BURHAN

Triangles isométriques et triangles semblables

3ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/3ac/mathematiques/triangles-isometriques-et-semblables/cours

Chapitre	Semestre
Triangles isométriques et triangles semblables	Semestre 1

Deux triangles pareils ?

Ta classe fabrique un jeu avec des pièces en carton. Deux pièces triangulaires sont posées sur la table. La première a des côtés de 5 cm, 7 cm et 8 cm.

Sur la seconde, Salma mesure 8 cm, 5 cm et 7 cm, dans un autre ordre. Les deux pièces se recouvrent-elles exactement ? Personne n'a mesuré les angles.

Devine : Une prédiction

Que prévois-tu pour ces deux pièces en carton ?

A. Elles ne se recouvrent pas : les longueurs sont dans un autre ordre.
Faux.
L'ordre de lecture ne change pas la pièce. On peut la tourner ou la retourner.

B. On ne peut rien dire sans mesurer les angles.
Faux.
Les angles aideraient, mais ici les trois longueurs suffisent : tu le verras dans ce chapitre.

C. Elles se recouvrent, quitte à retourner une pièce.
Juste.
Juste : trois côtés de mêmes longueurs suffisent.

D. Elles se recouvrent seulement si elles sont rectangles.
Faux.
Ces pièces ne sont pas rectangles : $5^2 + 7^2 = 74$, alors que $8^2 = 64$. Elles se recouvrent pourtant.

Correction
Pose le côté de 5 cm de l'une sur celui de l'autre. Fais de même pour les autres côtés. Les pièces se recouvrent, parfois après avoir retourné l'une d'elles.

Ce chapitre montre que trois longueurs suffisent à fixer un triangle.

Deux triangles qui se recouvrent exactement sont dits **isométriques**. Dans ce chapitre, tu apprends à le reconnaître sans découper ni décalquer.

Tu découvres aussi les triangles **semblables** : ils ont la même forme, mais pas forcément la même taille. Tu calcules enfin des longueurs que tu ne peux pas mesurer, comme la hauteur d'un poteau.

Triangles isométriques, éléments homologues

Superposer avec du papier calque

En clair. Pour comparer deux triangles dessinés, tu peux utiliser du papier calque. Tu décalques le premier triangle. Puis tu fais glisser le calque sur le second.

Tu as le droit de tourner le calque, et même de le retourner.

Devine : Le calque retourné

Construis sur ton cahier un triangle ABC avec $AB = 4$ cm, $BC = 6$ cm et $\widehat{ABC} = 50°$. Ton voisin a construit un triangle EFG.

Ton calque ne recouvre exactement son triangle qu'après avoir été retourné. Que conclus-tu ?

A. Les triangles sont différents, car il a fallu retourner le calque.

Faux.
Retourner le calque ne change ni les longueurs ni les angles.

B. Les triangles se superposent : même forme et même taille.

Juste.
Juste : le calque retourné les recouvre exactement.

C. Ils ont la même forme, mais pas la même taille.

Faux.
Le calque recouvre exactement : les tailles sont les mêmes.

D. On ne peut pas comparer : les lettres ne sont pas les mêmes.

Faux.
Les noms des sommets ne changent rien aux longueurs.

Correction
Le calque retourné recouvre exactement le triangle EFG. Les deux triangles ont donc la même forme et la même taille.

Retourner le calque est permis. On dit que ces triangles sont isométriques : c'est la définition qui suit.

Définition : Triangles isométriques

Deux triangles sont **isométriques** lorsqu'on peut les superposer exactement. Par exemple, le dessin de l'un, décalqué sur du papier calque, recouvre exactement l'autre ; on a le droit de retourner le calque.

Les sommets qui se recouvrent sont dits **homologues**. Les côtés homologues et les angles homologues sont ceux qui se recouvrent.

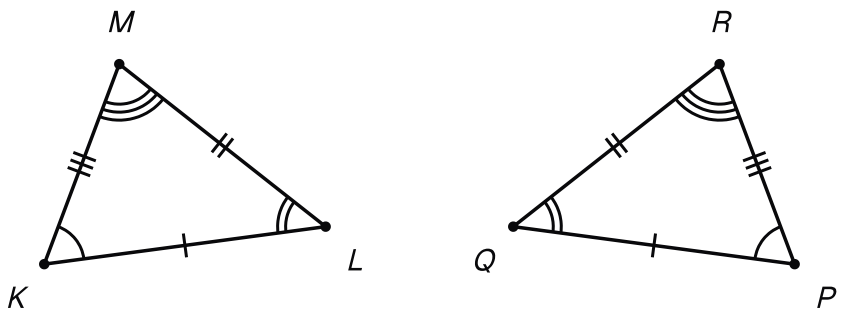
On nomme les deux triangles en écrivant les sommets homologues dans le même ordre. « Les triangles ABC et EFG sont isométriques » signifie que A et E, B et F, C et G sont homologues.

Exemple : lire les éléments homologues

Les triangles KLM et PQR sont isométriques. L'ordre des lettres donne les sommets homologues : K et P, L et Q, M et R.

- Côtés homologues : $[KL]$ et $[PQ]$, $[LM]$ et $[QR]$, $[MK]$ et $[RP]$.
- Angles homologues : $\widehat{LKM}$ et $\widehat{QPR}$, $\widehat{KLM}$ et $\widehat{PQR}$, $\widehat{KML}$ et $\widehat{PRQ}$.

Deux côtés sont homologues quand leurs extrémités sont des sommets homologues.



Les triangles KLM et PQR, le second retourné : les mêmes codages relient K à P, L à Q et M à R, côtés comme angles.

Ce que le calque conserve

Vérifie : Mesurer après le calque

Les triangles KLM et PQR de l'exemple se superposent. Tu mesures $KL = 5$ cm et $\widehat{KLM} = 70°$. Que lis-tu sur le triangle PQR ?

A. $QR = 5$ cm et $\widehat{QRP} = 70°$

Faux.

Le côté $[QR]$ est homologue de $[LM]$, pas de $[KL]$.

B. $PR = 5$ cm et $\widehat{PRQ} = 70°$

Faux.

Ce ne sont pas les homologues : relis l'ordre des lettres.

C. $PQ = 5$ cm et $\widehat{PQR} = 70°$

Juste.

Juste : $[PQ]$ recouvre $[KL]$, et l'angle de sommet Q recouvre celui de sommet L.

D. Rien : il faut aussi mesurer le triangle PQR.

Faux.

Des éléments qui se recouvrent ont la même mesure : inutile de mesurer encore.

Correction

Le côté $[PQ]$ recouvre $[KL]$: $PQ = 5$ cm. L'angle $\widehat{PQR}$ recouvre $\widehat{KLM}$: il mesure $70°$.

Des éléments qui se recouvrent ont la même mesure. C'est la propriété qui suit.

Propriété : Éléments homologues de deux triangles isométriques

Si les triangles ABC et EFG sont isométriques, alors :

- leurs côtés homologues ont la même longueur : $AB = EF$, $BC = FG$ et $CA = GE$;
- leurs angles homologues ont la même mesure : $\widehat{BAC} = \widehat{FEG}$, $\widehat{ABC} = \widehat{EFG}$ et $\widehat{ACB} = \widehat{EGF}$.

Remarque : Un résultat admis

Ce résultat est admis. Tu l'as constaté avec le calque : des éléments qui se recouvrent ont la même mesure.

Exemple : écrire les six égalités

Les triangles DEF et STU sont isométriques. D'après la propriété des éléments homologues :

- $DE = ST$, $EF = TU$ et $FD = US$;
- $\widehat{EDF} = \widehat{TSU}$, $\widehat{DEF} = \widehat{STU}$ et $\widehat{DFE} = \widehat{SUT}$.

Par exemple, si $DE = 6$ cm et $\widehat{DFE} = 42°$, alors $ST = 6$ cm et $\widehat{SUT} = 42°$.

L'ordre des sommets

Attention : l'ordre des lettres compte

✗ « Le calque pose H sur Y, I sur X et J sur Z. Donc $IJ = YZ$. »

✓ Le nom des triangles doit suivre les sommets homologues : H avec Y, I avec X, J avec Z. On écrit « les triangles HIJ et YXZ sont isométriques ».

Le côté $[IJ]$ a pour homologue $[XZ]$. Donc $IJ = XZ$, et non YZ.

Trouve l'erreur : Bien nommer

Le calque montre que R recouvre W, que S recouvre U et que T recouvre V. Quelle phrase est juste ?

A. Les triangles RST et UVW sont isométriques.

Faux.

Cet ordre associe R à U, alors que R recouvre W.

B. Les triangles RST et WUV sont isométriques.

Juste.

Juste : R et W, S et U, T et V sont dans le même ordre.

C. Les triangles RST et VWU sont isométriques.

Faux.

Cet ordre associe R à V, alors que R recouvre W.

D. Les triangles RST et WVU sont isométriques.

Faux.

Cet ordre associe S à V, alors que S recouvre U.

Correction

On écrit les sommets homologues dans le même ordre : R avec W, S avec U, T avec V.

La phrase juste est donc « les triangles RST et WUV sont isométriques ». On en déduit par exemple $ST = UV$.

À toi : Lire les mesures homologues

Les triangles ABC et XYZ sont isométriques. On sait que $AB = 3$ cm, $BC = 7$ cm, $CA = 5$ cm et $\widehat{BAC} = 120°$. Donne toutes les mesures que tu peux lire sur le triangle XYZ.

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Écris d'abord les sommets homologues, dans l'ordre des lettres.

Indice 2

Applique la propriété des éléments homologues aux trois côtés, puis à l'angle.

Indice 3

Point délicat : l'angle $\widehat{BAC}$ a son sommet en A ; son homologue a son sommet en X.

