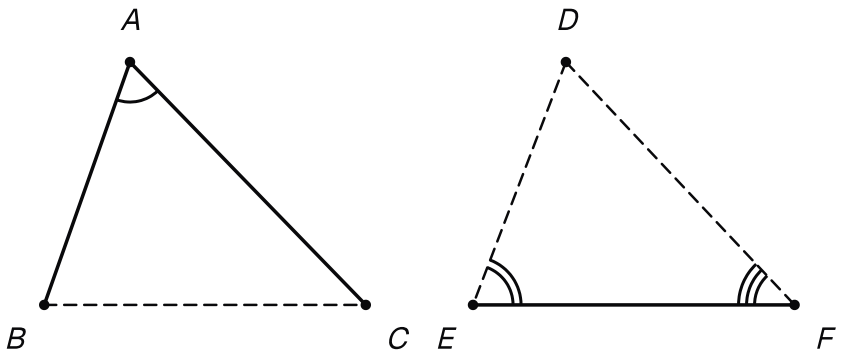
On en tire $RS = ZX$ et $ST = XY$. Écrire $ST = YZ$ serait faux : ces deux côtés ne se recouvrent pas.

Les trois cas d'isométrie

À retenir : Angle compris, angles adjacents

Deux côtés d'un triangle se rejoignent en un sommet. L'angle formé en ce point par ces deux côtés s'appelle l'**angle compris** entre eux.

Les deux angles placés aux extrémités d'un côté sont les **angles adjacents** à ce côté.



À gauche, l'angle en A formé par [AB] et [AC] ; à droite, les angles en E et en F placés aux deux bouts du côté [EF].

Propriété : Premier cas d'isométrie : les trois côtés

Si deux triangles ont leurs trois côtés respectivement de même longueur, alors ils sont isométriques.

Autrement dit : si $AB = EF$, $BC = FG$ et $CA = GE$, alors les triangles ABC et EFG sont isométriques.

Propriété : Deuxième cas d'isométrie : un angle compris entre deux côtés

Si deux triangles ont un angle de même mesure, compris entre deux côtés respectivement de même longueur, alors ils sont isométriques.

Autrement dit : si $AB = EF$, $AC = EG$ et $\widehat{BAC} = \widehat{FEG}$, alors les triangles ABC et EFG sont isométriques.

Propriété : Troisième cas d'isométrie : un côté et ses deux angles adjacents

Si deux triangles ont un côté de même longueur, et si les deux angles adjacents à ce côté sont respectivement de même mesure, alors ils sont isométriques.

Autrement dit : si $BC = FG$, $\widehat{ABC} = \widehat{EFG}$ et $\widehat{ACB} = \widehat{EGF}$, alors les triangles ABC et EFG sont isométriques.

Remarque : Trois cas admis

Les trois cas d'isométrie sont admis. Tu les as constatés aux instruments : avec les mêmes données, on construit toujours le même triangle.

Méthode : démontrer que deux triangles sont isométriques

1. **Écris** les deux triangles avec les sommets homologues dans le même ordre.
2. **Liste** les égalités sûres : données de l'énoncé, codages, côté commun, propriétés d'une figure connue.
3. **Compare** avec les trois cas : trois côtés ; deux côtés et l'angle qu'ils forment ; un côté et les deux angles à ses extrémités.
4. **Conclus** en nommant le cas : « d'après le deuxième cas d'isométrie, … ».

Exemple

Énoncé. Les triangles KLM et PQR vérifient $KL = PQ = 6$ cm, $\widehat{LKM} = \widehat{QPR} = 72°$ et $\widehat{KLM} = \widehat{PQR} = 41°$.

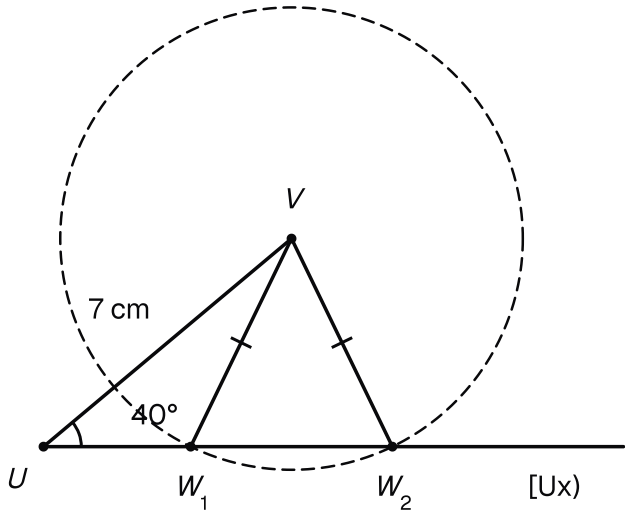
Analyse. Les côtés $[KL]$ et $[PQ]$ ont la même longueur. Les angles égaux sont placés aux extrémités de ces côtés.

