BURHAN

Triangles isométriques et triangles semblables : exercices, entraînement

3ème Année Collège · Mathématiques

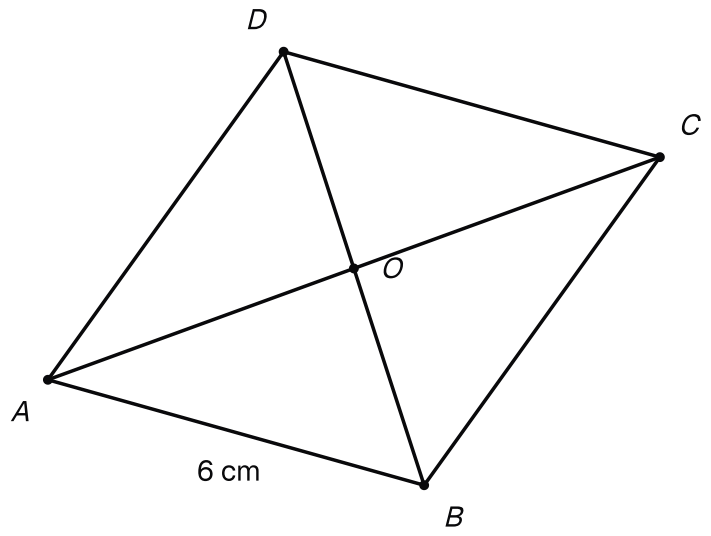
Version en ligne : burhan.ma/3ac/mathematiques/triangles-isometriques-et-semblables/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Triangles isométriques et triangles semblables	Entraînement	7

Exercice 1

Les diagonales d'un parallélogramme

$ABCD$ est un parallélogramme de centre O : ses diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en O. On a $AC = 10$ cm, $BD = 7$ cm et $AB = 6$ cm. Fais d'abord un schéma ; tu construiras la figure après la question 1.



Le parallélogramme ABCD, ses diagonales [AC] et [BD] qui se coupent en O, et le côté [AB] de 6 cm.

1.

Calculer OA, OC, OB et OD.

INDICE

Outil : les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.

CORRIGÉ

Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu. Le point O est donc à la fois le milieu de $[AC]$ et celui de $[BD]$.

Chaque diagonale est ainsi partagée en deux moitiés : $10 \div 2 = 5$ et $7 \div 2 = 3{,}5$.

Conclusion. $OA = OC = 5$ cm et $OB = OD = 3{,}5$ cm.

2.

Justifier que les triangles OAB et OCD sont isométriques.

INDICE

Outil : deux angles opposés par le sommet sont égaux. **Ensuite :** quel cas utilise deux côtés et un angle ?

CORRIGÉ

Côtés. D'après la question 1, $OA = OC$ et $OB = OD$.

Angle. Les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{COD}$ sont opposés par le sommet, donc ils sont égaux.

Position de l'angle. L'angle $\widehat{AOB}$ est formé par $[OA]$ et $[OB]$; l'angle $\widehat{COD}$ par $[OC]$ et $[OD]$. Chacun est donc compris entre les deux côtés égaux.

Conclusion. D'après le deuxième cas d'isométrie, les triangles OAB et OCD sont isométriques.

3.

En déduire la longueur CD, puis l'égalité $\widehat{OAB} = \widehat{OCD}$.

INDICE

Début : écris la correspondance : O avec O, A avec C, B avec D.

CORRIGÉ

Dans « OAB et OCD », O correspond à O, A à C et B à D.

Longueur. Le côté $[CD]$ est homologue de $[AB]$. Deux côtés homologues de triangles isométriques ont la même longueur, donc $CD = AB = 6$ cm.