Réponse

Sommets homologues. L'ordre des lettres associe A et X, B et Y, C et Z.

Mesures. D'après la propriété des éléments homologues de deux triangles isométriques :

- $XY = 3$ cm, $YZ = 7$ cm et $ZX = 5$ cm ;
- $\widehat{YXZ} = 120°$.

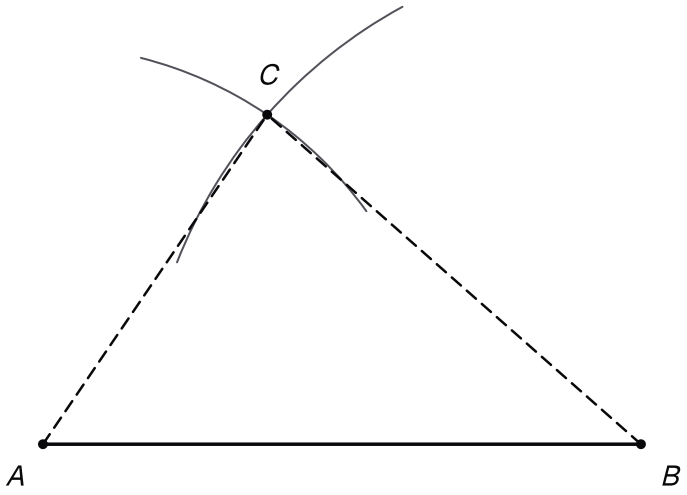
Conclusion. On lit sur XYZ ses trois côtés et l'angle de sommet X.

Les trois cas d'isométrie

Trois côtés suffisent

Rappel : pour construire un triangle de côtés donnés, trace d'abord un côté. Puis trace deux arcs de cercle au compas, centrés aux deux extrémités. Leur point de rencontre est le troisième sommet.

La construction est possible si le plus grand côté est plus court que la somme des deux autres.



La construction au compas : le côté [AB] est tracé, puis deux arcs centrés en A et en B se coupent au troisième sommet C.

Devine : Toute la classe construit

Chaque élève de la classe construit un triangle ABC avec $AB = 6$ cm, $BC = 5$ cm et $CA = 4$ cm. Chacun décalque son triangle et pose le calque sur celui de son voisin. Que se passe-t-il ?

A. Chaque triangle est différent, car chacun trace à sa façon.

Faux.

Les tracés diffèrent par leur place sur la feuille, pas par leur forme ni leur taille.

B. Les angles changent d'un élève à l'autre.

Faux.

Les trois longueurs imposées fixent aussi les angles.

C. Tout dépend du côté tracé en premier.

Faux.

Commencer par un autre côté donne le même triangle, placé autrement.

D. Tous les calques se recouvrent, parfois retournés.

Juste.

Juste : trois longueurs fixent le triangle.

Correction

Tous les triangles se superposent, parfois après avoir retourné le calque. Les angles sont donc les mêmes chez tous les élèves.

Trois longueurs suffisent à fixer un triangle : c'est le premier cas d'isométrie.

Propriété : Premier cas d'isométrie : les trois côtés

Si deux triangles ont leurs trois côtés respectivement de même longueur, alors ils sont isométriques.

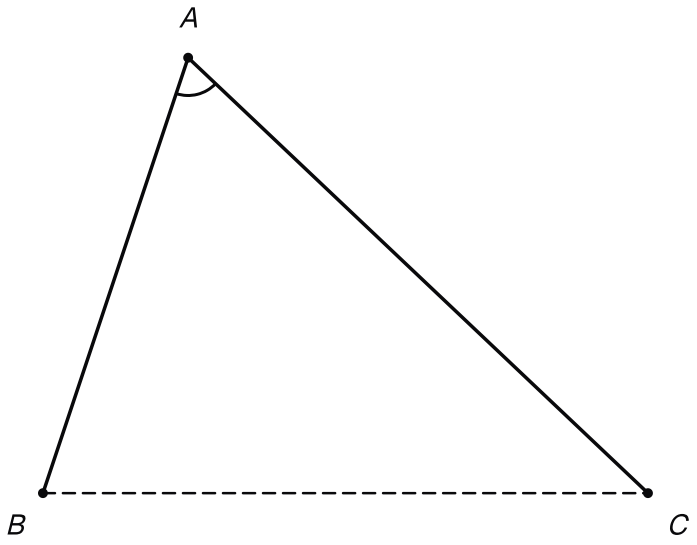
Autrement dit : si $AB = EF$, $BC = FG$ et $CA = GE$, alors les triangles ABC et EFG sont isométriques.

Remarque : Un résultat admis

Ce résultat est admis. Toute la classe l'a constaté : des triangles construits avec les mêmes trois longueurs se superposent.

Deux côtés et un angle

Dans un triangle, deux côtés ont toujours un sommet commun. L'angle de ce sommet est l'**angle compris** entre ces deux côtés. Par exemple, dans le triangle ABC, l'angle $\widehat{BAC}$ est compris entre $[AB]$ et $[AC]$.



Dans le triangle ABC, l'angle BAC, de sommet A, est formé par les deux côtés [AB] et [AC] : c'est l'angle compris entre eux.

Devine : Deux côtés et l'angle entre eux

Construis un triangle ABC avec $AB = 5$ cm, $AC = 3$ cm et l'angle compris $\widehat{BAC} = 60°$. Ton voisin fait de même. Vos triangles se superposent-ils ?

A. Oui : vous trouvez la même longueur BC.

Juste.

Juste : une fois l'angle tracé, les points B et C sont placés sans aucun choix.

B. Non : il manque la longueur BC.

Faux.

La longueur BC n'a pas à être donnée : le tracé l'impose.

C. Seulement si vous tracez tous deux $[AB]$ horizontal.

Faux.

La place sur la feuille ne change ni les longueurs ni les angles.

D. Non : il faut connaître les trois angles.

Faux.

Les deux autres angles sont imposés par le tracé.

Correction

Trace $[AB]$, puis l'angle de $60°$ en A. Sur le second côté de l'angle, place C à 3 cm de A. Il n'y a aucun choix : tous les élèves obtiennent le même triangle.

Tu mesures BC : environ $4{,}4$ cm, chez toi comme chez ton voisin.

Propriété : Deuxième cas d'isométrie : un angle compris entre deux côtés

Si deux triangles ont un angle de même mesure, compris entre deux côtés respectivement de même longueur, alors ils sont isométriques.

Autrement dit : si $AB = EF$, $AC = EG$ et $\widehat{BAC} = \widehat{FEG}$, alors les triangles ABC et EFG sont isométriques.

Remarque : Un résultat admis

Ce résultat est admis. Tu l'as constaté en construisant le triangle : l'angle compris et ses deux côtés ne laissent aucun choix.

Repérer l'angle compris

Vérifie : Quel angle est compris ?

Dans le triangle EFG, quel angle est compris entre les côtés $[EF]$ et $[FG]$?

A. L'angle $\widehat{FEG}$
Faux.
Son sommet E n'est pas sur le côté $[FG]$.

B. L'angle $\widehat{EFG}$
Juste.
Juste : F est le sommet commun aux deux côtés.

C. L'angle $\widehat{EGF}$
Faux.
Son sommet G n'est pas sur le côté $[EF]$.

D. Aucun angle
Faux.
Deux côtés d'un triangle ont toujours un sommet commun.

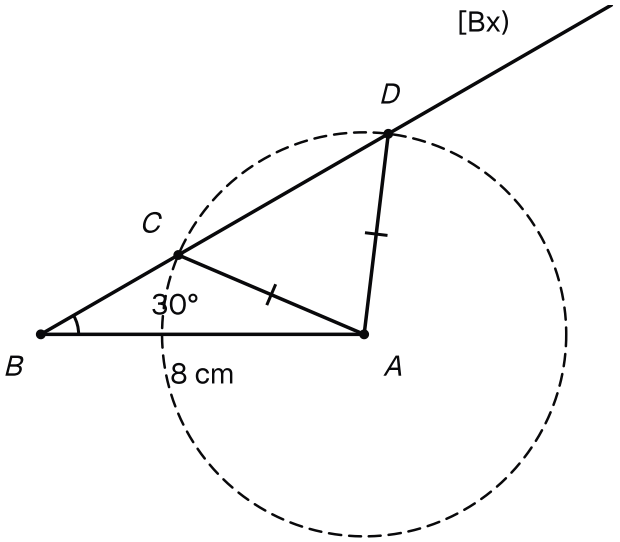
Correction
Les côtés $[EF]$ et $[FG]$ ont le sommet F en commun. L'angle compris entre eux a ce sommet au milieu de son nom : c'est $\widehat{EFG}$.

Attention : l'angle doit être compris

✗ « Les triangles ABC et ABD ont le côté $[AB]$ en commun, $AC = AD = 5$ cm et le même angle en B. Ils sont isométriques. »

✓ L'angle en B n'est pas compris entre $[AB]$ et $[AC]$. Construis la figure : $AB = 8$ cm et une demi-droite $[Bx)$ avec $\widehat{ABx} = 30°$. Le cercle de centre A et de rayon 5 cm coupe $[Bx)$ en deux points C et D.

