BURHAN

Triangles isométriques et triangles semblables : exercices, application

3ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/3ac/mathematiques/triangles-isometriques-et-semblables/exercices/application

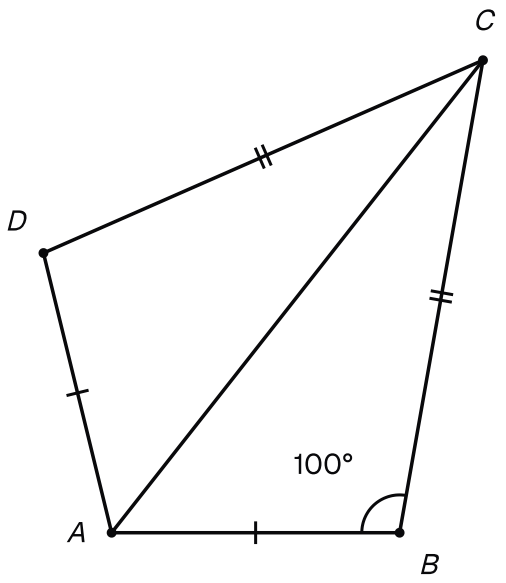
Chapitre	Palier	Exercices
Triangles isométriques et triangles semblables	Application	8

Exercice 1

Les deux moitiés d'un cerf-volant

Un cerf-volant a la forme du quadrilatère $ABCD$. On a $AB = AD = 30$ cm, $CB = CD = 50$ cm et $\widehat{ABC} = 100°$. Sa baguette $[AC]$ le partage en deux triangles. Les points B et D sont de part et d'autre de $[AC]$. On admet que les triangles ABC et ADC sont isométriques, écrits dans cet ordre.

Construis la figure sur ton cahier en divisant toutes les longueurs par 10.



Le cerf-volant ABCD et sa baguette [AC] : AB = AD, CB = CD, et l'angle ABC de 100 degrés ; les longueurs ne sont pas à l'échelle réelle.

1.

Écrire les paires de sommets homologues des triangles ABC et ADC.

INDICE

Outil : dans « ABC et ADC », deux sommets écrits à la même place sont homologues.

CORRIGÉ

Dans l'écriture « ABC et ADC », deux sommets placés au même rang se correspondent.

On lit les deux noms rang par rang : au premier rang A et A, au deuxième B et D, au troisième C et C.

Conclusion. Les paires de sommets homologues sont A et A, B et D, C et C.

2.

Écrire les trois égalités de longueurs, puis les trois égalités d'angles.

INDICE

Outil : la propriété des éléments homologues de deux triangles isométriques. **Point délicat :** le côté $[AC]$ appartient aux deux triangles.

CORRIGÉ

Les triangles ABC et ADC sont isométriques. Chaque côté a donc la même longueur que son homologue, et chaque angle la même mesure que son homologue.

Longueurs. On associe les côtés grâce aux paires de la question 1 : $AB = AD$, $BC = DC$ et $CA = CA$. La dernière égalité vient du côté $[AC]$, que les deux triangles partagent.

Angles. De la même façon : $\widehat{BAC} = \widehat{DAC}$, $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$ et $\widehat{BCA} = \widehat{DCA}$.

Conclusion. Les deux triangles ont leurs trois côtés et leurs trois angles égaux deux à deux, comme écrit ci-dessus.

3.

En déduire la mesure de l'angle $\widehat{ADC}$, sans rapporteur.

INDICE

Début : cherche l'angle du triangle ABC homologue de $\widehat{ADC}$.

CORRIGÉ

D'après la question 1, le sommet D est l'homologue de B. L'angle $\widehat{ADC}$ a donc pour homologue l'angle $\widehat{ABC}$.

Deux angles homologues de triangles isométriques ont la même mesure, et l'énoncé donne $\widehat{ABC} = 100°$.

Conclusion. Sans rapporteur, on obtient $\widehat{ADC} = 100°$.

Exercice 2

Quel cas d'isométrie ?

Pour chaque paire de triangles, dis si les données permettent de conclure qu'ils sont isométriques. Si oui, cite le cas employé.

1.

Les triangles ABC et DEF vérifient $AB = DE = 5$ cm, $BC = EF = 7$ cm et $\widehat{ABC} = \widehat{DEF} = 40°$.

INDICE

Outil : regarde où se trouve l'angle égal. Est-il formé par les deux côtés égaux ?

CORRIGÉ

On connaît deux côtés égaux et un angle égal. Il reste à voir si cet angle est formé par les deux côtés.

Dans ABC, l'angle $\widehat{ABC}$ a pour sommet B : il est formé par les côtés $[BA]$ et $[BC]$. Dans DEF, l'angle $\widehat{DEF}$ est formé par $[ED]$ et $[EF]$.

