BURHAN

Triangles isométriques et triangles semblables : exercices, niveau examen

3ème Année Collège · Mathématiques

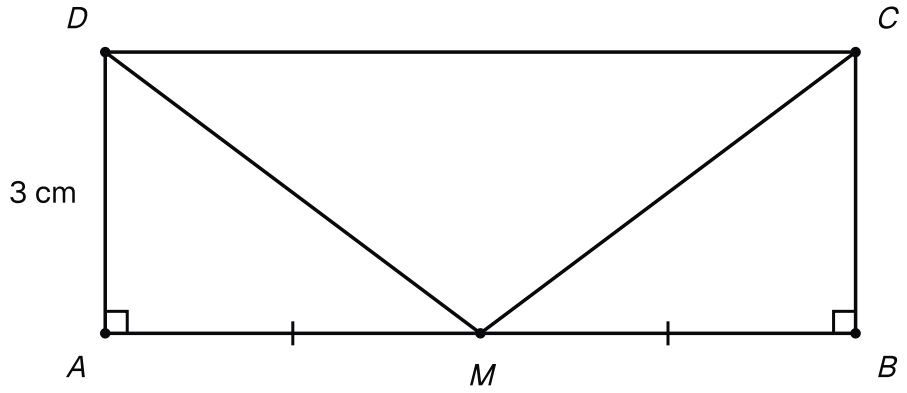
Version en ligne : burhan.ma/3ac/mathematiques/triangles-isometriques-et-semblables/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Triangles isométriques et triangles semblables	Niveau examen	5

Exercice 1 5 pts

Un point au milieu d'un côté de rectangle

$ABCD$ est un rectangle avec $AB = 8$ cm et $AD = 3$ cm. Le point M est le milieu du segment $[AB]$. Construis la figure sur ton cahier, puis trace les segments $[MD]$ et $[MC]$.



Le rectangle ABCD, M milieu de [AB], et les segments [MD] et [MC] tracés depuis M.

1. 0,5 pts

Calculer MA et MB.

INDICE

Outil : la définition du milieu d'un segment.

CORRIGÉ

Le milieu d'un segment le partage en deux segments de même longueur. Comme M est le milieu de $[AB]$ et que $AB = 8$ cm, on a $MA = MB = \dfrac{8}{2} = 4$ cm.

Conclusion. $MA = 4$ cm et $MB = 4$ cm.

2. 1,5 pts

Justifier que les triangles MAD et MBC sont isométriques. Préciser le cas utilisé.

INDICE

Début : cherche deux côtés égaux et l'angle qu'ils forment. **Outil :** dans un rectangle, les côtés opposés sont égaux et les angles sont droits.

CORRIGÉ

Côtés. D'après la question 1, $MA = MB$. Les côtés opposés d'un rectangle ont la même longueur, donc $AD = BC = 3$ cm.

Angles. Les angles d'un rectangle sont droits. Comme M est sur $[AB]$, on a $\widehat{MAD} = \widehat{MBC} = 90°$.

Position des angles. L'angle $\widehat{MAD}$ est formé par $[AM]$ et $[AD]$; l'angle $\widehat{MBC}$ par $[BM]$ et $[BC]$. Chacun est compris entre les deux côtés égaux.

Conclusion. D'après le deuxième cas d'isométrie, les triangles MAD et MBC sont isométriques.

3. 1 pts

En déduire que $MD = MC$. Quelle est la nature du triangle MDC ?

INDICE

Début : écris la correspondance : M avec M, A avec B, D avec C.

CORRIGÉ

Dans « MAD et MBC », M correspond à M, A à B et D à C.

Égalité. Le côté $[MD]$ a pour homologue $[MC]$. Deux côtés homologues de triangles isométriques ont la même longueur, donc $MD = MC$.

Nature. Le triangle MDC a deux côtés de même longueur, $[MD]$ et $[MC]$, qui partent tous deux de M.