Conclusion. D'après le troisième cas d'isométrie, les triangles KLM et PQR sont isométriques.

Attention : L'angle doit être entre les deux côtés

Trace un angle $\widehat{VUx}$ de $40°$ avec $UV = 7$ cm. Le cercle de centre V et de rayon 5 cm coupe $[Ux)$ en deux points W_1 et W_2.

Les triangles UVW_1 et UVW_2 ont deux côtés égaux et un angle égal. Pourtant $UW_1 \neq UW_2$. Ici, l'angle en U n'est pas formé par les deux côtés égaux.



Le cercle de centre V et de rayon 5 cm rencontre [Ux) en W1 et en W2 : deux triangles UVW1 et UVW2 aux mêmes données, de formes différentes.

Prouver une égalité avec deux triangles isométriques

À retenir : Prouver sans mesurer

Pour prouver que deux longueurs ou deux angles sont égaux, cherche deux triangles isométriques qui les contiennent. Une mesure sur un dessin ne prouve rien : elle n'est jamais exacte. Le raisonnement, lui, vaut pour toute figure construite avec les mêmes données.

Méthode : prouver une égalité par des triangles isométriques

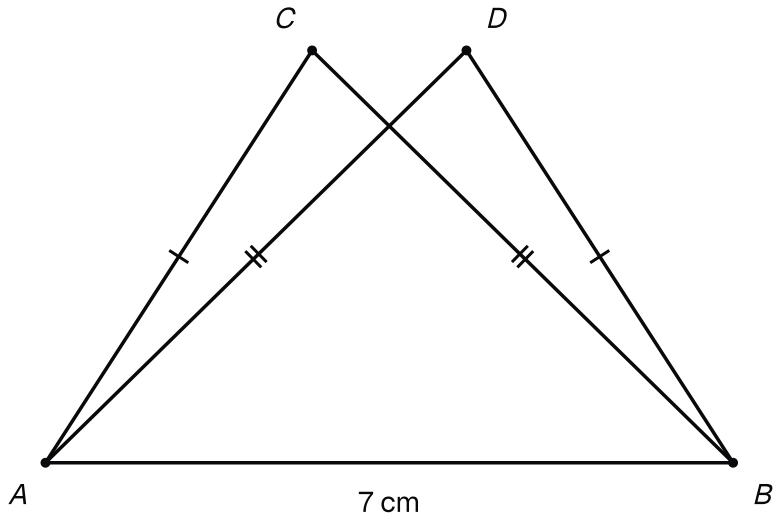
1. **Choisis** deux triangles : chacun contient l'une des deux longueurs, ou l'un des deux angles.
2. **Prouve** leur isométrie en citant un cas.
3. **Contrôle** la correspondance : les deux éléments occupent la même place dans l'écriture des triangles.
4. **Conclus** : deux éléments homologues de triangles isométriques ont la même mesure.

Exemple

Figure. Construis $[AB]$ avec $AB = 7$ cm. Place C et D du même côté de (AB), avec $AC = BD = 5$ cm et $BC = AD = 6$ cm.

Isométrie. Les triangles ABC et BAD ont $AB = BA$, $BC = AD$ et $CA = DB$. D'après le premier cas d'isométrie, ils sont isométriques.

Égalité. Les angles $\widehat{CAB}$ et $\widehat{DBA}$ sont homologues. Donc $\widehat{CAB} = \widehat{DBA}$.



Les points C et D, du même côté de (AB) : AC = BD = 5 cm et BC = AD = 6 cm, d'où deux triangles ABC et BAD isométriques.

Remarque : Rédiger en trois lignes

Trois lignes suffisent : les égalités, le cas, la conclusion. Chaque égalité porte sa raison : donnée, codage, côté commun ou propriété d'une figure.

Triangles semblables, rapport de similitude

Définition : Triangles semblables, rapport de similitude

Pour comparer deux triangles ABC et EFG, on associe A et E, B et F, C et G : ces sommets sont dits **homologues**, ainsi que les côtés qui les relient, comme $[AB]$ et $[EF]$.

