BURHAN

Résumé : Triangle rectangle : théorème de Pythagore et trigonométrie

3ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/3ac/mathematiques/triangle-rectangle-et-trigonometrie/resume

Chapitre	Semestre
Triangle rectangle : théorème de Pythagore et trigonométrie	Semestre 1

Le théorème de Pythagore

À retenir : Rappel : l'hypoténuse

Rappel de 2e année. Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse fait face à l'angle droit. C'est le plus long des trois côtés.

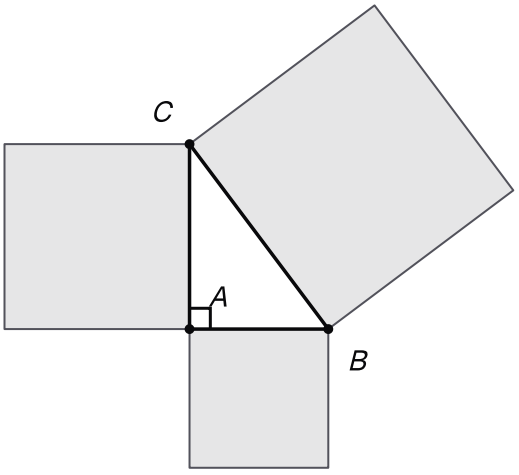
Le théorème de Pythagore relie les carrés des trois côtés.

Théorème : Théorème de Pythagore

Soit ABC un triangle rectangle en A. Son côté le plus long, $[BC]$, opposé à l'angle droit, s'appelle l'**hypoténuse**.

Le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$



Sur chaque côté du triangle ABC rectangle en A est construit un carré : l'aire du carré bâti sur [BC] égale la somme des deux autres.

Méthode : calculer une longueur avec Pythagore

1. **Angle droit.** Marque-le sur la figure. Le côté en face de lui est l'hypoténuse.
2. **Égalité.** Mets le carré de l'hypoténuse à gauche du signe $=$. À droite, écris la somme des deux autres carrés.
3. **Calcul.** Remplace les longueurs connues. Trouve le carré de la longueur inconnue.
4. **Longueur.** Elle est positive : c'est la racine carrée de ce carré. Écris la valeur exacte, puis l'arrondi demandé.

Exemple

Énoncé. Le triangle KLM est rectangle en L. On a $KL = 20$ cm et $LM = 21$ cm. Calcule KM.

Égalité. L'hypoténuse est $[KM]$. D'après le théorème de Pythagore, $KM^2 = KL^2 + LM^2$.

Calcul. On remplace les longueurs :

$$KM^2 = 400 + 441 = 841$$

Conclusion. Une longueur est positive. Donc $KM = \sqrt{841} = 29$ cm.

Exemple

Énoncé. Le triangle RST est rectangle en S. On a $RT = 9$ cm et $RS = 5$ cm. Calcule ST.

Égalité. L'hypoténuse est $[RT]$. D'après le théorème de Pythagore, $RT^2 = RS^2 + ST^2$.

Calcul. On isole ST^2 : $ST^2 = 81 - 25 = 56$.

Racine. Une longueur est positive, donc :

$$ST = \sqrt{56} = \sqrt{4 \times 14} = 2\sqrt{14}$$

La longueur ST vaut $2\sqrt{14}$ cm. À la calculatrice, $ST \approx 7{,}5$ cm au dixième.

Attention : Le carré de l'hypoténuse est seul

Dans le triangle RST rectangle en S, l'égalité $RS^2 = RT^2 + ST^2$ est fausse.

Le côté $[RT]$ fait face à l'angle droit. C'est son carré qui est seul : $RT^2 = RS^2 + ST^2$.

Repère l'hypoténuse avant d'écrire.

Attention : La racine d'une somme

Avec $KL = 20$ et $LM = 21$, l'hypoténuse ne mesure pas $20 + 21 = 41$.