Conclusion. $MD = MC$, donc le triangle MDC est isocèle en M.

4. 1 pts

Calculer MD.

INDICE

Outil : le théorème de Pythagore dans le triangle MAD. **Point délicat :** l'angle droit est en A.

CORRIGÉ

Le triangle MAD est rectangle en A, d'hypoténuse $[MD]$. D'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} MD^2 &= MA^2 + AD^2 \\ &= 16 + 9 = 25. \end{aligned}$$

Or $5^2 = 25$, et une longueur est positive.

Conclusion. $MD = 5$ cm.

5. 1 pts

En déduire le périmètre du triangle MDC.

INDICE

Début : utilise les questions 3 et 4. **Ensuite :** $[DC]$ est un côté du rectangle.

CORRIGÉ

Côtés. D'après les questions 3 et 4, $MC = MD = 5$ cm. Le côté $[DC]$ est opposé à $[AB]$ dans le rectangle, donc $DC = AB = 8$ cm.

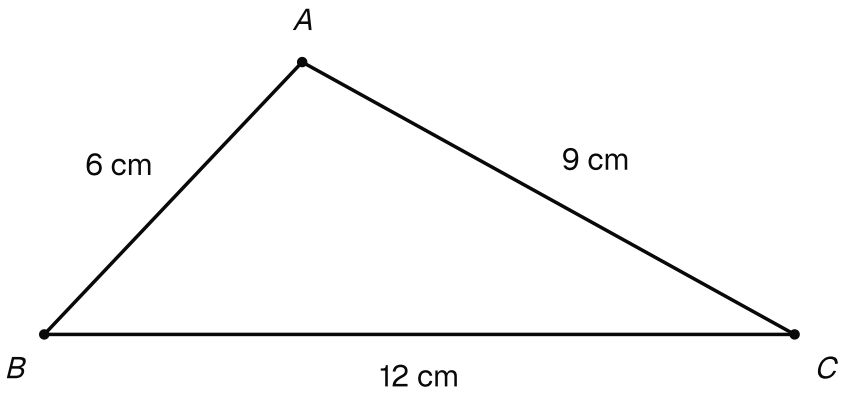
Périmètre. On additionne les trois côtés : $MD + MC + DC = 5 + 5 + 8 = 18$ cm.

Conclusion. Le périmètre du triangle MDC est 18 cm.

Exercice 2 — 5 pts

Un angle commun et un angle codé

Dans un triangle ABC, on a $AB = 6$ cm, $AC = 9$ cm et $BC = 12$ cm. Un point D du segment $[AC]$ vérifie $\widehat{ABD} = \widehat{ACB}$. Construis le triangle ABC sur ton cahier. Le point D est défini par l'égalité d'angles ; tu le placeras à la question 4.



Le triangle ABC de côtés AB = 6 cm, AC = 9 cm et BC = 12 cm ; le point D n'est pas encore placé.

1. — 0,5 pts

Quel angle les triangles ABD et ACB ont-ils en commun ?

INDICE

Point délicat : le point D est sur le segment $[AC]$.

CORRIGÉ

Le point D est sur le segment $[AC]$. La demi-droite $[AD)$ est donc la même que la demi-droite $[AC)$.

Ainsi, l'angle $\widehat{BAD}$ du triangle ABD et l'angle $\widehat{BAC}$ du triangle ACB sont formés par les mêmes demi-droites $[AB)$ et $[AC)$.

Conclusion. Les triangles ABD et ACB ont en commun l'angle de sommet A : $\widehat{BAD} = \widehat{BAC}$.

2. 1 pts

En déduire que les triangles ABD et ACB sont semblables. Préciser le cas utilisé et les sommets homologues.

INDICE

Outil : l'égalité $\widehat{ABD} = \widehat{ACB}$ de l'énoncé fournit un second angle.

CORRIGÉ

Premier angle. D'après la question 1, les deux triangles ont l'angle de sommet A en commun.

Second angle. Par l'énoncé, $\widehat{ABD} = \widehat{ACB}$.