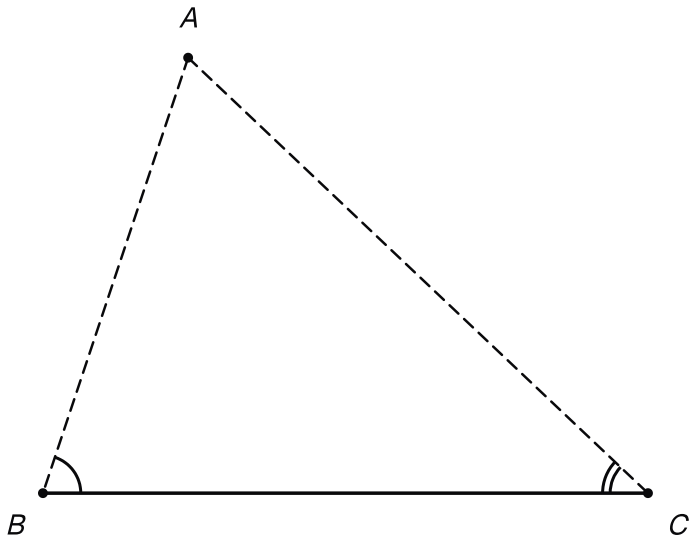
Tu mesures BC et BD : elles diffèrent de 6 cm. Les triangles ne sont donc pas isométriques.



Le cercle de centre A et de rayon 5 cm coupe la demi-droite [Bx) en deux points C et D : les triangles ABC et ABD ont les mêmes données, mais pas la même forme.

Un côté et deux angles

Un côté d'un triangle a deux extrémités. Les deux angles qui ont leurs sommets en ces extrémités sont **adjacents** à ce côté. Par exemple, dans le triangle ABC, les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ sont adjacents au côté $[BC]$.



Le côté [BC] et ses deux extrémités : les angles ABC et ACB, marqués aux sommets B et C, sont les angles adjacents à ce côté.

Devine : Un côté et deux angles

Construis un triangle ABC avec $BC = 7$ cm, $\widehat{ABC} = 40°$ et $\widehat{ACB} = 65°$. Ces deux angles sont adjacents au côté $[BC]$. Que peux-tu dire du troisième angle $\widehat{BAC}$?

A. Il dépend de la construction de chacun.

Faux.

Les deux demi-droites tracées en B et en C se coupent en un seul point.

B. Il mesure $105°$ chez tous les élèves.

Faux.

C'est la somme $40 + 65$: il faut la retrancher de 180.

C. Il mesure $75°$ chez tous les élèves.

Juste.

Juste : $180 - 40 - 65 = 75$.

D. On ne peut pas le savoir sans mesurer AB.

Faux.

La somme des angles d'un triangle suffit.

Correction

Les demi-droites tracées en B et en C se coupent en un seul point A. Tous les élèves obtiennent donc le même triangle.

La somme des angles d'un triangle vaut $180°$. Donc :

$$\widehat{BAC} = 180^\circ - 40^\circ - 65^\circ$$
$$= 75^\circ$$

Propriété : Troisième cas d'isométrie : un côté et ses deux angles adjacents

Si deux triangles ont un côté de même longueur, et si les deux angles adjacents à ce côté sont respectivement de même mesure, alors ils sont isométriques.

Autrement dit : si $BC = FG$, $\widehat{ABC} = \widehat{EFG}$ et $\widehat{ACB} = \widehat{EGF}$, alors les triangles ABC et EFG sont isométriques.

Remarque : Un résultat admis

Ce résultat est admis. Tu l'as constaté : un côté et ses deux angles adjacents fixent le troisième sommet.

Choisir le bon cas

Méthode : démontrer que deux triangles sont isométriques

1. **Écris** les deux triangles, sommets homologues dans le même ordre.
2. **Relève** les égalités connues : données, codages, propriétés de la figure.
3. **Cherche** le cas qui convient : trois côtés ; deux côtés et l'angle compris ; un côté et ses deux angles adjacents.
4. **Conclus** en nommant le cas employé.

Exemple : quel cas pour quelle paire ?

- $AB = RS = 4$ cm, $BC = ST = 9$ cm et $CA = TR = 6$ cm. D'après le premier cas d'isométrie, les triangles ABC et RST sont isométriques.
- $DE = UV = 7$ cm, $DF = UW = 3$ cm et $\widehat{EDF} = \widehat{VUW} = 48^\circ$. Cet angle est compris entre les deux côtés. D'après le deuxième cas d'isométrie, DEF et UVW sont isométriques.
- $GH = XY = 9$ cm, $\widehat{HGK} = \widehat{YXZ} = 35^\circ$ et $\widehat{GHK} = \widehat{XYZ} = 80^\circ$. Ces angles sont adjacents à $[GH]$ et à $[XY]$. D'après le troisième cas d'isométrie, GHK et XYZ sont isométriques.

À toi : Reconnaître le cas

Les triangles LMN et PQR vérifient $LM = PQ = 6$ cm, $MN = QR = 8$ cm et $\widehat{LMN} = \widehat{PQR} = 55°$. Sont-ils isométriques ? Justifie en citant le cas.

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Trouve le sommet commun aux deux côtés connus, dans chaque triangle.
Indice 2
Dans le triangle LMN, les côtés $[LM]$ et $[MN]$ ont le sommet M en commun.
Indice 3
Point délicat : vérifie que l'angle égal est bien celui de ce sommet commun.

Réponse
Angle compris. Les côtés $[LM]$ et $[MN]$ ont le sommet M en commun : l'angle $\widehat{LMN}$ est compris entre eux. De même, $\widehat{PQR}$ est compris entre $[PQ]$ et $[QR]$.

Égalités. On a $LM = PQ$, $MN = QR$ et $\widehat{LMN} = \widehat{PQR}$.

Conclusion. D'après le deuxième cas d'isométrie, les triangles LMN et PQR sont isométriques.

Utiliser des triangles isométriques

Prouver sans mesurer

En clair. Une mesure au rapporteur n'est jamais parfaite. Deux angles de $52°$ et $53°$ semblent égaux sur un dessin.

Pour être sûr, on démontre. Deux triangles isométriques donnent des égalités sans aucune mesure.

Devine : Un triangle isocèle

Le triangle ABC est isocèle en A : $AB = AC$. Le point I est le milieu de $[BC]$. Comment prouver que $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$?

A. Mesurer les deux angles avec soin au rapporteur.
Faux.
Une mesure donne une valeur approchée : elle ne prouve rien.

B. Dire que la figure semble symétrique.
Faux.
Une impression n'est pas une preuve.

C. Montrer que ABI et ACI sont isométriques.
Juste.
Juste : ces deux angles seront alors homologues.

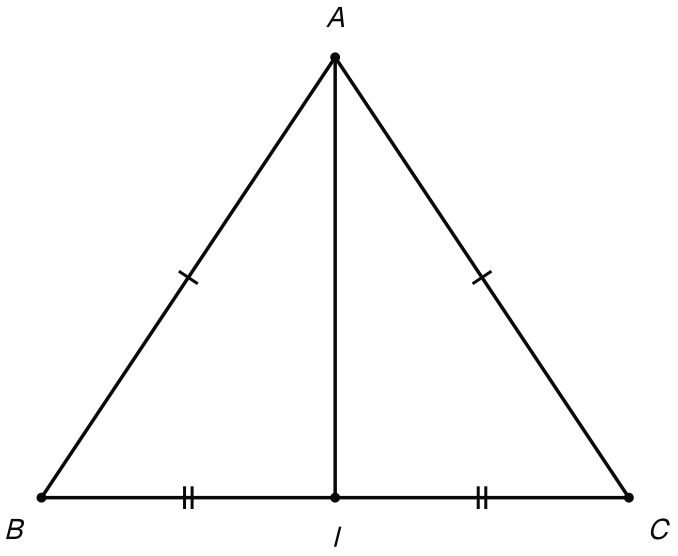
D. Tracer une figure plus grande pour mieux voir.
Faux.
Une figure plus grande reste une figure : rien n'est démontré.

Correction

On compare les triangles ABI et ACI. Ils ont $AB = AC$, $BI = CI$ et le côté $[AI]$ en commun.

D'après le premier cas d'isométrie, ils sont isométriques. Les angles $\widehat{ABI}$ et $\widehat{ACI}$ sont homologues : ils sont égaux.

C'est la méthode qui suit.



Le triangle ABC isocèle en A et le milieu I de sa base : les codages disent AB = AC et BI = CI, le segment [AI] est tracé.

Méthode : prouver une égalité avec deux triangles isométriques

1. **Choisis** deux triangles qui contiennent les deux longueurs, ou les deux angles, à comparer.
2. **Démontre** qu'ils sont isométriques, en citant le cas.
3. **Vérifie** que les deux éléments à comparer sont homologues.
4. **Conclus** avec la propriété des éléments homologues.

Exemple : le milieu de la base d'un triangle isocèle

Construis un triangle ABC avec $AB = AC = 5$ cm et $BC = 6$ cm. Place le milieu I de $[BC]$.

Isométrie. Les triangles ABI et ACI ont $AB = AC$, $BI = CI$ et le côté $[AI]$ en commun. D'après le premier cas d'isométrie, ils sont isométriques.

Angles égaux. Les angles $\widehat{AIB}$ et $\widehat{AIC}$ sont homologues : ils sont égaux.

Angle droit. Ces deux angles forment un angle plat : leur somme vaut $180°$. Chacun mesure donc $90°$.

Avec les autres cas

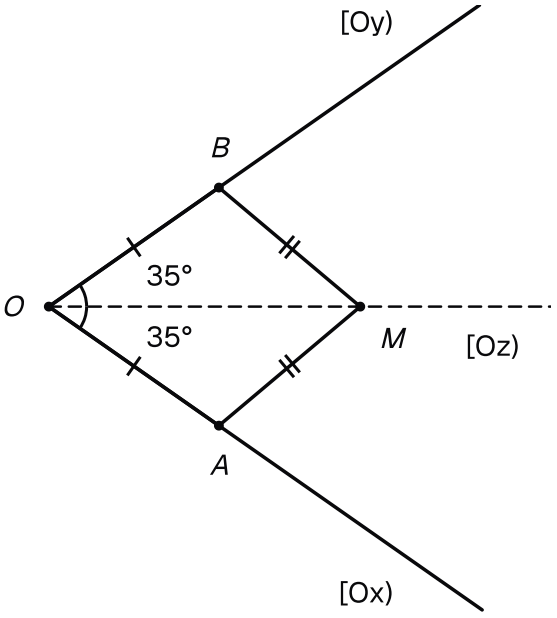
Exemple : deux segments égaux

Construis un angle $\widehat{xOy}$ de $70°$ et sa bissectrice $[Oz)$. Place A sur $[Ox)$ et B sur $[Oy)$, avec $OA = OB = 4$ cm. Place M sur $[Oz)$, avec $OM = 6$ cm.