Calcule d'abord la somme des carrés : 841. Prends ensuite sa racine carrée : 29.

Par exemple, $\sqrt{9+16} = 5$ alors que $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 7$.

Reconnaître un triangle rectangle

Théorème : Réciproque du théorème de Pythagore

Soit ABC un triangle. Si

$$BC^2 = AB^2 + AC^2,$$

alors le triangle ABC est **rectangle en** A. L'angle droit est au sommet opposé au côté le plus long.

Remarque

Ce résultat est admis.

Propriété : Triangle qui n'est pas rectangle

Soit ABC un triangle dont le côté le plus long est $[BC]$. Si

$$BC^2 \neq AB^2 + AC^2,$$

alors le triangle ABC **n'est pas rectangle**.

Méthode : rectangle ou pas ?

1. **Le plus long côté.** Repère-le en premier.
2. **Deux calculs séparés.** Son carré d'un côté. La somme des deux autres carrés de l'autre.
3. **Mêmes résultats ?** Alors ce triangle est rectangle, d'après la réciproque du théorème de Pythagore. Son angle droit est en face du plus long côté.
4. **Résultats différents ?** Alors ce triangle n'a pas d'angle droit. On cite la propriété du triangle qui n'est pas rectangle.

Exemple

Énoncé. Le triangle UVW a pour côtés $UV = 13$ cm, $VW = 84$ cm et $UW = 85$ cm. Est-il rectangle ?

Calculs à part. Le plus long côté est $[UW]$. D'une part, $UW^2 = 7\,225$. D'autre part :

$$\begin{aligned} &UV^2 + VW^2 \\ &= 169 + 7\,056 = 7\,225 \end{aligned}$$

Conclusion. Ils sont égaux. Donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, UVW est rectangle en V.

Exemple

Énoncé. Un triangle a pour côtés 7 cm, 9 cm et 11 cm. Est-il rectangle ?

Calculs à part. Le plus long côté mesure 11 cm. D'une part, $11^2 = 121$. D'autre part, $7^2 + 9^2 = 49 + 81 = 130$.

Conclusion. On a $121 \neq 130$. D'après la propriété du triangle qui n'est pas rectangle, ce triangle n'est pas rectangle.

Attention : Calculer avant de conclure

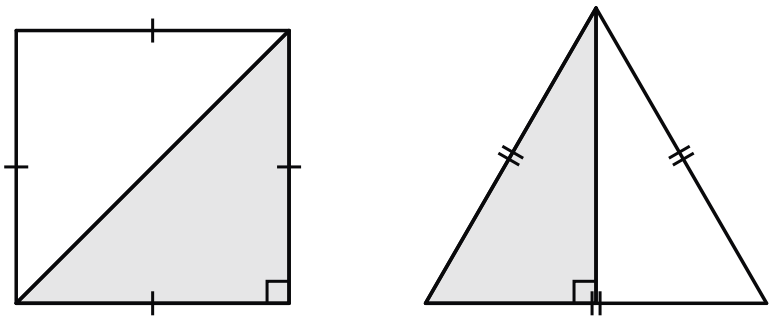
N'écris pas l'égalité de Pythagore dès la première ligne : tu ne sais pas encore si elle est vraie.

Calcule les deux nombres, chacun de son côté. Compare-les. La conclusion vient en dernier.

Pythagore dans les figures usuelles

Méthode : trouver le triangle rectangle caché

1. **Repère** dans la figure un triangle qui a un angle droit. Exemples : la diagonale d'un rectangle, la hauteur d'un triangle isocèle, les diagonales d'un losange.
2. **Prouve** que l'angle est droit. Cite la propriété de la figure qui le donne.
3. **Calcule** la longueur avec le théorème de Pythagore.
4. **Écris** le résultat le plus simple possible, par exemple $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.



Deux triangles rectangles cachés : la moitié d'un carré coupé par sa diagonale, et la moitié d'un triangle équilatéral coupé par sa hauteur.