Conclusion. Les triangles ABD et ACB ont deux angles égaux. Le cas de similitude des deux angles s'applique : ces triangles sont semblables. Leurs sommets homologues sont A et A, B et C, D et B.

3. 1 pts

Écrire les trois quotients égaux, puis calculer le rapport k du triangle ABD par rapport au triangle ACB.

INDICE

Début : chaque quotient a au numérateur un côté de ABD et au dénominateur son homologue dans ACB.

CORRIGÉ

Quotients. Dans « ABD et ACB », les côtés homologues sont $[AB]$ et $[AC]$, $[BD]$ et $[CB]$, $[DA]$ et $[BA]$. D'après la définition des triangles semblables, les trois quotients sont égaux :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CB} = \frac{DA}{BA}.$$

Rapport. Seul le premier quotient a ses deux longueurs connues :

$$k = \frac{AB}{AC} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

Conclusion. Le rapport du triangle ABD par rapport au triangle ACB est $k = \frac{2}{3}$.

4. 1 pts

Calculer AD et BD. Place alors le point D sur ta figure.

INDICE

Outil : une longueur de ABD s'obtient en multipliant par k la longueur homologue de ACB.

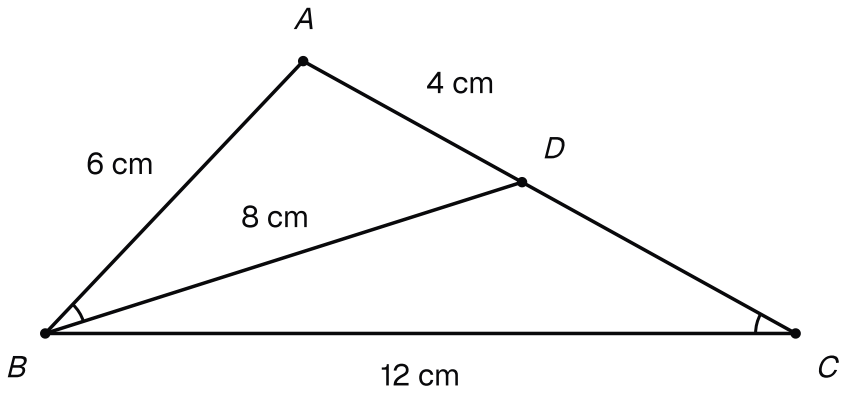
CORRIGÉ

Chaque côté de ABD est égal aux $\frac{2}{3}$ de son côté homologue dans ACB.

Longueur AD. Le côté $[DA]$ est homologue de $[BA]$. Donc $AD = \frac{2}{3} \times AB = \frac{2}{3} \times 6 = 4$ cm.

Longueur BD. Le côté $[BD]$ est homologue de $[CB]$, qui mesure 12 cm. Donc $BD = \frac{2}{3} \times 12 = 8$ cm.

Conclusion. $AD = 4$ cm et $BD = 8$ cm : on place D sur $[AC]$, à 4 cm de A.



Le point D placé sur [AC] à 4 cm de A : le segment [BD] mesure 8 cm, et les angles ABD et ACB sont égaux.

5. 1,5 pts

Calculer DC. Les triangles BDC et ABC sont-ils semblables ?

INDICE

Début : range les côtés de chaque triangle dans l'ordre croissant. **Ensuite :** compare les trois quotients.

CORRIGÉ

Longueur DC. Le point D est sur $[AC]$, donc $DC = AC - AD = 9 - 4 = 5$ cm.

Rangement. Les côtés de BDC sont 5, 8 et 12 ; ceux de ABC sont 6, 9 et 12. Si les triangles étaient semblables, le plus petit côté de l'un irait avec le plus petit de l'autre, et ainsi de suite.

Quotients. On obtient $\frac{5}{6}$, $\frac{8}{9}$ et $\frac{12}{12} = 1$. Pour comparer les deux premiers, on calcule les produits en croix : $5 \times 9 = 45$ et $8 \times 6 = 48$. Donc $\frac{5}{6} \neq \frac{8}{9}$.