Montrons que $MA = MB$.

- Les triangles OAM et OBM ont $OA = OB$ et le côté $[OM]$ en commun.
- La bissectrice partage l'angle en deux angles de $35°$: $\widehat{AOM} = \widehat{BOM}$. Cet angle est compris entre les deux côtés.
- D'après le deuxième cas d'isométrie, OAM et OBM sont isométriques.

Les côtés $[MA]$ et $[MB]$ sont homologues : $MA = MB$.



La bissectrice [Oz) de l'angle xOy de 70 degrés : OA = OB, les deux angles de 35 degrés en O, et la conclusion MA = MB.

Vérifie : Quelle longueur est égale ?

Les triangles ABC et DEF vérifient $AB = DE = 6$ cm, $\widehat{BAC} = \widehat{EDF} = 50°$ et $\widehat{ABC} = \widehat{DEF} = 60°$. Quelle longueur est égale à BC ?

A. La longueur DF

Faux.

Le côté $[DF]$ est homologue de $[AC]$: D et F vont avec A et C.

B. La longueur EF

Juste.

Juste : $[EF]$ relie E et F, homologues de B et C.

C. La longueur DE

Faux.

On sait que $DE = AB$, pas que $DE = BC$.

D. Aucune : on ne connaît pas BC.

Faux.

On ne connaît pas sa valeur, mais elle est égale à celle de son homologue.

Correction

Le côté $[AB]$ et ses deux angles adjacents sont égaux au côté $[DE]$ et à ses deux angles adjacents.

D'après le troisième cas d'isométrie, les triangles ABC et DEF sont isométriques. Le côté $[BC]$ a pour homologue $[EF]$: $BC = EF$.

Trouve l'erreur : Une conclusion trop rapide

Inès écrit : « Les triangles RST et UVW sont isométriques, donc $RS = VW$. » Où est l'erreur ?

A. Il n'y a pas d'erreur.

Faux.

Le côté $[RS]$ va avec $[UV]$, pas avec $[VW]$.

B. Deux triangles isométriques n'ont pas de côtés égaux.

Faux.

Si : leurs côtés homologues sont égaux.

C. Il fallait conclure $RS = UW$.

Faux.

Le côté $[UW]$ est homologue de $[RT]$.

D. Les côtés $[RS]$ et $[VW]$ ne sont pas homologues.

Juste.

Juste : l'homologue de $[RS]$ est $[UV]$.

Correction

L'ordre des lettres associe R à U, S à V et T à W. L'homologue de $[RS]$ est $[UV]$: la bonne conclusion est $RS = UV$.

Avant de conclure, vérifie toujours que les deux éléments sont homologues.

À toi, puis le coin examen

À toi : Deux segments dans un triangle isocèle

Le triangle RST est isocèle en R : $RS = RT = 9$ cm et $\widehat{SRT} = 50°$. On place U sur $[RS]$ et V sur $[RT]$, avec $RU = RV = 4$ cm. Construis la figure, puis montre que $SV = TU$.

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Cherche deux triangles : l'un contient $[SV]$, l'autre contient $[TU]$.
Indice 2
Compare les triangles RSV et RTU : quels côtés sont égaux ? Quel angle ont-ils en commun ?
Indice 3
Point délicat : l'angle de sommet R est compris entre $[RS]$ et $[RV]$, et entre $[RT]$ et $[RU]$.

Réponse
Deux triangles. Les triangles RSV et RTU ont $RS = RT$ et $RV = RU$. Ils ont aussi le même angle de sommet R : $\widehat{SRV} = \widehat{TRU}$. Cet angle est compris entre les deux côtés.

Isométrie. D'après le deuxième cas d'isométrie, RSV et RTU sont isométriques.

Conclusion. Les côtés $[SV]$ et $[TU]$ sont homologues. Donc $SV = TU$.

Remarque **: Coin examen : rédiger une égalité par isométrie**

À l'examen, écris une égalité par ligne, chacune avec sa raison. Par exemple, pour un triangle ABC isocèle en A et le milieu I de $[BC]$:

« Dans les triangles ABI et ACI :

- $AB = AC$, car ABC est isocèle en A ;
- $BI = CI$, car I est le milieu de $[BC]$;
- le côté $[AI]$ est commun.

D'après le premier cas d'isométrie, ABI et ACI sont isométriques.

Les angles $\widehat{BAI}$ et $\widehat{CAI}$ sont homologues, donc égaux. »

Triangles semblables, rapport de similitude

Même forme, autre taille

En clair. Sur le plan d'une pièce à l'échelle $\frac{1}{50}$, chaque longueur réelle est divisée par 50. Un mur de 4 m y mesure 8 cm. Une maquette fait de même.

Un triangle dessiné sur le plan a la même forme que le vrai, mais pas la même taille. Ses côtés sont proportionnels à ceux du vrai triangle.

Devine : Trois quotients

Le triangle ABC a pour côtés $AB = 2$ cm, $BC = 3$ cm et $CA = 4$ cm. Le triangle EFG a pour côtés $EF = 5$ cm, $FG = 7{,}5$ cm et $GE = 10$ cm.

Calcule $\frac{EF}{AB}$, $\frac{FG}{BC}$ et $\frac{GE}{CA}$. Que remarques-tu ?

A. Les trois quotients sont égaux à $2{,}5$.

Juste.

Juste : chaque côté de EFG vaut $2{,}5$ fois son homologue.

B. Les trois quotients sont différents.

Faux.

Refais les divisions : $5 \div 2$, $7{,}5 \div 3$ et $10 \div 4$.

C. Les trois différences de longueurs sont égales.

Faux.

Les différences valent 3, $4{,}5$ et 6 : ce sont les quotients qui sont égaux.

D. Les trois quotients valent 1.

Faux.

Un quotient égal à 1 voudrait dire deux côtés de même longueur.

Correction

On calcule les trois quotients :

$$\frac{EF}{AB} = \frac{5}{2} = 2{,}5$$
$$\frac{FG}{BC} = \frac{7{,}5}{3} = 2{,}5$$
$$\frac{GE}{CA} = \frac{10}{4} = 2{,}5$$

Les côtés de EFG sont proportionnels à ceux de ABC. On dit que ces triangles sont semblables : c'est la définition qui suit.

Définition : Triangles semblables, rapport de similitude

Pour comparer deux triangles ABC et EFG, on associe A et E, B et F, C et G : ces sommets sont dits **homologues**, ainsi que les côtés qui les relient, comme $[AB]$ et $[EF]$.

Les triangles ABC et EFG sont **semblables** lorsque les longueurs des côtés de l'un sont respectivement proportionnelles aux longueurs des côtés homologues de l'autre :

$$\frac{EF}{AB} = \frac{FG}{BC} = \frac{GE}{CA}.$$

Ce quotient commun, noté k, est le **rapport de similitude** du triangle EFG par rapport au triangle ABC. On a alors $EF = k \times AB$, $FG = k \times BC$ et $GE = k \times CA$.

Exemple : un rapport de similitude

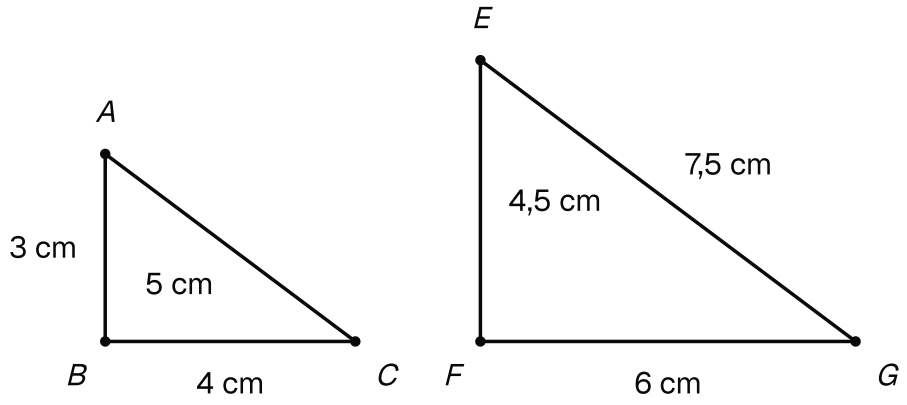
Le triangle ABC a pour côtés $AB = 3$ cm, $BC = 4$ cm et $CA = 5$ cm. Le triangle EFG a pour côtés $EF = 4{,}5$ cm, $FG = 6$ cm et $GE = 7{,}5$ cm.

Dans deux triangles semblables, le plus petit côté va avec le plus petit, le moyen avec le moyen, le plus grand avec le plus grand. C'est le seul rapprochement possible.

Ici, les sommets sont nommés dans cet ordre. On calcule les trois quotients :

$$\frac{EF}{AB} = \frac{4{,}5}{3} = 1{,}5$$
$$\frac{FG}{BC} = \frac{6}{4} = 1{,}5$$
$$\frac{GE}{CA} = \frac{7{,}5}{5} = 1{,}5$$

Les trois quotients sont égaux : les triangles ABC et EFG sont semblables. Le rapport de similitude du triangle EFG par rapport au triangle ABC est $k = 1{,}5$.