Exemple

Énoncé. Le triangle EFG est isocèle en E, avec $EF = EG = 7$ cm et $FG = 4$ cm. Le point I est le milieu de $[FG]$. Calcule la hauteur EI.

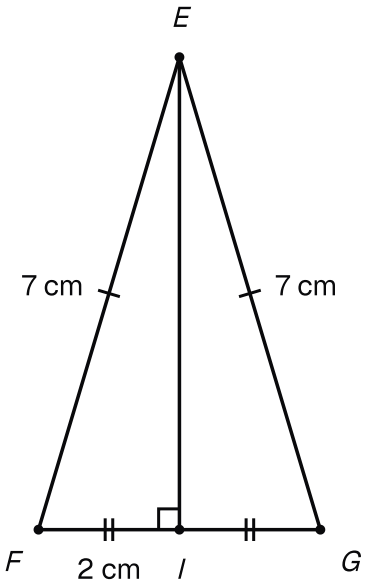
Angle droit. Dans un triangle isocèle, la médiane issue du sommet principal est aussi une hauteur. Donc EFI est rectangle en I, avec $FI = 2$ cm.

Calcul. D'après le théorème de Pythagore, $EF^2 = EI^2 + FI^2$. Donc $EI^2 = 49 - 4 = 45$.

Résultat. Une longueur est positive, donc :

$$\begin{aligned} EI &= \sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} \\ &= 3\sqrt{5} \end{aligned}$$

La hauteur mesure $3\sqrt{5}$ cm, soit $EI \approx 6{,}7$ cm au dixième.



Le triangle EFG isocèle en E, sa hauteur [EI] et le triangle EFI rectangle en I, avec FI = 2 cm.

Remarque : Et les polygones réguliers ?

Un polygone régulier se découpe en triangles isocèles. Leur sommet commun est le centre du polygone.

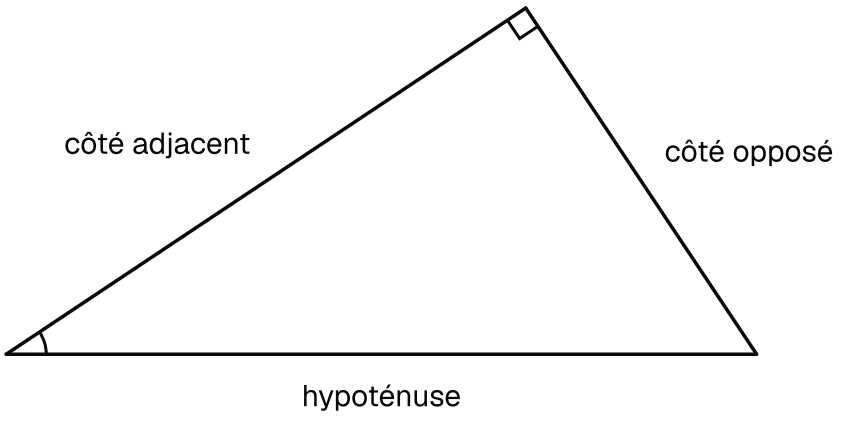
La hauteur de chacun de ces triangles crée deux triangles rectangles. Le théorème de Pythagore s'y applique.

Cosinus, sinus et tangente

À retenir : Nommer les trois côtés

Rappel de 2e année : le cosinus d'un angle aigu. Dans un triangle rectangle, choisis un angle aigu.

- L'hypoténuse fait face à l'angle droit.
- Le côté adjacent est le côté de l'angle droit qui forme l'angle choisi avec l'hypoténuse.
- Le côté opposé fait face à l'angle choisi.



Les trois côtés nommés par rapport à l'angle aigu marqué : hypoténuse, côté adjacent et côté opposé.