Conclusion. $DC = 5$ cm. Les trois quotients ne sont pas égaux : les triangles BDC et ABC ne sont pas semblables.

Exercice 3 5 pts

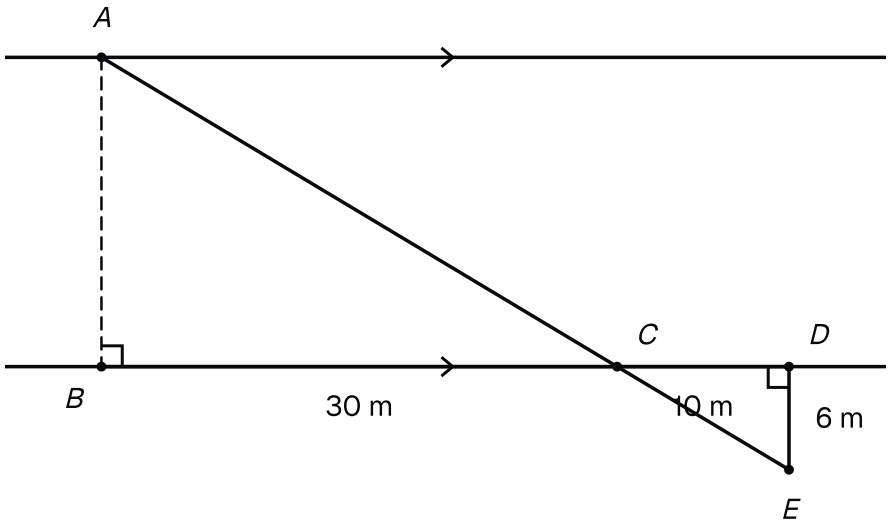
La largeur d'une rivière avant de construire un pont

Une commune veut construire un pont sur une rivière aux bords parallèles. Pour mesurer sa largeur sans la traverser, un technicien procède ainsi.

- Il choisit un arbre A sur l'autre rive, et se place en B, sur sa rive, face à l'arbre : (AB) est perpendiculaire au bord.
- Il marche le long du bord jusqu'au point C, avec $BC = 30$ m, et y plante un piquet.
- Il continue tout droit jusqu'au point D, avec $CD = 10$ m.
- De D, il s'éloigne de la rivière perpendiculairement au bord. Il s'arrête au point E d'où il voit le piquet C devant l'arbre A. Il mesure $DE = 6$ m.

Ainsi, les points B, C, D sont alignés dans cet ordre, et les points A, C, E aussi.

Fais un schéma sur ton cahier, avec 1 cm pour 5 m : $BC = 6$ cm, $CD = 2$ cm et $DE = 1{,}2$ cm.



Le relevé du technicien : l'arbre A sur l'autre rive, les points B, C et D sur sa rive, le point E, et les longueurs mesurées BC, CD et DE.

1. 1 pts

Justifier que $\widehat{ABC} = \widehat{EDC}$ et que $\widehat{ACB} = \widehat{ECD}$.

INDICE

Outil : les angles opposés par le sommet. **Début :** les droites (AB) et (DE) sont perpendiculaires au bord.

CORRIGÉ

Angles droits. Les droites (AB) et (DE) sont toutes deux perpendiculaires au bord (BD). Donc $\widehat{ABC} = 90°$ et $\widehat{EDC} = 90°$: ces deux angles sont égaux.

Angles en C. Les points B, C, D sont alignés dans cet ordre, et les points A, C, E aussi. Les angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{ECD}$ sont donc opposés par le sommet : ils sont égaux.

Conclusion. $\widehat{ABC} = \widehat{EDC}$ et $\widehat{ACB} = \widehat{ECD}$.

2. 1 pts

En déduire que les triangles ABC et EDC sont semblables, en précisant les sommets homologues.