Les triangles ABC et EFG sont **semblables** lorsque les longueurs des côtés de l'un sont respectivement proportionnelles aux longueurs des côtés homologues de l'autre :

$$\frac{EF}{AB} = \frac{FG}{BC} = \frac{GE}{CA}.$$

Ce quotient commun, noté k, est le **rapport de similitude** du triangle EFG par rapport au triangle ABC. On a alors $EF = k \times AB$, $FG = k \times BC$ et $GE = k \times CA$.

Exemple

Énoncé. Le triangle ABC a pour côtés $AB = 4$ cm, $BC = 5$ cm et $CA = 6$ cm. Le triangle EFG a pour côtés $EF = 10$ cm, $FG = 12{,}5$ cm et $GE = 15$ cm.

Quotients. Les côtés sont rangés du plus petit au plus grand :

$$\frac{EF}{AB} = \frac{10}{4} = 2{,}5$$
$$\frac{FG}{BC} = \frac{12{,}5}{5} = 2{,}5$$
$$\frac{GE}{CA} = \frac{15}{6} = 2{,}5$$

Conclusion. Les trois quotients sont égaux : les triangles ABC et EFG sont semblables. Le triangle EFG est au numérateur : son rapport par rapport à ABC vaut $2{,}5$.

Attention : Le rapport a un sens

Avec ces deux triangles, le rapport de ABC par rapport à EFG vaut :

$$\frac{AB}{EF} = \frac{4}{10} = 0{,}4$$

C'est l'inverse de $2{,}5$. Dis toujours quel triangle est au numérateur. Et ne divise jamais deux côtés qui ne sont pas homologues.

Remarque : Isométriques, donc semblables

Deux triangles isométriques sont aussi semblables : leurs trois quotients valent 1. La réciproque est fausse. Deux triangles semblables de rapport $2{,}5$ ne se superposent pas.

Propriété : Angles de deux triangles semblables

Si les triangles ABC et EFG sont semblables, alors leurs angles homologues ont la même mesure :

$$\widehat{BAC} = \widehat{FEG}$$
$$\widehat{ABC} = \widehat{EFG}$$
$$\widehat{ACB} = \widehat{EGF}.$$

Exemple

Énoncé. Les triangles ABC et EFG de l'exemple des trois quotients sont semblables. Au rapporteur, $\widehat{ABC} \approx 83^\circ$ au degré près.

Conclusion. D'après la propriété des angles de deux triangles semblables, $\widehat{EFG} = \widehat{ABC}$. Donc $\widehat{EFG} \approx 83^\circ$, sans rien mesurer sur le grand triangle.

Les cas de similitude

Propriété : Cas de similitude : deux angles

Si deux triangles ont deux angles respectivement de même mesure, alors ils sont semblables.

Autrement dit : si $\widehat{BAC} = \widehat{FEG}$ et $\widehat{ABC} = \widehat{EFG}$, alors les triangles ABC et EFG sont semblables. Leurs troisièmes angles sont aussi égaux, car la somme des angles d'un triangle vaut 180°.

Exemple

Énoncé. Le triangle HIJ a pour angles $\widehat{JHI} = 35^\circ$ et $\widehat{HIJ} = 105^\circ$. Le triangle NOP a pour angles $\widehat{NOP} = 105^\circ$ et $\widehat{OPN} = 40^\circ$.

Troisième angle. Dans HIJ, la somme des angles donne :

$$\begin{aligned}\widehat{IJH} &= 180^\circ - 35^\circ - 105^\circ \\ &= 40^\circ\end{aligned}$$

Conclusion. Les deux triangles ont deux angles égaux, 105° et 40°. Le cas de similitude des deux angles s'applique : HIJ et NOP sont semblables. Les sommets homologues sont I et O, J et P, H et N.

Attention : Mêmes angles ne veut pas dire superposables

Deux triangles d'angles $50°$, $60°$ et $70°$ sont semblables, d'après le cas de similitude des deux angles. Si l'un a son plus grand côté de 4 cm et l'autre de 10 cm, ils ne sont pas isométriques. L'isométrie demande au moins un côté homologue de même longueur.

Propriété : Cas de similitude : un angle compris entre deux côtés proportionnels

Si deux triangles ont un angle de même mesure, compris entre deux côtés respectivement proportionnels, alors ils sont semblables.