Chaque angle égal est donc compris entre les deux côtés égaux.

Conclusion. Oui. D'après le deuxième cas d'isométrie, les triangles ABC et DEF sont isométriques.

2.

Les triangles GHI et JKL vérifient $GH = JK = 9$ cm, $\widehat{IGH} = \widehat{LJK} = 55°$ et $\widehat{GHI} = \widehat{JKL} = 65°$.

INDICE

Outil : les deux angles égaux sont-ils aux deux bouts du côté égal ?

CORRIGÉ

On connaît un côté égal et deux angles égaux. Il reste à voir si ces angles sont aux deux bouts du côté.

Dans GHI, les angles de sommets G et H sont aux extrémités du côté $[GH]$. Dans JKL, ceux de sommets J et K sont aux extrémités de $[JK]$.

Un côté et ses deux angles adjacents sont donc égaux dans les deux triangles.

Conclusion. Oui. D'après le troisième cas d'isométrie, les triangles GHI et JKL sont isométriques.

3.

Les triangles MNP et QRS vérifient $MN = QR = 4$ cm, $NP = RS = 9$ cm et $PM = SQ = 8$ cm.

INDICE

Outil : on connaît trois longueurs dans chaque triangle.

CORRIGÉ

On connaît les trois côtés de chaque triangle, et ils sont égaux deux à deux : $MN = QR$, $NP = RS$ et $PM = SQ$.

Ces triangles existent bien : le plus grand côté, 9, est plus petit que $4 + 8$.

Conclusion. Oui. D'après le premier cas d'isométrie, les triangles MNP et QRS sont isométriques.

4.

Les triangles TUV et WXY vérifient $TU = WX = 8$ cm, $UV = XY = 6$ cm et $\widehat{UTV} = \widehat{XWY} = 35°$.

INDICE

Point délicat : l'angle égal a pour sommet T. Les côtés égaux $[TU]$ et $[UV]$ se rejoignent-ils en T ?

CORRIGÉ

Les données sont deux côtés égaux et un angle égal, de sommet T. Pour conclure, cet angle devrait être formé par les deux côtés égaux.

Or les côtés égaux $[TU]$ et $[UV]$ se rejoignent en U, et non en T. L'angle de $35°$ n'est donc pas compris entre eux.

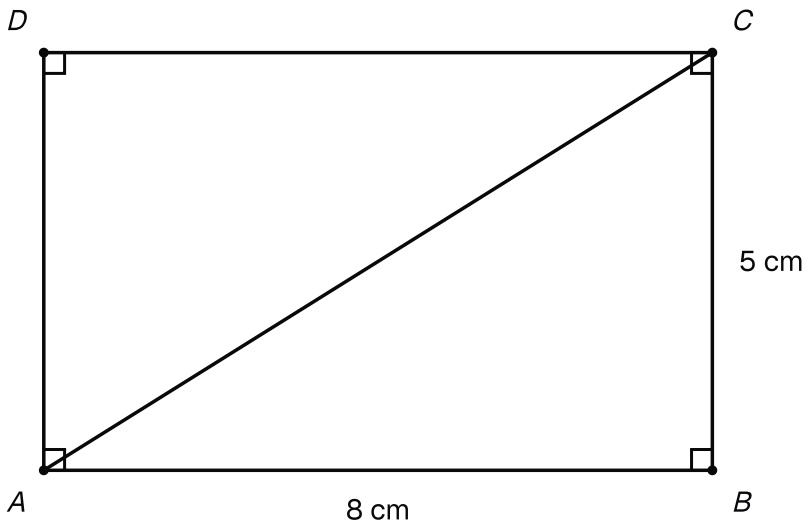
Les deux autres cas demandent trois côtés, ou un côté et deux angles : les données ne les fournissent pas.

Conclusion. Aucun cas d'isométrie ne s'applique : on ne peut pas conclure. D'ailleurs, avec ces mesures, on peut construire deux triangles différents.

Exercice 3

La diagonale d'un rectangle

$ABCD$ est un rectangle, avec $AB = 8$ cm et $BC = 5$ cm. On trace sa diagonale $[AC]$. Construis la figure sur ton cahier.



Le rectangle ABCD de 8 cm sur 5 cm et sa diagonale [AC], qui le partage en deux triangles ABC et CDA.

1.

Justifier que les triangles ABC et CDA sont isométriques.

INDICE

Outil : dans un rectangle, deux côtés opposés ont la même longueur. **Point délicat :** le côté $[AC]$ appartient aux deux triangles.

CORRIGÉ

Côtés opposés. Dans le rectangle $ABCD$, deux côtés opposés ont la même longueur : $AB = CD = 8$ cm et $BC = DA = 5$ cm.