INDICE

Outil : deux angles égaux suffisent.

CORRIGÉ

D'après la question 1, les triangles ABC et EDC ont deux angles égaux : l'angle droit, en B et en D, et l'angle de sommet C.

Conclusion. Par le cas de similitude des deux angles, les triangles ABC et EDC sont semblables. Les sommets homologues sont A et E, B et D, C et C.

3. 0,5 pts

Calculer le rapport k du triangle ABC par rapport au triangle EDC.

INDICE

Début : $[BC]$ et $[DC]$ sont homologues, et leurs longueurs sont connues.

CORRIGÉ

Le triangle ABC est au numérateur. Comme B correspond à D et C à C, les côtés $[BC]$ et $[DC]$ sont homologues :

$$k = \frac{BC}{DC} = \frac{30}{10} = 3.$$

Conclusion. Le rapport du triangle ABC par rapport au triangle EDC est $k = 3$.

4. 1 pts

En déduire la largeur AB de la rivière.

INDICE

Outil : $[AB]$ est homologue de $[ED]$.

CORRIGÉ

Le côté $[AB]$ est homologue de $[ED]$, car A correspond à E et B à D. Avec le rapport $k = 3$, on obtient $AB = 3 \times ED = 3 \times 6 = 18$ m.

Conclusion. La rivière mesure 18 m de large.

5. 1,5 pts

Calculer la valeur exacte de EC. En déduire la valeur exacte de AC, puis une valeur approchée de AC au dixième près. Une valeur exacte peut rester écrite avec une racine carrée.

INDICE

Outil : le théorème de Pythagore dans le triangle EDC, rectangle en D. **Point délicat :** calcule AC avec le rapport k, avant d'arrondir.

CORRIGÉ

Longueur EC. Le triangle EDC est rectangle en D, d'hypoténuse $[EC]$. D'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} EC^2 &= ED^2 + DC^2 \\ &= 36 + 100 = 136. \end{aligned}$$

Une longueur est positive, donc $EC = \sqrt{136}$ m.

Longueur AC. Le côté $[AC]$ est homologue de $[EC]$. On multiplie par $k = 3$: $AC = 3 \times EC = 3\sqrt{136}$ m.

Valeur approchée. À la calculatrice, $3\sqrt{136} \approx 34{,}99$, donc $AC \approx 35{,}0$ m au dixième près.

Conclusion. $EC = \sqrt{136}$ m et $AC = 3\sqrt{136}$ m, soit environ $35{,}0$ m.

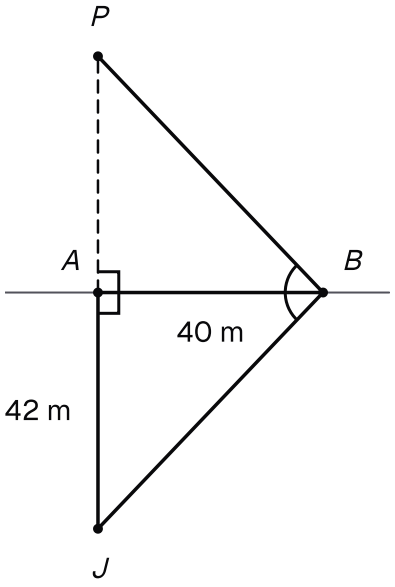
Exercice 4 5 pts

La distance d'un pylône dans un terrain clôturé

Un chemin droit longe un terrain clôturé, où l'on ne peut pas entrer. Un pylône P est planté dans ce terrain. Nadia, géomètre, veut connaître sa distance au point A du bord du chemin situé face au pylône : la droite (AP) est perpendiculaire au bord (AB). De l'autre côté du bord, le pré est libre. Elle procède ainsi.