Autrement dit : si $\widehat{BAC} = \widehat{FEG}$ et $\dfrac{EF}{AB} = \dfrac{EG}{AC}$, alors les triangles ABC et EFG sont semblables.

Méthode : démontrer que deux triangles sont semblables

1. **Cherche deux angles égaux** : angle commun, angles opposés par le sommet, angles correspondants ou alternes-internes, troisième angle par la somme $180°$.
2. **Sinon, un angle et deux quotients** : l'angle égal doit être formé par les deux côtés comparés.
3. **Sinon, trois quotients** : range les côtés de chaque triangle dans l'ordre croissant, puis compare les quotients.
4. **Termine** par le nom du cas, ou par les trois quotients égaux.

Exemple

Énoncé. On a $\widehat{BAC} = \widehat{EDF} = 58°$, $AB = 5$ cm, $AC = 10$ cm, $DE = 4$ cm et $DF = 8$ cm.

Quotients. L'angle égal est formé par les côtés comparés :

$$\frac{DE}{AB} = \frac{4}{5} = 0{,}8$$
$$\frac{DF}{AC} = \frac{8}{10} = 0{,}8$$

Conclusion. D'après le cas de similitude de l'angle compris, les triangles ABC et DEF sont semblables. Le rapport de DEF par rapport à ABC vaut $0{,}8$.

Calculer une longueur avec deux triangles semblables

Méthode : calculer une longueur inconnue

1. **Associe** les sommets : deux côtés homologues sont opposés à deux angles égaux.
2. **Calcule** k en divisant deux côtés homologues connus ; annonce le triangle placé au numérateur.
3. **Multiplie** par k pour passer du premier triangle au second ; **divise** par k pour revenir.
4. **Vérifie** : le plus long côté de l'un correspond au plus long côté de l'autre.

Exemple

Énoncé. Les triangles ABC et EFG ont $\widehat{BAC} = \widehat{FEG}$ et $\widehat{ABC} = \widehat{EFG}$. On connaît $AB = 8$ cm, $BC = 12$ cm, $EF = 10$ cm et $GE = 11{,}25$ cm.

Similitude. Deux angles sont égaux : les triangles ABC et EFG sont semblables (cas de similitude des deux angles).

Rapport. Le rapport de EFG par rapport à ABC vaut :

$$k = \frac{EF}{AB} = \frac{10}{8} = 1{,}25$$

Longueurs. On multiplie par k pour aller de ABC vers EFG : $FG = 1{,}25 \times 12 = 15$ cm. On divise par k pour revenir : $CA = \dfrac{11{,}25}{1{,}25} = 9$ cm.

Remarque : Contrôle ton résultat

Si $k > 1$, le second triangle est le plus grand : tous ses côtés sont plus longs. Si $k < 1$, c'est l'inverse. Un résultat qui contredit cette règle cache une erreur de correspondance.

Isométrie ou similitude : quel outil ?

Méthode : Quel outil pour quelle question ?

- **Prouver** que deux triangles se superposent : un des trois cas d'isométrie.
- **Prouver** que deux longueurs ou deux angles sont égaux : deux triangles isométriques, puis leurs éléments homologues.
- **Prouver** que deux triangles sont semblables : deux angles égaux ; un angle égal entre deux côtés proportionnels ; trois quotients égaux.
- **Trouver** un angle : les angles homologues de deux triangles semblables sont égaux.
- **Calculer** une longueur : le rapport de similitude, en multipliant ou en divisant.

Triangles isométriques ABC et EFG : côtés

$$AB = EF$$
$$BC = FG$$
$$CA = GE$$

Triangles isométriques ABC et EFG : angles

$$\widehat{BAC} = \widehat{FEG}$$
$$\widehat{ABC} = \widehat{EFG}$$
$$\widehat{ACB} = \widehat{EGF}$$

Triangles semblables : rapport de EFG par rapport à ABC

$$k = \frac{EF}{AB} = \frac{FG}{BC} = \frac{GE}{CA}$$

Longueur dans le second triangle

$$EF = k \times AB$$

Somme des angles d'un triangle

$$\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180°$$

À retenir : Rédiger en devoir

Écris les triangles avec leurs sommets homologues dans le même ordre. Donne la raison de chaque égalité.

Cite le cas employé, par son nom. Pour un calcul, dis quel triangle est au numérateur du rapport.