Côté commun. La diagonale $[AC]$ est un côté de chacun des deux triangles, donc $CA = AC$.

Conclusion. Les trois côtés de ABC sont égaux à ceux de CDA, pris dans l'ordre. D'après le premier cas d'isométrie, les triangles ABC et CDA sont isométriques.

2.

Quel angle du triangle CDA est homologue à l'angle $\widehat{BAC}$? Écrire l'égalité obtenue.

INDICE

Début : dans « ABC et CDA », le sommet A correspond à C, et B correspond à D.

CORRIGÉ

Dans « ABC et CDA », on lit les sommets rang par rang : A correspond à C, B à D et C à A.

L'angle $\widehat{BAC}$ a pour sommet A. Son homologue a pour sommet C et il est formé avec D et A : c'est $\widehat{DCA}$.

Les angles homologues de deux triangles isométriques ont la même mesure.

Conclusion. L'angle homologue de $\widehat{BAC}$ est $\widehat{DCA}$, et l'on a $\widehat{BAC} = \widehat{DCA}$.

Exercice 4

Trois voiles de bateau

La grand-voile d'un bateau est un triangle de côtés 3 m, 5 m et 6 m. Le fabricant propose deux autres voiles triangulaires.

1.

La première voile a pour côtés $4{,}2$ m, 7 m et $8{,}4$ m. Calculer les trois quotients de ses côtés par ceux de la grand-voile, rangés dans l'ordre croissant. Les deux voiles sont-elles semblables ?

INDICE

Outil : la définition des triangles semblables. **Début :** divise le plus petit côté par le plus petit côté, et ainsi de suite.

CORRIGÉ

On range les côtés dans l'ordre croissant : 3, 5, 6 pour la grand-voile, et $4{,}2$, 7, $8{,}4$ pour la première voile. On divise ensuite chaque côté de la première voile par le côté de même rang.

Quotients. $\dfrac{4{,}2}{3} = 1{,}4$, $\dfrac{7}{5} = 1{,}4$ et $\dfrac{8{,}4}{6} = 1{,}4$.

Conclusion. Les trois quotients sont égaux. D'après la définition des triangles semblables, les deux voiles sont semblables, et le rapport de la première voile par rapport à la grand-voile vaut $1{,}4$.

2.

La seconde voile a pour côtés $3{,}6$ m, $6{,}2$ m et $7{,}2$ m. Même question.

INDICE

Début : divise chaque côté de la seconde voile par le côté de la grand-voile de même rang. **Ensuite :** compare les trois résultats.

CORRIGÉ

Rangement. Si les voiles étaient semblables, le plus petit côté de l'une irait avec le plus petit de l'autre, et ainsi de suite. On compare donc $3{,}6$ à 3, $6{,}2$ à 5 et $7{,}2$ à 6.

Quotients. $\dfrac{3{,}6}{3} = 1{,}2$ et $\dfrac{7{,}2}{6} = 1{,}2$. Pour le côté du milieu, $1{,}2 \times 5 = 6$, et non $6{,}2$. Donc $\dfrac{6{,}2}{5} \neq 1{,}2$.

Conclusion. Les trois quotients ne sont pas égaux : la seconde voile n'est pas semblable à la grand-voile.

Exercice 5

Les poutres d'un pont métallique

La structure d'un pont métallique contient deux triangles semblables RST et UVW, écrits dans cet ordre. On a $RS = 12$ m, $ST = 14$ m, $TR = 8$ m et $UV = 9$ m.

1.

Calculer le rapport de similitude k du triangle UVW par rapport au triangle RST.

INDICE

Outil : le rapport se calcule avec deux côtés homologues. **Début :** $[UV]$ est homologue de $[RS]$.

CORRIGÉ

Ce rapport a au numérateur un côté de UVW, et au dénominateur son homologue dans RST.

Les triangles sont écrits dans l'ordre RST et UVW : les côtés $[UV]$ et $[RS]$ sont homologues, et l'on connaît leurs deux longueurs.

$$k = \frac{UV}{RS} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} = 0{,}75.$$

Conclusion. Le rapport de similitude du triangle UVW par rapport au triangle RST est $k = 0{,}75$.

2.

Calculer le rapport du triangle RST par rapport au triangle UVW.

INDICE

Point délicat : le triangle au numérateur a changé.

CORRIGÉ

Cette fois, c'est le triangle RST qui est au numérateur. On divise donc RS par son homologue UV :

$$\frac{RS}{UV} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}.$$

On retrouve l'inverse du rapport $\frac{3}{4}$ de la question 1.

Conclusion. Le rapport du triangle RST par rapport au triangle UVW vaut $\frac{4}{3}$.