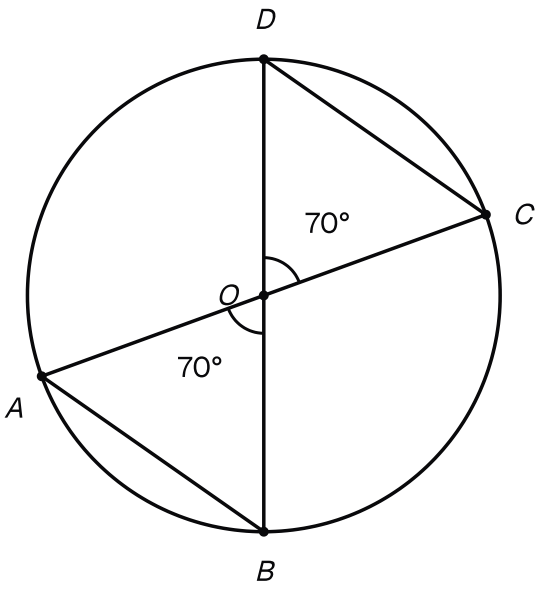
Angle. L'angle $\widehat{OAB}$, de sommet A, a pour homologue l'angle $\widehat{OCD}$, de sommet C. Ces deux angles homologues ont la même mesure.

Conclusion. $CD = 6$ cm et $\widehat{OAB} = \widehat{OCD}$.

Exercice 2

Deux cordes d'un cercle

Sur un cercle de centre O et de rayon 5 cm, on place quatre points A, B, C et D, avec $\widehat{AOB} = \widehat{COD} = 70°$. Les quatre points sont distincts, et C, D sont sur le grand arc d'extrémités A et B. Les segments $[AB]$ et $[CD]$ sont deux cordes du cercle. Construis la figure sur ton cahier.



Le cercle de centre O et de rayon 5 cm, avec deux angles au centre AOB et COD de 70 degrés et les cordes [AB] et [CD].

1.

Pourquoi a-t-on $OA = OB = OC = OD$?

INDICE

Outil : que représentent ces quatre segments pour le cercle ?

CORRIGÉ

Les quatre points A, B, C et D sont sur le cercle de centre O.

Les segments $[OA]$, $[OB]$, $[OC]$ et $[OD]$ relient le centre à un point du cercle : ce sont des rayons.

Conclusion. Ce sont quatre rayons du même cercle, donc $OA = OB = OC = OD = 5$ cm.

2.

Justifier que les triangles AOB et COD sont isométriques.

INDICE

Point délicat : vérifie que l'angle de 70° est formé par les deux rayons.

CORRIGÉ

Côtés. D'après la question 1, $OA = OC$ et $OB = OD$.

Angle. Par l'énoncé, $\widehat{AOB} = \widehat{COD} = 70^\circ$. L'angle $\widehat{AOB}$ est formé par les rayons $[OA]$ et $[OB]$, et l'angle $\widehat{COD}$ par $[OC]$ et $[OD]$: chacun est compris entre les deux côtés égaux.

Conclusion. D'après le deuxième cas d'isométrie, les triangles AOB et COD sont isométriques.

3.

En déduire que les cordes $[AB]$ et $[CD]$ ont la même longueur.

INDICE

Début : dans « AOB et COD », A correspond à C et B à D.

CORRIGÉ

Dans « AOB et COD », A correspond à C, O à O et B à D. La corde $[AB]$ a donc pour homologue la corde $[CD]$.

Deux côtés homologues de triangles isométriques ont la même longueur.

Conclusion. $AB = CD$: les cordes $[AB]$ et $[CD]$ ont la même longueur.

4.

Le triangle AOB est isocèle en O. Calculer $\widehat{OAB}$, puis en déduire $\widehat{OCD}$.

INDICE

Outil : les deux angles à la base d'un triangle isocèle sont égaux. **Ensuite :** la somme des angles vaut 180°.

CORRIGÉ

Angles à la base. Le triangle AOB est isocèle en O, car $OA = OB$. Ses deux angles à la base sont égaux : $\widehat{OAB} = \widehat{OBA}$.

Somme des angles. Dans AOB, la somme des angles vaut 180°. La somme des deux angles à la base vaut donc :

$$180^\circ - 70^\circ = 110^\circ.$$

Chacun en est la moitié : $110 \div 2 = 55$, donc $\widehat{OAB} = 55^\circ$.