- Elle marche le long du bord jusqu'au point B, avec $AB = 40$ m. Avec un appareil de visée, elle mesure l'angle $\widehat{ABP}$.
- Dans le pré, elle trace à partir de B une demi-droite qui fait le même angle avec le bord : $\widehat{ABJ} = \widehat{ABP}$.
- Dans le pré, elle trace la perpendiculaire au bord passant par A. Elle coupe la demi-droite précédente au point J. Nadia mesure $AJ = 42$ m.

Les points P et J sont ainsi de part et d'autre de la droite (AB). Représente la situation par un croquis, sur lequel tu reportes les longueurs et les angles connus.



Le croquis de Nadia : le bord (AB) du chemin, le pylône P d'un côté, le point J de l'autre, avec AB = 40 m et AJ = 42 m.

1. 0,5 pts

Quel côté les triangles ABP et ABJ ont-ils en commun ? Dans chaque triangle, quels sont les deux angles adjacents à ce côté ?

INDICE

Outil : les deux angles adjacents à un côté ont leurs sommets aux extrémités de ce côté.

CORRIGÉ

Côté commun. Les deux triangles ont le côté $[AB]$ en commun.

Angles adjacents. Les angles adjacents à $[AB]$ ont leurs sommets aux extrémités A et B de ce côté :

- dans le triangle ABP, ce sont $\widehat{PAB}$ et $\widehat{ABP}$;
- dans le triangle ABJ, ce sont $\widehat{JAB}$ et $\widehat{ABJ}$.

Conclusion. Le côté commun est $[AB]$. Ses angles adjacents sont $\widehat{PAB}$ et $\widehat{ABP}$ dans ABP, et $\widehat{JAB}$ et $\widehat{ABJ}$ dans ABJ.

2. 1,5 pts

En déduire que les triangles ABP et ABJ sont isométriques. Préciser le cas utilisé.

INDICE

Début : compare deux par deux les angles trouvés à la question 1. **Point délicat :** l'angle en B a été reporté ; l'angle en A est droit dans les deux triangles.

CORRIGÉ

Côté. D'après la question 1, le côté $[AB]$ est commun aux deux triangles.

Angles en A. Les droites (AP) et (AJ) sont perpendiculaires au bord (AB). Donc $\widehat{PAB} = \widehat{JAB} = 90^\circ$.

Angles en B. Nadia a reporté l'angle mesuré : par construction, $\widehat{ABP} = \widehat{ABJ}$.

Conclusion. Un côté et ses deux angles adjacents sont égaux dans les deux triangles. D'après le troisième cas d'isométrie, les triangles ABP et ABJ sont isométriques.

3. 1 pts

En déduire la distance AP entre le point A et le pylône.

INDICE

Début : écris la correspondance : A avec A, B avec B, P avec J.

CORRIGÉ

Dans « ABP et ABJ », A correspond à A, B à B et P à J. Le côté $[AP]$ a donc pour homologue $[AJ]$.

Deux côtés homologues de triangles isométriques ont la même longueur, donc $AP = AJ = 42$ m.

Conclusion. Le pylône est à 42 m du point A. Nadia obtient ainsi une distance qu'elle ne pouvait pas mesurer directement.

4. 1 pts

Calculer BJ. En déduire la distance BP entre le point B et le pylône.

INDICE

Outil : le théorème de Pythagore dans le triangle ABJ, rectangle en A. **Ensuite :** cherche le côté homologue de $[BJ]$.

CORRIGÉ

Longueur BJ. Le triangle ABJ est rectangle en A, d'hypoténuse $[BJ]$. D'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} BJ^2 &= AB^2 + AJ^2 \\ &= 1600 + 1764 \\ &= 3364. \end{aligned}$$

Or $58^2 = 3364$ et une longueur est positive, donc $BJ = 58$ m.

Longueur BP. Dans les triangles isométriques ABP et ABJ, le côté $[BP]$ est homologue de $[BJ]$. Donc $BP = BJ = 58$ m.

Conclusion. $BJ = 58$ m, et le pylône est à 58 m du point B.

5. 1 pts

Justifier que les points P, A et J sont alignés, puis calculer la distance PJ entre le pylône et le point J.