Exercice 6

Deux étiquettes triangulaires

Une marque colle une petite étiquette triangulaire KLM sur ses pots, et une grande étiquette PQR sur ses boîtes. Les triangles KLM et PQR sont semblables, écrits dans cet ordre. On a $KL = 5$ cm, $LM = 7$ cm, $MK = 9$ cm et $PQ = 15$ cm.

1.

Calculer le rapport k du triangle PQR par rapport au triangle KLM.

INDICE

Outil : $[PQ]$ et $[KL]$ sont homologues.

CORRIGÉ

Le triangle PQR est au numérateur. Les côtés $[PQ]$ et $[KL]$ sont homologues, car P correspond à K et Q à L :

$$k = \frac{PQ}{KL} = \frac{15}{5} = 3.$$

Conclusion. Le rapport du triangle PQR par rapport au triangle KLM est $k = 3$.

2.

Calculer QR et RP.

INDICE

Début : chaque côté de PQR s'obtient en multipliant par k le côté homologue de KLM.

CORRIGÉ

Chaque côté de PQR est égal à 3 fois son côté homologue dans KLM.

Côté $[QR]$. Il est homologue de $[LM]$, donc $QR = 3 \times LM = 3 \times 7 = 21$ cm.

Côté $[RP]$. Il est homologue de $[MK]$, donc $RP = 3 \times MK = 3 \times 9 = 27$ cm.

Contrôle. Le plus long côté de KLM, $[MK]$, correspond bien au plus long côté de PQR, $[RP]$.

Conclusion. $QR = 21$ cm et $RP = 27$ cm.

Exercice 7

Les angles d'un triangle semblable

Un triangle ABC a pour angles $\widehat{BAC} = 48°$ et $\widehat{ABC} = 67°$. Le triangle DEF est semblable au triangle ABC, écrits dans cet ordre.

1.

Calculer $\widehat{ACB}$.

INDICE

Outil : la somme des angles d'un triangle vaut $180°$.

CORRIGÉ

Dans un triangle, la somme des trois angles vaut $180°$. On retire donc les deux angles connus :

$$\begin{aligned}\widehat{ACB} &= 180° - 48° - 67° \\ &= 65°.\end{aligned}$$

Conclusion. L'angle $\widehat{ACB}$ mesure $65°$.

2.

En déduire les trois angles du triangle DEF.

INDICE

Outil : la propriété des angles de deux triangles semblables. **Début :** D correspond à A.

CORRIGÉ

Par l'énoncé, les triangles ABC et DEF sont semblables, écrits dans cet ordre : D correspond à A, E à B et F à C.

Deux triangles semblables ont leurs angles homologues égaux. Chaque angle de DEF a donc la mesure de l'angle de son sommet homologue dans ABC.

Conclusion. $\widehat{EDF} = 48°$, $\widehat{DEF} = 67°$ et $\widehat{DFE} = 65°$.

Exercice 8

Deux triangles aux mêmes angles

Le triangle GHI a pour angles $\widehat{HGI} = 38°$ et $\widehat{GHI} = 84°$. Le triangle JKL a pour angles $\widehat{KJL} = 84°$ et $\widehat{JLK} = 58°$.

1.

Calculer l'angle manquant de chaque triangle.

INDICE

Outil : la somme des angles d'un triangle.

CORRIGÉ

Dans chaque triangle, la somme des angles vaut $180°$: l'angle manquant s'obtient en retirant les deux angles connus.

Triangle GHI.

$$\begin{aligned}\widehat{GIH} &= 180° - 38° - 84° \\ &= 58°.\end{aligned}$$

Triangle JKL.

$$\begin{aligned}\widehat{JKL} &= 180° - 84° - 58° \\ &= 38°.\end{aligned}$$

Conclusion. L'angle manquant mesure $58°$ dans GHI et $38°$ dans JKL.

2.

Les deux triangles sont-ils semblables ? Justifier.

INDICE

Outil : combien d'angles égaux faut-il pour conclure ?

CORRIGÉ

D'après la question 1, les angles de GHI mesurent $38°$, $84°$ et $58°$. Ceux de JKL mesurent $84°$, $58°$ et $38°$.

Les deux triangles ont donc deux angles égaux, par exemple $84°$ et $58°$.

Conclusion. Oui. Par le cas de similitude des deux angles, les triangles GHI et JKL sont semblables.

3.

Écrire leurs sommets homologues dans le même ordre.

INDICE

Point délicat : deux sommets homologues portent des angles égaux.

CORRIGÉ

Deux sommets homologues portent des angles de même mesure. On associe donc les sommets angle par angle :

- G et K portent un angle de $38°$;
- H et J portent un angle de $84°$;
- I et L portent un angle de $58°$.

Conclusion. On écrit les deux triangles dans l'ordre GHI et KJL.