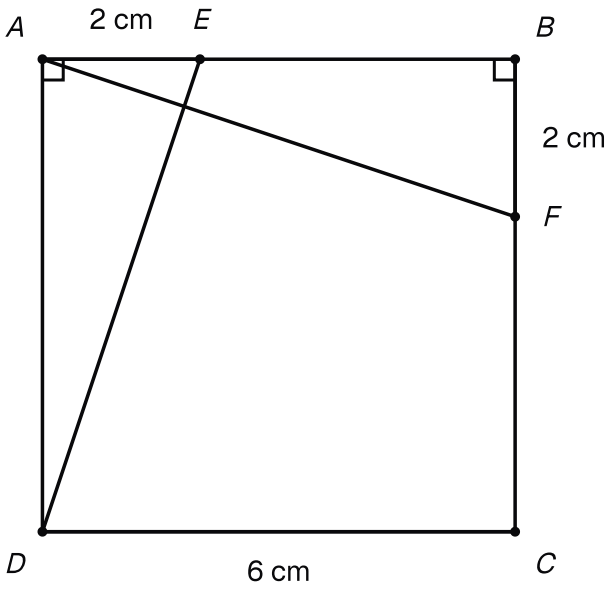
Angle homologue. Dans « AOB et COD », l'angle $\widehat{OAB}$, de sommet A, a pour homologue $\widehat{OCD}$, de sommet C. Ces angles sont égaux, donc $\widehat{OCD} = 55^\circ$.

Conclusion. $\widehat{OAB} = 55^\circ$ et $\widehat{OCD} = 55^\circ$.

Exercice 3

Deux segments dans un carré

$ABCD$ est un carré de côté 6 cm. Le point E est sur le segment $[AB]$, avec $AE = 2$ cm. Le point F est sur le segment $[BC]$, avec $BF = 2$ cm. On trace les segments $[DE]$ et $[AF]$. Fais la figure en vraie grandeur.



Le carré ABCD de côté 6 cm, le point E de [AB] avec AE = 2 cm, le point F de [BC] avec BF = 2 cm, et les segments [DE] et [AF].

1.

Justifier que les triangles DAE et ABF sont isométriques.

INDICE

Outil : un carré a quatre côtés de même longueur et quatre angles droits. **Ensuite :** quel cas utilise deux côtés et l'angle qu'ils forment ?

CORRIGÉ

Côtés. Les côtés du carré ont la même longueur : $DA = AB = 6$ cm. Par l'énoncé, $AE = BF = 2$ cm.

Angles. Les angles du carré sont droits : $\widehat{DAE} = \widehat{ABF} = 90°$.

Position des angles. L'angle $\widehat{DAE}$ est formé par $[AD]$ et $[AE]$; l'angle $\widehat{ABF}$ par $[BA]$ et $[BF]$. Chaque angle droit est compris entre les deux côtés égaux.

Conclusion. D'après le deuxième cas d'isométrie, les triangles DAE et ABF sont isométriques.

2.

En déduire que $DE = AF$.

INDICE

Début : la correspondance est D avec A, A avec B, E avec F.

CORRIGÉ

Dans « DAE et ABF », D correspond à A, A à B et E à F. Le côté $[DE]$ a donc pour homologue le côté $[AF]$.

Deux côtés homologues de triangles isométriques ont la même longueur.

Conclusion. $DE = AF$.

3.

Calculer la valeur exacte de DE, puis une valeur approchée au dixième près.

INDICE

Outil : le théorème de Pythagore dans le triangle DAE, rectangle en A.

CORRIGÉ

Le triangle DAE est rectangle en A, et son hypoténuse est $[DE]$. D'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} DE^2 &= DA^2 + AE^2 \\ &= 36 + 4 = 40. \end{aligned}$$

Une longueur est positive, donc $DE = \sqrt{40}$ cm.