Les triangles ABC, de côtés 3, 4 et 5 cm, et EFG, de côtés 4,5, 6 et 7,5 cm : même forme, chaque côté de EFG valant une fois et demie son homologue.

Remarque : isométriques et semblables

Deux triangles isométriques sont aussi semblables. Leurs côtés homologues sont égaux : les trois quotients valent 1. Le rapport de similitude est donc $k = 1$.

Le sens du rapport

Attention : quel triangle au numérateur ?

✗ « Les triangles ABC et EFG de l'exemple sont semblables. Le rapport de ABC par rapport à EFG vaut donc $1{,}5$. »

✓ Le rapport $1{,}5$ est celui de EFG par rapport à ABC : les côtés de EFG sont au numérateur. Pour ABC par rapport à EFG, on calcule :

$$\frac{AB}{EF} = \frac{3}{4{,}5} = \frac{2}{3}$$

On divise toujours deux côtés **homologues**, jamais deux côtés pris au hasard.

Vérifie : Associer les bons côtés

Le triangle RST a pour côtés $RS = 6$ cm, $ST = 10$ cm et $TR = 8$ cm. Le triangle UVW a pour côtés $UV = 20$ cm, $VW = 16$ cm et $WU = 12$ cm. Quel est le rapport de similitude de UVW par rapport à RST ?

A. $\frac{UV}{RS} = \frac{10}{3}$
Faux.
Les côtés $[UV]$ et $[RS]$ ne sont pas homologues : le plus grand côté va avec le plus grand.

B. $k = 2$
Juste.
Juste : $\frac{12}{6} = \frac{16}{8} = \frac{20}{10} = 2$.

C. $k = \frac{1}{2}$
Faux.
C'est le rapport de RST par rapport à UVW.

D. $\frac{VW}{ST} = 1{,}6$
Faux.
Les côtés $[VW]$ et $[ST]$ ne sont pas homologues.

Correction
On range les côtés : $6, 8, 10$ d'une part, $12, 16, 20$ d'autre part. Les quotients des côtés homologues valent :

$$\frac{12}{6} = \frac{16}{8} = \frac{20}{10} = 2$$

Les sommets homologues sont R et W, S et U, T et V. Les triangles RST et WUV sont semblables. Le rapport de WUV par rapport à RST est $k = 2$.

À toi : Semblables ou non ?

Le triangle KLM a pour côtés $KL = 5$ cm, $LM = 6$ cm et $MK = 8$ cm. Le triangle PQR a pour côtés $PQ = 4$ cm, $QR = 4{,}8$ cm et $RP = 6{,}4$ cm.

Ces triangles sont-ils semblables ? Si oui, donne le rapport de PQR par rapport à KLM.

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Range les côtés de chaque triangle du plus petit au plus grand.
Indice 2
Calcule $\frac{PQ}{KL}$, $\frac{QR}{LM}$ et $\frac{RP}{MK}$.
Indice 3
Point délicat : on cherche le rapport de PQR par rapport à KLM ; PQR est donc au numérateur.

Réponse
Quotients. Dans chaque triangle, les longueurs sont données de la plus courte à la plus longue. On divise chaque côté de PQR par son homologue :

$$\frac{PQ}{KL} = \frac{4}{5} = 0{,}8$$
$$\frac{QR}{LM} = \frac{4{,}8}{6} = 0{,}8$$
$$\frac{RP}{MK} = \frac{6{,}4}{8} = 0{,}8$$

Conclusion. Les trois quotients sont égaux. D'après la définition, les triangles KLM et PQR sont semblables. Le rapport de PQR par rapport à KLM est $k = 0{,}8$.

Et les angles ?

En clair. Prends les triangles de côtés 3, 4, 5 et $4{,}5$, 6, $7{,}5$, en cm. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, ils sont rectangles : $3^2 + 4^2 = 5^2$ et $4{,}5^2 + 6^2 = 7{,}5^2$.

Construis-les, puis mesure leurs angles aigus : tu trouves environ $37°$ et $53°$ dans chacun.

Pourquoi est-ce vrai ? On place dans le grand triangle une copie du petit, avec un sommet commun. Le théorème de Thalès montre que cette copie est isométrique au petit triangle. Les angles correspondants reportent ensuite ses angles sur le grand.

Propriété : Angles de deux triangles semblables

Si les triangles ABC et EFG sont semblables, alors leurs angles homologues ont la même mesure :

$$\widehat{BAC} = \widehat{FEG}, \quad \widehat{ABC} = \widehat{EFG} \quad \text{et} \quad \widehat{ACB} = \widehat{EGF}.$$

Démonstration

Étape 1. Soit k le rapport de similitude. Quitte à échanger les rôles des deux triangles, on suppose $k \leq 1$. Si $k = 1$, les triangles sont isométriques (premier cas d'isométrie) : leurs angles homologues sont égaux.

Étape 2. Sinon, on place M sur $[AB]$ et N sur $[AC]$ tels que $AM = EF$ et $AN = EG$. Alors $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = k$, avec les points dans le même ordre. D'après la réciproque du théorème de Thalès, (MN) est parallèle à (BC).

Étape 3. D'après le théorème de Thalès, $\dfrac{MN}{BC} = k$, donc $MN = k \times BC = FG$.

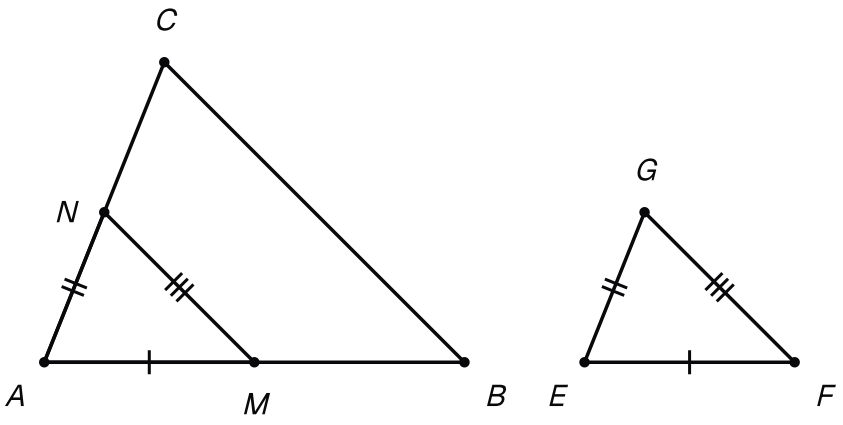
Étape 4. Les triangles AMN et EFG ont leurs trois côtés égaux : ils sont isométriques (premier cas d'isométrie), et leurs angles homologues sont égaux.

Étape 5. Comme (MN) est parallèle à (BC), les angles correspondants $\widehat{AMN}$ et $\widehat{ABC}$ sont égaux, ainsi que $\widehat{ANM}$ et $\widehat{ACB}$. Avec l'étape 4 et $\widehat{MAN} = \widehat{BAC}$, on obtient les trois égalités annoncées.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

L'idée : **placer un petit triangle dans le grand**. On suppose EFG plus petit que ABC.

- On place M sur $[AB]$ et N sur $[AC]$, avec $AM = EF$ et $AN = EG$. La réciproque du théorème de Thalès donne une parallèle : (MN) est parallèle à (BC).
- Le théorème de Thalès donne $MN = FG$. Les triangles AMN et EFG ont leurs trois côtés égaux : ils sont isométriques.
- Les angles correspondants relient enfin les angles de AMN à ceux de ABC.



La copie AMN du petit triangle placée dans le grand triangle ABC, avec AM = EF et AN = EG ; la droite (MN) est parallèle à (BC).

Vérifie : L'argument clé

Dans la preuve, M est sur $[AB]$ et N sur $[AC]$, avec $AM = EF$ et $AN = EG$. Pourquoi les triangles AMN et EFG sont-ils isométriques ?

A. Parce que (MN) est parallèle à (BC).

Faux.

Le parallélisme sert ensuite, pour comparer les angles.

B. D'après le deuxième cas d'isométrie.

Faux.

La preuve n'utilise aucun angle à ce moment : elle compare trois côtés.

C. D'après le premier cas : trois côtés égaux.

Juste.

Juste : $AM = EF$, $AN = EG$ et $MN = FG$.

D. Parce que leurs angles sont égaux.

Faux.

C'est ce qu'on veut démontrer : on ne peut pas s'en servir.

Correction

Par construction, $AM = EF$ et $AN = EG$. Le théorème de Thalès donne $MN = k \times BC = FG$.

Les trois côtés sont égaux : d'après le premier cas d'isométrie, AMN et EFG sont isométriques.

Exemple **: retrouver un angle**

Les triangles ABC et EFG sont semblables, avec $\widehat{BAC} = 50^\circ$ et $\widehat{ABC} = 60^\circ$.

Angles homologues. D'après la propriété des angles de deux triangles semblables, $\widehat{FEG} = 50^\circ$ et $\widehat{EFG} = 60^\circ$.