INDICE

Début : les droites (AP) et (AJ) sont perpendiculaires à (AB) au même point A. **Ensuite :** utilise la question 3.

CORRIGÉ

Alignement. Les droites (AP) et (AJ) passent toutes deux par A et sont perpendiculaires à la droite (AB). Or, par un point donné, il passe une seule perpendiculaire à une droite. Les droites (AP) et (AJ) sont donc la même droite : les points P, A et J sont alignés.

Position de A. Les points P et J sont de part et d'autre de (AB), donc A est entre P et J.

Longueur. D'après la question 3, $PA = AJ = 42$ m. Donc $PJ = PA + AJ = 42 + 42 = 84$ m.

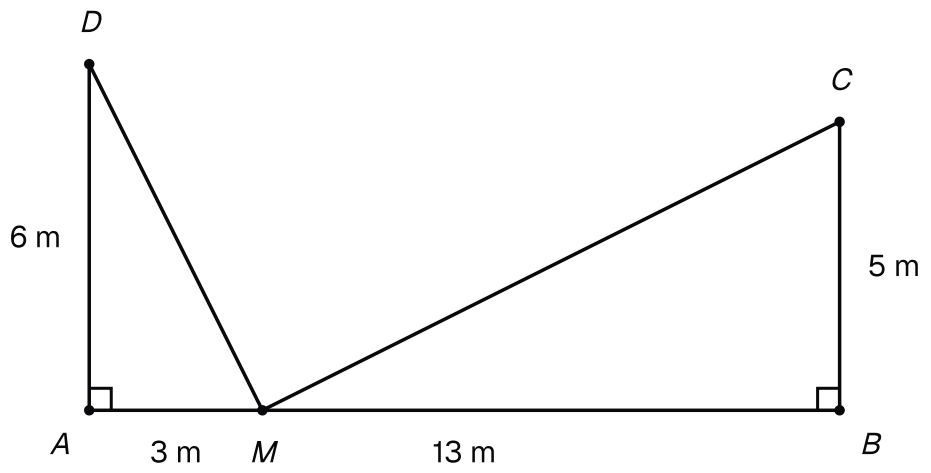
Conclusion. Les points P, A et J sont alignés, et le pylône est à 84 m du point J.

Exercice 5 5 pts

Deux câbles tendus entre deux mâts

Sur un sol horizontal, deux mâts verticaux $[AD]$ et $[BC]$ ont leurs pieds A et B distants de $AB = 13$ m, avec $AD = 6$ m et $BC = 5$ m. Un piquet M est planté sur le segment $[AB]$, avec $AM = 3$ m. On tend un câble de M au sommet D et un autre de M au sommet C (D et C du même côté de (AB)). Les deux câbles forment-ils un angle droit en M ?

Fais la figure sur ton cahier, avec 1 cm pour 1 m.



Les deux mâts verticaux [AD] de 6 m et [BC] de 5 m, leurs pieds distants de 13 m, le piquet M à 3 m de A et les deux câbles [MD] et [MC].

1. 0,5 pts

Calculer MB.

INDICE

Outil : le point M est sur le segment $[AB]$.

CORRIGÉ

Le point M est sur le segment $[AB]$: il le partage en $[AM]$ et $[MB]$. Donc $MB = AB - AM = 13 - 3 = 10$ m.

Conclusion. $MB = 10$ m.

2. 1 pts

Calculer les quotients $\frac{AD}{BM}$ et $\frac{AM}{BC}$.

INDICE

Début : utilise les longueurs de l'énoncé et de la question 1.

CORRIGÉ

On utilise $AD = 6$ m, $AM = 3$ m et $BC = 5$ m, donnés par l'énoncé, et $BM = 10$ m, trouvé à la question 1.

D'une part :

$$\frac{AD}{BM} = \frac{6}{10} = 0{,}6$$

D'autre part :

$$\frac{AM}{BC} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

Conclusion. Les deux quotients sont égaux à $0{,}6$.