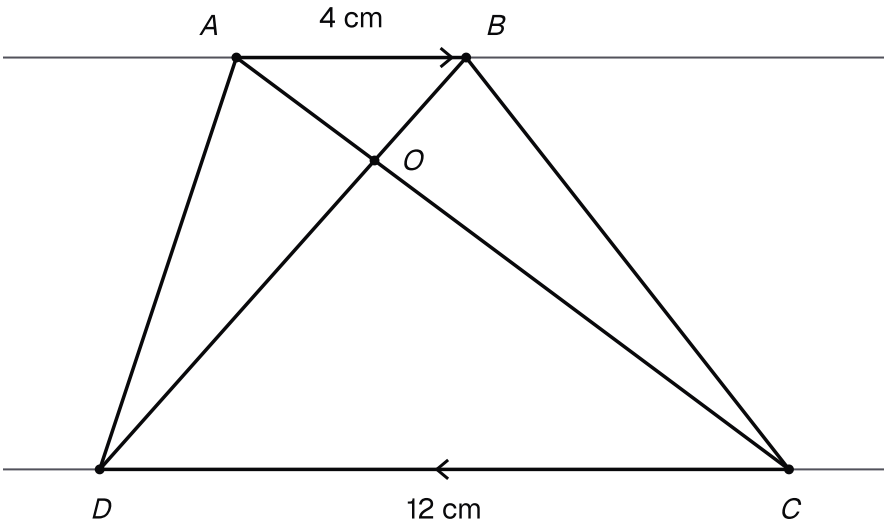
À la calculatrice, $\sqrt{40} \approx 6{,}32$, donc $DE \approx 6{,}3$ cm au dixième près.

Conclusion. $DE = \sqrt{40}$ cm, soit environ $6{,}3$ cm. D'après la question 2, AF a la même longueur.

Exercice 4

Les diagonales d'un trapèze

$ABCD$ est un trapèze : les droites (AB) et (CD) sont parallèles. Ses diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en O. On a $AB = 4$ cm, $CD = 12$ cm, $OA = 3$ cm et $OB = 2{,}4$ cm. Fais un schéma à main levée et code les données.



Le trapèze ABCD, de bases parallèles [AB] de 4 cm et [CD] de 12 cm, et ses diagonales qui se coupent en O, près de la petite base.

1.

Justifier que $\widehat{OAB} = \widehat{OCD}$ et que $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$.

INDICE

Outil : deux parallèles coupées par une sécante forment des angles alternes-internes égaux. **Ensuite :** pense aux angles opposés par le sommet.

CORRIGÉ

Angles alternes-internes. Les droites (AB) et (CD) sont parallèles, et la droite (AC) les coupe. Les angles $\widehat{OAB}$ et $\widehat{OCD}$ sont alternes-internes : ils sont donc égaux.

Angles opposés par le sommet. Les diagonales se coupent en O. Les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{COD}$ sont opposés par le sommet : ils sont égaux.

Conclusion. $\widehat{OAB} = \widehat{OCD}$ et $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$.

2.

En déduire que les triangles OAB et OCD sont semblables.

INDICE

Outil : combien d'angles égaux faut-il pour conclure ?

CORRIGÉ

D'après la question 1, l'angle en A du triangle OAB est égal à l'angle en C du triangle OCD. De plus, les angles en O des deux triangles sont égaux.

Les deux triangles ont donc deux angles égaux. Les sommets homologues sont O et O, A et C, B et D.

Conclusion. Par le cas de similitude des deux angles, les triangles OAB et OCD sont semblables.

3.

Calculer le rapport k du triangle OCD par rapport au triangle OAB, puis OC et OD.

INDICE

Début : $[CD]$ et $[AB]$ sont homologues, et tu connais leurs deux longueurs.

CORRIGÉ

Rapport. Le triangle OCD est au numérateur. Les côtés $[CD]$ et $[AB]$ sont homologues :

$$k = \frac{CD}{AB} = \frac{12}{4} = 3.$$

Longueur OC. Le côté $[OC]$ est homologue de $[OA]$, donc $OC = 3 \times OA = 3 \times 3 = 9$ cm.

Longueur OD. Le côté $[OD]$ est homologue de $[OB]$, donc $OD = 3 \times OB = 3 \times 2{,}4 = 7{,}2$ cm.