Troisième angle. La somme des angles d'un triangle vaut 180°. Donc :

$$\begin{aligned}\widehat{EGF} &= 180^\circ - 50^\circ - 60^\circ \\ &= 70^\circ\end{aligned}$$

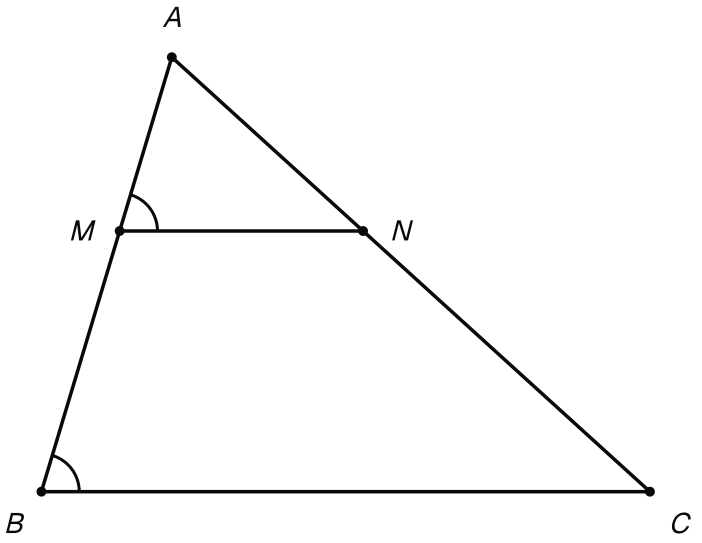
L'ordre compte. Pour les triangles semblables « ABC et FEG », l'angle de 50° serait en F, et non en E.

Les cas de similitude

Une parallèle découpe un petit triangle

En clair. Construis un triangle ABC. Place un point M sur le segment $[AB]$. Trace la parallèle à (BC) passant par M : elle coupe $[AC]$ en N.

Le petit triangle AMN est emboîté dans le grand. Il a le même angle de sommet A. Et $\widehat{AMN} = \widehat{ABC}$, car ce sont des angles correspondants.



La parallèle à (BC) menée par M découpe le petit triangle AMN : l'angle en A est commun, et les angles AMN et ABC, correspondants, sont égaux.

Devine : Deux angles suffisent-ils ?

Deux triangles ont chacun un angle de $40°$ et un angle de $75°$. Leurs tailles sont différentes. À ton avis, sont-ils semblables ?

A. Non : il faut aussi connaître les côtés.

Faux.

Deux angles suffisent : c'est le cas de similitude qui suit.

B. Oui : ils ont la même forme.

Juste.

Juste : leurs troisièmes angles sont aussi égaux, à $65°$.

C. Seulement s'ils ont la même taille.

Faux.

Des triangles de même taille seraient isométriques : c'est plus fort.

D. On ne peut rien dire sans le troisième angle.

Faux.

Le troisième angle vaut $180° - 40° - 75° = 65°$ dans les deux.

Correction

Les troisièmes angles mesurent tous deux $180° - 40° - 75° = 65°$.

Place le petit triangle dans le grand : l'angle de $40°$ en commun, et le sommet de $75°$ du petit sur le même côté que celui du grand. Les angles de $75°$ sont alors correspondants et égaux.

Deux droites qui forment avec une sécante des angles correspondants égaux sont parallèles : le troisième côté du petit est parallèle à celui du grand. Le théorème de Thalès donne des côtés proportionnels : les triangles sont semblables.

Le cas des deux angles

Pourquoi est-ce vrai ? Prenons deux triangles ABC et EFG, avec EFG le plus petit. On place sur $[AB]$ un point M tel que $AM = EF$. La parallèle à (BC) passant par M coupe $[AC]$ en N.

Le petit triangle AMN est isométrique au triangle EFG. Le théorème de Thalès donne alors les quotients.

Propriété : Cas de similitude : deux angles

Si deux triangles ont deux angles respectivement de même mesure, alors ils sont semblables.

Autrement dit : si $\widehat{BAC} = \widehat{FEG}$ et $\widehat{ABC} = \widehat{EFG}$, alors les triangles ABC et EFG sont semblables. Leurs troisièmes angles sont aussi égaux, car la somme des angles d'un triangle vaut $180°$.

Démonstration

Étape 1. Quitte à échanger les rôles des deux triangles, on suppose $EF \leq AB$. Si $EF = AB$, les triangles sont isométriques (troisième cas d'isométrie) : les trois quotients valent 1, ils sont semblables.

Étape 2. Sinon, on place M sur $[AB]$ tel que $AM = EF$. La parallèle à (BC) passant par M coupe le segment $[AC]$ en un point N (admis sur la figure).

Étape 3. Les angles $\widehat{AMN}$ et $\widehat{ABC}$ sont correspondants, car (MN) est parallèle à (BC) : ils sont égaux, donc $\widehat{AMN} = \widehat{EFG}$. De plus, $\widehat{MAN} = \widehat{BAC} = \widehat{FEG}$.

Étape 4. Les triangles AMN et EFG ont un côté égal, $AM = EF$, et les deux angles adjacents égaux. D'après le troisième cas d'isométrie, ils sont isométriques : $AN = EG$ et $MN = FG$.

Étape 5. D'après le théorème de Thalès, $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$, c'est-à-dire $\dfrac{EF}{AB} = \dfrac{EG}{AC} = \dfrac{FG}{BC}$. Les triangles sont semblables.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Le geste : **une parallèle crée des angles égaux**. On place M sur $[AB]$ avec $AM = EF$, puis la parallèle à (BC) passant par M coupe $[AC]$ en N.

Cette parallèle donne $\widehat{AMN} = \widehat{ABC}$, par les angles correspondants. Le triangle AMN a alors un côté et ses deux angles adjacents égaux à ceux de EFG. Le théorème de Thalès transporte enfin les quotients de AMN à EFG.

Vérifie : Le cas d'isométrie de la preuve

Dans la preuve, M est sur $[AB]$ avec $AM = EF$, et (MN) est parallèle à (BC). Quel cas d'isométrie montre que AMN et EFG sont isométriques ?

A. Le premier cas : trois côtés égaux.

Faux.

À ce moment, on ne connaît pas encore AN et MN.

B. Le deuxième cas : un angle compris entre deux côtés.

Faux.

Un seul côté est connu : $AM = EF$.

C. Aucun : on utilise seulement le théorème de Thalès.

Faux.

Le théorème de Thalès ne vient qu'à la fin, pour les quotients.

D. Le troisième cas : un côté et ses deux angles adjacents.

Juste.

Juste : $AM = EF$, avec les angles de sommets A et M.

Correction

On sait que $AM = EF$. Les angles adjacents à $[AM]$ vérifient $\widehat{MAN} = \widehat{BAC} = \widehat{FEG}$ et $\widehat{AMN} = \widehat{EFG}$. D'après le troisième cas d'isométrie, AMN et EFG sont isométriques.

Exemple : un angle commun et des angles correspondants

Dans le triangle ABC de l'intuition, M est sur $[AB]$ et N sur $[AC]$, avec (MN) parallèle à (BC).

- L'angle de sommet A est commun aux deux triangles : $\widehat{MAN} = \widehat{BAC}$.
- Les angles $\widehat{AMN}$ et $\widehat{ABC}$ sont correspondants, car (MN) est parallèle à (BC) : ils sont égaux.

D'après le cas de similitude des deux angles, les triangles AMN et ABC sont semblables. **L'hypothèse compte** : sans la parallèle, l'angle en M peut changer, et la conclusion tombe.

Semblables, pas isométriques

Attention : des angles égaux ne donnent pas l'isométrie

✗ « Les deux triangles ont leurs trois angles égaux, donc ils sont isométriques. »

✓ Trois angles égaux donnent des triangles **semblables**. Pense à deux équerres de tailles différentes.

Elles ont toutes deux des angles de $30°$, $60°$ et $90°$, mais leurs plus grands côtés mesurent 10 cm et 25 cm. On ne peut pas les superposer. Pour l'isométrie, il faut aussi un côté égal.

Vérifie : Le troisième angle

Le triangle ABC a pour angles $\widehat{BAC} = 35°$ et $\widehat{ABC} = 65°$. Le triangle EFG a pour angles $\widehat{FEG} = 35°$ et $\widehat{EGF} = 80°$. Que peux-tu conclure ?

A. Ils sont semblables.

Juste.
Juste : $\widehat{ACB} = 80°$ et $\widehat{EFG} = 65°$.

B. Ils ne sont pas semblables : un seul angle est égal.

Faux.
Calcule les troisièmes angles avant de conclure.

C. Ils sont isométriques.

Faux.
Aucune longueur n'est donnée : l'isométrie ne peut pas être établie.

D. On ne peut rien conclure sans les côtés.

Faux.
Deux angles égaux suffisent pour la similitude.

Correction
La somme des angles d'un triangle vaut $180°$. Dans le triangle ABC :

$$\begin{aligned}\widehat{ACB} &= 180° - 35° - 65° \\ &= 80°\end{aligned}$$

Dans le triangle EFG :

$$\begin{aligned}\widehat{EFG} &= 180° - 35° - 80° \\ &= 65°\end{aligned}$$

Ainsi $\widehat{BAC} = \widehat{FEG}$ et $\widehat{ACB} = \widehat{EGF}$. D'après le cas de similitude des deux angles, les triangles ABC et EFG sont semblables.

Un angle et deux côtés proportionnels

Devine : Deux côtés proportionnels

Construis un triangle ABC avec $AB = 7{,}5$ cm, $AC = 6$ cm et $\widehat{BAC} = 55°$. Place M sur $[AB]$ avec $AM = 2{,}5$ cm, et N sur $[AC]$ avec $AN = 2$ cm. Mesure $\widehat{AMN}$ et $\widehat{ABC}$: que remarques-tu ?

A. Les deux angles sont très différents.

Faux.

Refais la mesure avec soin : les deux angles ont la même mesure.

B. On ne peut rien dire sans mesurer MN.

Faux.

La mesure des deux angles suffit : compare-les.

C. L'angle $\widehat{AMN}$ est le tiers de $\widehat{ABC}$.

Faux.

Les longueurs sont divisées par 3, pas les angles.

D. Les deux angles sont égaux.

Juste.

Juste : d'après la réciproque du théorème de Thalès, (MN) est parallèle à (BC).

Correction

On calcule les deux quotients :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{2{,}5}{7{,}5} = \frac{1}{3}$$
$$\frac{AN}{AC} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Les triangles AMN et ABC ont le même angle de sommet A, compris entre deux côtés proportionnels.