3. 1,5 pts

En déduire que les triangles DAM et MBC sont semblables : nommer le cas de similitude employé, puis associer chaque sommet de DAM à son homologue dans MBC.

INDICE

Début : cherche un angle égal dans les deux triangles, à partir de la position des mâts. **Point délicat :** vérifie que cet angle est compris entre les côtés des quotients de la question 2.

CORRIGÉ

Angle. Les mâts sont verticaux : ils sont perpendiculaires au sol, donc à la droite (AB). Comme M est sur (AB), on a $\widehat{DAM} = \widehat{MBC} = 90°$.

Côtés qui encadrent l'angle. L'angle $\widehat{DAM}$ est compris entre $[AD]$ et $[AM]$; l'angle $\widehat{MBC}$ est compris entre $[BM]$ et $[BC]$. D'après la question 2, $\frac{AD}{BM} = \frac{AM}{BC}$: ces côtés sont proportionnels.

Conclusion. Un angle égal est compris entre des côtés proportionnels. Par le cas de similitude de l'angle compris, les triangles DAM et MBC sont semblables. Les sommets homologues sont D et M, A et B, M et C.

4. 1 pts

En déduire que $\widehat{ADM} = \widehat{BMC}$.

INDICE

Outil : deux triangles semblables ont leurs angles homologues égaux. **Début :** l'angle $\widehat{ADM}$ a pour sommet D.

CORRIGÉ

D'après la question 3, D a pour homologue M, A a pour homologue B, et M a pour homologue C.

L'angle $\widehat{ADM}$ a pour sommet D ; il est formé par $[DA]$ et $[DM]$. Son homologue a pour sommet M et il est formé par $[MB]$ et $[MC]$: c'est $\widehat{BMC}$.

Deux triangles semblables ont leurs angles homologues égaux.

Conclusion. $\widehat{ADM} = \widehat{BMC}$.

5. 1 pts

En déduire la mesure de l'angle $\widehat{DMC}$. Les deux câbles forment-ils un angle droit en M ?

INDICE

Début : dans le triangle DAM, rectangle en A, calcule $\widehat{ADM} + \widehat{AMD}$. **Ensuite :** les points A, M et B sont alignés.

CORRIGÉ

Triangle DAM. La somme des angles d'un triangle vaut $180°$, et $\widehat{DAM} = 90°$. Donc :

$$\begin{aligned}&\widehat{ADM} + \widehat{AMD}\\ &= 180° - 90° = 90°.\end{aligned}$$

D'après la question 4, $\widehat{ADM} = \widehat{BMC}$. On en déduit $\widehat{BMC} + \widehat{AMD} = 90°$.

Angle plat. Les points A, M, B sont alignés, et D, C sont du même côté de (AB). Les trois angles de sommet M forment donc un angle plat :

$$\begin{aligned}&\widehat{AMD} + \widehat{DMC}\\ &\quad + \widehat{CMB} = 180°.\end{aligned}$$

Comme $\widehat{AMD} + \widehat{CMB} = 90°$, on obtient :

$$\widehat{DMC} = 180° - 90° = 90°.$$

Contrôle. D'après le théorème de Pythagore, dans les triangles DAM et MBC, rectangles en A et en B :

$$\begin{aligned}DM^2 &= AD^2 + AM^2\\ &= 36 + 9 = 45\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}MC^2 &= MB^2 + BC^2\\ &= 100 + 25 = 125.\end{aligned}$$

Les côtés $[DM]$ et $[MC]$ sont homologues, et :

$$\begin{aligned}\frac{DM^2}{MC^2} &= \frac{45}{125} = 0{,}36\\ &= 0{,}6 \times 0{,}6.\end{aligned}$$

On retrouve bien $\dfrac{DM}{MC} = 0{,}6$, le quotient de la question 2.

Conclusion. $\widehat{DMC} = 90°$: les deux câbles forment un angle droit en M.