Conclusion. $k = 3$, $OC = 9$ cm et $OD = 7{,}2$ cm.

4.

En déduire la longueur de la diagonale $[AC]$.

INDICE

Point délicat : le point O est sur le segment $[AC]$.

CORRIGÉ

Les diagonales se coupent en O : le point O est sur le segment $[AC]$. La longueur AC est donc la somme de OA et de OC.

Avec l'énoncé et la question 3 : $AC = OA + OC = 3 + 9 = 12$ cm.

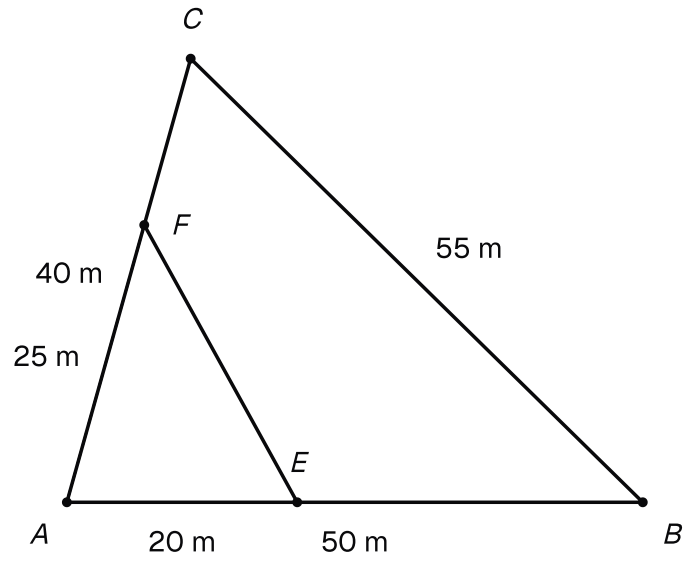
Conclusion. La diagonale $[AC]$ mesure 12 cm.

Exercice 5

Une clôture dans un champ

Un champ a la forme d'un triangle ABC, avec $AB = 50$ m, $AC = 40$ m et $BC = 55$ m. On plante un piquet E sur le segment $[AB]$, avec $AE = 20$ m, et un piquet F sur le segment $[AC]$, avec $AF = 25$ m. On tend une clôture entre E et F.

Construis le triangle ABC sur ton cahier, avec 1 cm pour 10 m, puis place E et F.



Le champ triangulaire ABC, de côtés 50, 40 et 55 m, avec les piquets E sur [AB] à 20 m de A, F sur [AC] à 25 m de A, et la clôture [EF].

1.

Calculer les quotients $\dfrac{AE}{AC}$ et $\dfrac{AF}{AB}$.

INDICE

Point délicat : respecte bien les longueurs demandées au numérateur et au dénominateur.

CORRIGÉ

On remplace chaque longueur par sa valeur, en mètres.

D'une part :

$$\frac{AE}{AC} = \frac{20}{40} = 0{,}5$$

D'autre part :

$$\frac{AF}{AB} = \frac{25}{50} = 0{,}5$$

Conclusion. Les deux quotients sont égaux à $0{,}5$.

2.

En déduire que les triangles AEF et ACB sont semblables. Préciser le cas utilisé.

INDICE

Outil : un angle égal, compris entre deux côtés proportionnels. **Début :** quel angle les deux triangles partagent-ils ?

CORRIGÉ

Angle commun. Le point E est sur $[AB]$ et le point F sur $[AC]$. Les triangles AEF et ACB ont donc le même angle de sommet A.

Côtés proportionnels. Cet angle est formé par $[AE]$ et $[AF]$ dans AEF, et par $[AC]$ et $[AB]$ dans ACB. D'après la question 1, $\frac{AE}{AC} = \frac{AF}{AB}$: ces côtés sont proportionnels.

Conclusion. Un angle égal est compris entre des côtés proportionnels. Les triangles AEF et ACB sont donc semblables : c'est le cas de similitude de l'angle compris.

3.

Calculer la longueur EF de la clôture.

INDICE

Début : le rapport du triangle AEF par rapport au triangle ACB vaut $0{,}5$; $[EF]$ est homologue de $[CB]$.