Tu trouves $\widehat{AMN} = \widehat{ABC}$: les deux triangles ont la même forme. C'est ce que dit la propriété qui suit.

En clair. Le deuxième cas d'isométrie utilise un angle compris entre deux côtés égaux. Ici, les deux côtés sont seulement proportionnels.

Pourquoi est-ce vrai ? On reporte les deux côtés du petit triangle sur ceux du grand, à partir du sommet de l'angle. La réciproque du théorème de Thalès donne alors une parallèle.

Propriété : Cas de similitude : un angle compris entre deux côtés proportionnels

Si deux triangles ont un angle de même mesure, compris entre deux côtés respectivement proportionnels, alors ils sont semblables.

Autrement dit : si $\widehat{BAC} = \widehat{FEG}$ et $\dfrac{EF}{AB} = \dfrac{EG}{AC}$, alors les triangles ABC et EFG sont semblables.

Démonstration

Étape 1. Soit $k = \dfrac{EF}{AB} = \dfrac{EG}{AC}$. Quitte à échanger les rôles des deux triangles, on suppose $k \leq 1$. Si $k = 1$, les triangles sont isométriques (deuxième cas d'isométrie) : les trois quotients valent 1, ils sont semblables.

Étape 2. Sinon, on place M sur $[AB]$ et N sur $[AC]$ tels que $AM = EF$ et $AN = EG$. Alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = k$, avec les points dans le même ordre. D'après la réciproque du théorème de Thalès, (MN) est parallèle à (BC).

Étape 3. D'après le théorème de Thalès, $\frac{MN}{BC} = k$.

Étape 4. On a $\widehat{MAN} = \widehat{BAC} = \widehat{FEG}$. Les triangles AMN et EFG ont un angle égal compris entre deux côtés égaux. D'après le deuxième cas d'isométrie, ils sont isométriques : $MN = FG$.

Étape 5. Donc $\frac{FG}{BC} = k$. Les trois quotients sont égaux : les triangles sont semblables.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Le geste : **reporter les deux côtés, puis reconnaître une parallèle**. On place M sur $[AB]$ et N sur $[AC]$, avec $AM = EF$ et $AN = EG$.

Les quotients égaux donnent (MN) parallèle à (BC), par la réciproque du théorème de Thalès. Le théorème de Thalès donne le troisième quotient. Le deuxième cas d'isométrie relie enfin AMN et EFG.

Vérifie : Une parallèle dans la preuve

Dans la preuve, M est sur $[AB]$ et N sur $[AC]$, avec $AM = EF$ et $AN = EG$. Quelle propriété montre que (MN) est parallèle à (BC) ?

A. Le théorème de Thalès.

Faux.
Le théorème de Thalès part d'une parallèle : il ne la démontre pas.

B. Les angles correspondants.

Faux.
Aucun angle de sommet M n'est connu à ce moment.

C. La réciproque du théorème de Thalès.

Juste.
Juste : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, avec les points dans le même ordre.

D. Le deuxième cas d'isométrie.

Faux.
Ce cas sert ensuite, pour comparer AMN et EFG.

Correction
On a placé M sur $[AB]$ et N sur $[AC]$, avec $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = k$. Les points A, M, B et A, N, C sont dans le même ordre. D'après la réciproque du théorème de Thalès, (MN) est parallèle à (BC).

Un exemple, puis la méthode

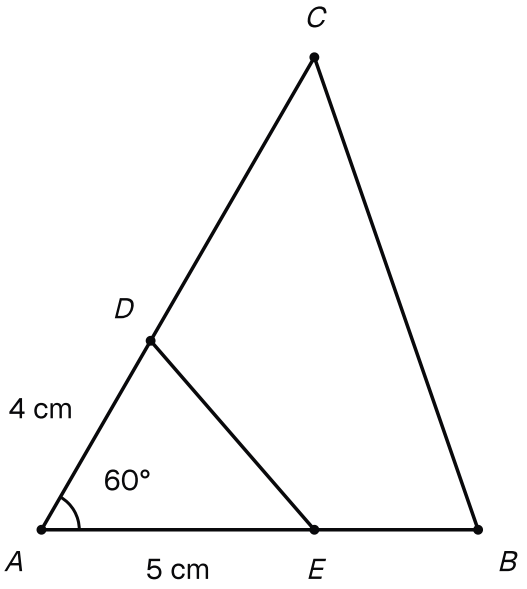
Exemple : un angle commun et deux quotients égaux

Construis un triangle ABC avec $AB = 8$ cm, $AC = 10$ cm et $\widehat{BAC} = 60°$. Place D sur $[AC]$ avec $AD = 4$ cm, et E sur $[AB]$ avec $AE = 5$ cm.

- L'angle de sommet A est commun aux triangles ADE et ABC.
- On a $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{4}{8} = 0{,}5$ et $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{5}{10} = 0{,}5$.

D'après le cas de similitude de l'angle compris, ADE et ABC sont semblables.

Ici, D est homologue de B, et E de C. La droite (DE) n'est pas parallèle à (BC).



Le triangle ABC, d'angle 60 degrés en A, et le petit triangle ADE, avec AD = 4 cm sur [AC] et AE = 5 cm sur [AB] ; les longueurs AB = 8 cm et AC = 10 cm restent dans le texte.

Méthode : démontrer que deux triangles sont semblables

1. **Deux angles** : cherche deux paires d'angles égaux. Pense à l'angle commun, aux angles correspondants ou alternes-internes, à la somme des angles.
2. **Un angle et deux côtés** : vérifie que l'angle égal est compris entre les deux côtés. Compare ensuite les deux quotients.
3. **Trois côtés** : range les côtés de chaque triangle, puis compare les trois quotients.
4. **Conclus** en citant le cas employé, ou les trois quotients.

À toi : Quel cas de similitude ?

Les triangles KLM et XYZ vérifient $\widehat{LKM} = \widehat{YXZ} = 72°$, $KL = 6$ cm, $KM = 9$ cm, $XY = 8$ cm et $XZ = 12$ cm. Ces triangles sont-ils semblables ? Justifie.

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Trouve l'angle égal et les deux côtés qui le forment.
Indice 2
Calcule $\frac{XY}{KL}$ et $\frac{XZ}{KM}$.
Indice 3
Point délicat : l'angle égal doit être compris entre les côtés dont tu compares les longueurs.

Réponse
Angle compris. L'angle $\widehat{LKM}$ est compris entre $[KL]$ et $[KM]$. L'angle $\widehat{YXZ}$ est compris entre $[XY]$ et $[XZ]$.

Quotients. On compare les côtés qui forment ces angles :

$$\frac{XY}{KL} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$
$$\frac{XZ}{KM} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

Conclusion. Les deux quotients sont égaux. D'après le cas de similitude de l'angle compris, KLM et XYZ sont semblables. Le rapport de XYZ par rapport à KLM est $k = \frac{4}{3}$.

Calculer avec des triangles semblables

Mesurer ce qu'on ne peut pas atteindre

En clair. On ne peut pas grimper en haut d'un poteau pour le mesurer. Mais son ombre au sol se mesure facilement.

Au même moment, les rayons du soleil sont parallèles. Un bâton planté à la verticale et le poteau forment alors deux triangles semblables.

Devine : La hauteur du poteau

Un bâton vertical de 2 m a une ombre de 3 m. Au même moment, l'ombre d'un poteau vertical mesure 12 m. Quelle est la hauteur du poteau ?

A. 18 m
Faux.
Tu as multiplié 12 par $\frac{3}{2}$: le poteau serait plus haut que son ombre, alors que le bâton (2 m) est plus court que la sienne (3 m).

B. 11 m

Faux.

Tu as retranché 1 m, comme pour le bâton : les longueurs sont proportionnelles, pas décalées.

C. 8 m

Juste.

Juste : l'ombre du poteau vaut quatre fois celle du bâton, sa hauteur aussi.

D. 6 m

Faux.

Tu as divisé 12 par 2 : le rapport est $\dfrac{12}{3} = 4$.

Correction

Les ombres sont dans le rapport $\dfrac{12}{3} = 4$. Les deux triangles sont semblables, donc les hauteurs sont dans le même rapport.

Le poteau mesure $4 \times 2 = 8$ m. La méthode et l'exemple qui suivent justifient ce calcul.

Méthode : calculer une longueur avec deux triangles semblables

1. **Associe** les sommets homologues. Deux côtés homologues sont opposés à des angles égaux.
2. **Calcule** le rapport k avec deux côtés homologues connus. Dis quel triangle est au numérateur.
3. **Multiplie** par k un côté du triangle du dénominateur : tu obtiens son homologue. Dans l'autre sens, **divise** par k.
4. **Contrôle** : le plus grand triangle a les plus grands côtés.

Exemple : la hauteur d'un poteau

Un bâton vertical $[AB]$ mesure $AB = 1{,}5$ m ; son ombre $[BC]$ mesure $BC = 2$ m. Au même moment, le poteau vertical $[DE]$ a une ombre $[EF]$ de 10 m. Les ombres sont sur le même sol horizontal, dans le même sens.

Fais un schéma : un petit triangle pour le bâton et son ombre, un grand pour le poteau et son ombre.