CORRIGÉ

D'après les questions 1 et 2, le rapport du triangle AEF par rapport au triangle ACB vaut $0{,}5$.

Dans « AEF et ACB », E correspond à C et F à B : le côté $[EF]$ est homologue de $[CB]$. Donc $EF = 0{,}5 \times CB = 0{,}5 \times 55 = 27{,}5$ m.

Conclusion. La clôture mesure $27{,}5$ m.

4.

La clôture (EF) est-elle parallèle à la droite (BC) ? Justifier.

INDICE

Outil : le théorème de Thalès. **Début :** calcule $\frac{AE}{AB}$ et $\frac{AF}{AC}$.

CORRIGÉ

Idée. Les points A, E, B sont alignés, ainsi que A, F, C. Si (EF) était parallèle à (BC), le théorème de Thalès donnerait $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$.

Quotients. D'une part :

$$\frac{AE}{AB} = \frac{20}{50} = 0{,}4$$

D'autre part :

$$\frac{AF}{AC} = \frac{25}{40} = 0{,}625$$

Or $0{,}4 \neq 0{,}625$: l'égalité que donnerait le théorème de Thalès est fausse.

Conclusion. Non : la clôture (EF) n'est pas parallèle à la droite (BC).

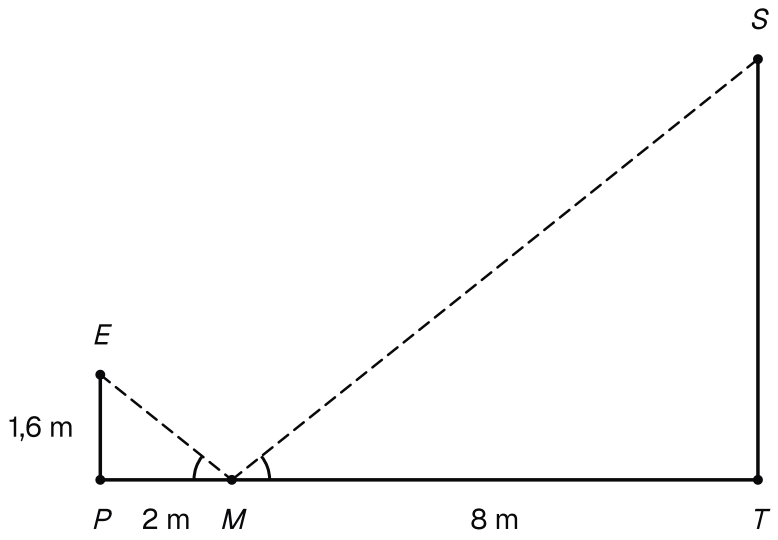
Exercice 6

Un miroir pour mesurer un arbre

Pour mesurer la hauteur d'un arbre, Salma pose un petit miroir M sur le sol horizontal. Elle recule jusqu'à voir le sommet S de l'arbre dans le miroir. Ses yeux E sont à $1{,}6$ m au-dessus du point P du sol. L'arbre $[TS]$ est vertical, de pied T. Les points P, M et T sont alignés dans cet ordre, avec $PM = 2$ m et $MT = 8$ m.

D'après une loi de l'optique, admise ici, $\widehat{EMP} = \widehat{SMT}$.

Fais un schéma : un trait vertical pour Salma ($[PE]$), un trait vertical pour l'arbre ($[TS]$), le miroir M sur le sol entre les deux.



Le schéma de Salma : ses yeux E à 1,6 m au-dessus de P, le miroir M posé au sol, l'arbre [TS], et les deux angles égaux en M.

1.

Quelle est la mesure des angles $\widehat{EPM}$ et $\widehat{STM}$? Pourquoi ?

INDICE

Outil : Salma et l'arbre sont verticaux, le sol est horizontal.

CORRIGÉ

Salma se tient debout : le segment $[PE]$ est vertical. L'arbre $[TS]$ est vertical lui aussi, et le sol, où se trouvent P, M et T, est horizontal.

Un segment vertical est perpendiculaire au sol horizontal. Les angles $\widehat{EPM}$ et $\widehat{STM}$ sont donc droits.

Conclusion. $\widehat{EPM} = \widehat{STM} = 90°$, car Salma et l'arbre sont verticaux sur un sol horizontal.

2.

En déduire que les triangles EPM et STM sont semblables.

INDICE

Début : rassemble les deux égalités d'angles dont tu disposes.

CORRIGÉ

Premier angle. D'après la question 1, $\widehat{EPM} = \widehat{STM} = 90°$.

Second angle. Par la loi de l'optique admise dans l'énoncé, $\widehat{EMP} = \widehat{SMT}$.

Conclusion. Les triangles EPM et STM ont deux angles égaux. Le cas de similitude des deux angles s'applique : ces triangles sont semblables, avec E et S, P et T, M et M homologues.

3.

Calculer le rapport k du triangle STM par rapport au triangle EPM, puis la hauteur TS de l'arbre.

INDICE

Outil : $[TM]$ et $[PM]$ sont homologues. **Ensuite :** $[TS]$ est homologue de $[PE]$.

CORRIGÉ

Rapport. Le triangle STM est au numérateur. Les côtés $[TM]$ et $[PM]$ sont homologues, car T correspond à P et M à M :

$$k = \frac{TM}{PM} = \frac{8}{2} = 4.$$

Hauteur. Le côté $[TS]$ est homologue de $[PE]$, donc $TS = 4 \times PE = 4 \times 1{,}6 = 6{,}4$ m.

Conclusion. Le rapport vaut $k = 4$, et l'arbre mesure $6{,}4$ m de haut.

Exercice 7

Les pignons de deux cabanes

Le pignon d'une cabane, sous le toit, est un triangle ABC avec $\widehat{BAC} = 47°$ et $\widehat{ABC} = 58°$. Le pignon d'une seconde cabane est un triangle DEF avec $\widehat{EDF} = 75°$ et $\widehat{DEF} = 47°$. On mesure $AB = 6$ m et $EF = 4{,}2$ m.

1.

Calculer $\widehat{ACB}$ et $\widehat{DFE}$.

INDICE

Outil : la somme des angles d'un triangle vaut $180°$.

CORRIGÉ

Dans chaque triangle, la somme des angles vaut $180°$.

Triangle ABC.

$$\begin{aligned}\widehat{ACB} &= 180° - 47° - 58° \\ &= 75°.\end{aligned}$$

Triangle DEF.

$$\begin{aligned}\widehat{DFE} &= 180° - 75° - 47° \\ &= 58°.\end{aligned}$$

Conclusion. $\widehat{ACB} = 75°$ et $\widehat{DFE} = 58°$.

2.

En déduire que les deux pignons sont semblables. Écrire leurs sommets homologues dans le même ordre.

INDICE

Point délicat : associe les sommets qui portent des angles égaux, et non les lettres qui se suivent.

CORRIGÉ

Similitude. D'après la question 1, les angles de ABC mesurent $47°$, $58°$ et $75°$, comme ceux de DEF. Les deux triangles ont donc deux angles égaux, par exemple $47°$ et $58°$. Le cas de similitude des deux angles s'applique : les pignons sont semblables.

Sommets homologues. On associe les sommets qui portent le même angle :

- A et E portent $47°$;
- B et F portent $58°$;
- C et D portent $75°$.

Conclusion. Les deux pignons sont semblables, et l'on écrit : les triangles ABC et EFD sont semblables.

3.

Calculer le rapport du triangle EFD par rapport au triangle ABC.

INDICE

Début : d'après la question 2, $[EF]$ est homologue de $[AB]$.

CORRIGÉ

Le triangle EFD est au numérateur. D'après la question 2, E correspond à A et F à B : le côté $[EF]$ est homologue de $[AB]$.

On connaît ces deux longueurs, donc le rapport vaut :

$$\frac{EF}{AB} = \frac{4{,}2}{6} = 0{,}7.$$

Conclusion. Le rapport du triangle EFD par rapport au triangle ABC est $0{,}7$.