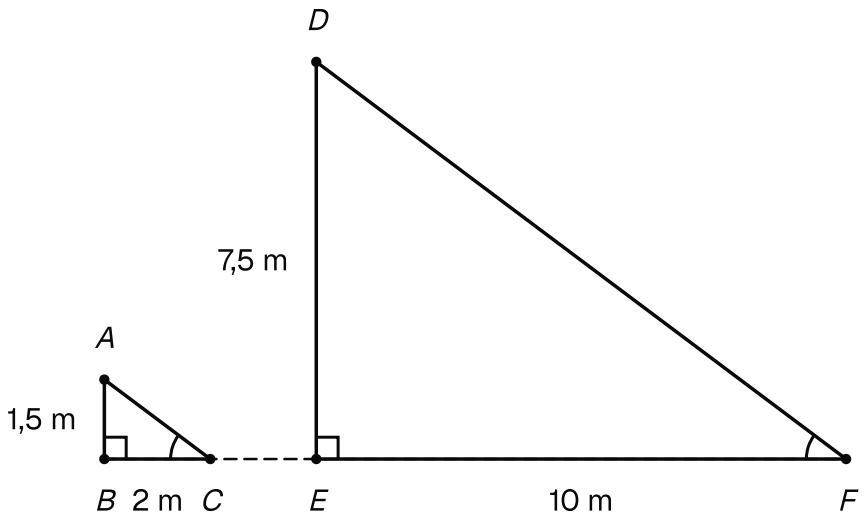
- Bâton et poteau sont verticaux : $\widehat{ABC} = \widehat{DEF} = 90°$.
- Les rayons (AC) et (DF) sont parallèles et coupés par le sol. Les angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{DFE}$ sont correspondants : ils sont égaux.

Similitude. D'après le cas de similitude des deux angles, ABC et DEF sont semblables.

Rapport. Le rapport de DEF par rapport à ABC est :

$$k = \frac{EF}{BC} = \frac{10}{2} = 5$$

Hauteur. Donc $DE = 5 \times 1{,}5 = 7{,}5$ m.



Le bâton et son ombre, le poteau et la sienne : deux triangles rectangles aux angles égaux en C et en F, d'où un poteau de 7,5 m.

Deux triangles emboîtés

Exemple : deux longueurs inconnues

Construis un triangle ABC avec $AB = 10$ cm, $BC = 12$ cm et $AC = 7{,}5$ cm. Place M sur $[AB]$ avec $AM = 4$ cm. La parallèle à (BC) passant par M coupe $[AC]$ en N.

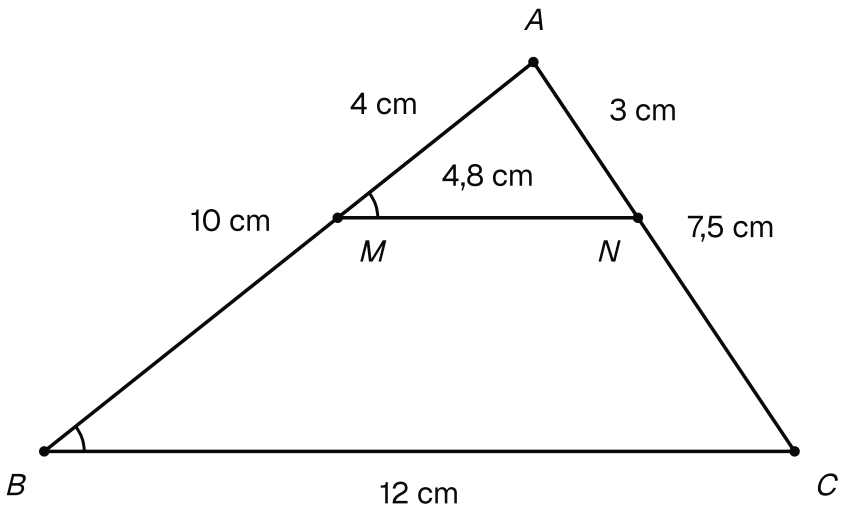
Calculons AN et MN.

Similitude. Les triangles AMN et ABC ont le même angle de sommet A. Les angles $\widehat{AMN}$ et $\widehat{ABC}$ sont correspondants et égaux, car (MN) est parallèle à (BC). D'après le cas de similitude des deux angles, AMN et ABC sont semblables.

Rapport. Le rapport de AMN par rapport à ABC est :

$$k = \frac{AM}{AB} = \frac{4}{10} = 0{,}4$$

Longueurs. Donc $AN = 0{,}4 \times 7{,}5 = 3$ cm et $MN = 0{,}4 \times 12 = 4{,}8$ cm.



Les triangles emboîtés AMN et ABC : AM = 4 cm sur AB = 10 cm, la parallèle à (BC) donne AN = 3 cm et MN = 4,8 cm.

Vérifie : La bonne égalité

Dans la figure de l'exemple, quelle égalité de quotients est juste ?

A. $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{MN}{BC}$
Faux.
Le segment $[MB]$ n'est pas un côté du triangle AMN : compare AM à AB.

B. $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{BC}{MN}$
Faux.
Le second quotient est à l'envers : il vaut $2{,}5$.

C. $\dfrac{AM}{AC} = \dfrac{AN}{AB}$
Faux.
Les côtés $[AM]$ et $[AC]$ ne sont pas homologues.

D. $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{MN}{BC}$
Juste.
Juste : $\dfrac{4}{10} = \dfrac{4{,}8}{12} = 0{,}4$.

Correction

Les côtés homologues sont $[AM]$ et $[AB]$, $[AN]$ et $[AC]$, $[MN]$ et $[BC]$. Chaque quotient met le petit triangle au numérateur :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} = 0{,}4$$

Avec $MB = 6$ cm, le quotient $\dfrac{AM}{MB}$ vaut $\dfrac{4}{6}$: il ne convient pas.

Attention : multiplier ou diviser par le rapport ?

✗ « Le rapport de AMN par rapport à ABC est $0{,}4$, donc $BC = 0{,}4 \times MN$. »

✓ Le rapport $0{,}4$ multiplie les côtés de ABC pour donner ceux de AMN : $MN = 0{,}4 \times BC$. Pour aller de AMN vers ABC, on divise par $0{,}4$:

$$BC = \frac{MN}{0{,}4}$$

Contrôle : le grand triangle doit avoir les grands côtés.

Contrôler, à toi, le coin examen

Vérifie : Le plus petit avec le plus petit

Un triangle a pour côtés 4 cm, 7 cm et 9 cm. Un triangle semblable a pour plus petit côté 6 cm. Quels sont ses deux autres côtés ?

A. $10{,}5$ cm et $13{,}5$ cm

Juste.

Juste : le rapport vaut $\frac{6}{4} = 1{,}5$.

B. 9 cm et 11 cm

Faux.

Tu as ajouté 2 cm à chaque côté : les côtés sont proportionnels, pas décalés.

C. 7 cm et 9 cm

Faux.

Ces longueurs donneraient des quotients différents.

D. 14 cm et 18 cm

Faux.

Tu as multiplié par 2 : le rapport est $\frac{6}{4}$.

Correction

Le plus petit côté va avec le plus petit : le rapport vaut $k = \frac{6}{4} = 1{,}5$.

Les autres côtés mesurent $1{,}5 \times 7 = 10{,}5$ cm et $1{,}5 \times 9 = 13{,}5$ cm.

À toi : Deux longueurs à calculer

Les triangles ABC et EFG vérifient $\widehat{BAC} = \widehat{FEG}$ et $\widehat{ABC} = \widehat{EFG}$. On sait que $AB = 6$ cm, $BC = 8$ cm, $CA = 9$ cm et $EF = 9$ cm. Calcule FG et GE.

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Commence par justifier que les triangles sont semblables.

Indice 2

Calcule le rapport de EFG par rapport à ABC avec les côtés homologues $[EF]$ et $[AB]$.

Indice 3

Point délicat : $[FG]$ est homologue de $[BC]$, et $[GE]$ de $[CA]$.

Réponse

Similitude. D'après le cas de similitude des deux angles, les triangles ABC et EFG sont semblables.

Rapport. Le rapport de EFG par rapport à ABC est :

$$k = \frac{EF}{AB} = \frac{9}{6} = 1{,}5$$

Conclusion. Donc $FG = 1{,}5 \times 8 = 12$ cm et $GE = 1{,}5 \times 9 = 13{,}5$ cm. Contrôle : EFG est le plus grand triangle, ses côtés aussi.

Remarque : Coin examen : rédiger un calcul de longueur

À l'examen, chaque étape est justifiée. Exemple : ABC est un triangle avec $AB = 10$ cm, $AC = 5$ cm et $BC = 8$ cm. Le point D est sur $[AB]$, avec $\widehat{ACD} = \widehat{ABC}$.

« Les triangles ACD et ABC ont le même angle de sommet A, et $\widehat{ACD} = \widehat{ABC}$. D'après le cas de similitude des deux angles, ACD et ABC sont semblables. Les sommets homologues sont A et A, C et B, D et C.

Le rapport de ACD par rapport à ABC est $k = \frac{AC}{AB} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$. Donc $AD = \frac{1}{2} \times 5 = 2{,}5$ cm et $CD = \frac{1}{2} \times 8 = 4$ cm. »

Ce qu'il faut savoir faire

À retenir : quel outil pour quelle question

- **Montrer une isométrie** : trois côtés ; deux côtés et l'angle compris ; un côté et ses deux angles adjacents. Cite le cas.
- **Montrer une égalité** de longueurs ou d'angles : trouve deux triangles isométriques où ces éléments sont homologues.
- **Montrer une similitude** : deux angles ; un angle compris entre deux côtés proportionnels ; trois quotients égaux.
- **Calculer une longueur** : calcule le rapport k, puis multiplie ou divise par k.
- **Toujours** : écris les sommets homologues dans le même ordre.

Le mot du prof. Isométriques, c'est même forme et même taille. Semblables, c'est même forme seulement.

Avant chaque conclusion, écris les deux triangles dans le bon ordre. Puis nomme le cas que tu utilises. Ce réflexe te servira dans toute la géométrie.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Triangles isométriques et triangles semblables » (3ac · general · mathematiques)