Définition : Cosinus d'un angle aigu

Soit ABC un triangle rectangle en A. Pour l'angle aigu $\widehat{ABC}$, le côté $[AB]$ est le **côté adjacent** : il forme cet angle avec l'hypoténuse $[BC]$.

Le **cosinus** de l'angle $\widehat{ABC}$ est le quotient de la longueur du côté adjacent par la longueur de l'hypoténuse :

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{AB}{BC}.$$

Définition : Sinus et tangente d'un angle aigu

Soit ABC un triangle rectangle en A. Pour l'angle aigu $\widehat{ABC}$, le côté $[AC]$ est le **côté opposé** : il ne touche pas le sommet B.

- Le **sinus** de l'angle $\widehat{ABC}$ est le quotient de la longueur du côté opposé par la longueur de l'hypoténuse : $\sin \widehat{ABC} = \frac{AC}{BC}$.
- La **tangente** de l'angle $\widehat{ABC}$ est le quotient de la longueur du côté opposé par la longueur du côté adjacent : $\tan \widehat{ABC} = \frac{AC}{AB}$.

Propriété : Des nombres qui ne dépendent que de l'angle

Le cosinus, le sinus et la tangente d'un angle aigu ne dépendent que de la **mesure** de cet angle. Ils ne dépendent ni du triangle rectangle choisi, ni de sa taille.

Si x est la mesure en degrés d'un angle aigu, avec $0° < x < 90°$, on note simplement $\cos x$, $\sin x$ et $\tan x$. Ce sont les **rapports trigonométriques** de x.

Remarque

Ce résultat est admis.

Méthode : choisir le bon rapport

1. **L'angle.** Entoure l'angle aigu dont on parle.
2. **Les côtés.** En face de l'angle droit : l'hypoténuse. Le côté de l'angle droit qui forme l'angle choisi avec l'hypoténuse : le côté adjacent. En face de l'angle choisi : le côté opposé.
3. **Les longueurs.** Souligne celle que tu connais et celle que tu cherches.
4. **Le rapport.** Prends celui qui utilise ces deux côtés. Pour t'en souvenir : CAH, SOH, TOA.
   - CAH : cosinus égale adjacent sur hypoténuse.
   - SOH : sinus égale opposé sur hypoténuse.
   - TOA : tangente égale opposé sur adjacent.

Exemple

Énoncé. Le triangle DEF est rectangle en E. On a $DE = 9$ cm, $EF = 40$ cm et $DF = 41$ cm. Écris les trois rapports de l'angle $\widehat{EDF}$.

Côtés. Pour l'angle en D, l'hypoténuse est $[DF]$. Le côté adjacent est $[DE]$. Le côté opposé est $[EF]$.

Rapports. D'après les définitions :

- $\cos\widehat{EDF} = \dfrac{9}{41}$;
- $\sin\widehat{EDF} = \dfrac{40}{41}$;
- $\tan\widehat{EDF} = \dfrac{40}{9}$.

Attention : Opposé ou adjacent : tout dépend de l'angle

Dans le triangle DEF rectangle en E, le côté $[DE]$ est adjacent à l'angle en D. Pour l'angle en F, il devient le côté opposé.

Nomme les côtés à chaque nouvel angle. L'hypoténuse, elle, ne change pas.

Calculer une longueur ou un angle

Propriété : Encadrement du cosinus et du sinus

Pour tout angle aigu de mesure x :

$$0 < \cos x < 1$$

et

$$0 < \sin x < 1.$$

La tangente $\tan x$ est un nombre strictement positif. Elle peut être plus grande que 1.

Méthode : calculer une longueur avec un rapport

1. **Rapport.** Écris le cosinus, le sinus ou la tangente de l'angle connu, avec les lettres.
2. **Valeurs.** Mets la mesure de l'angle et la longueur que tu connais.
3. **Produit en croix.** Il donne la longueur inconnue.
4. **Calculatrice.** Vérifie qu'elle est en degrés. Arrondis le résultat final, puis écris l'unité.

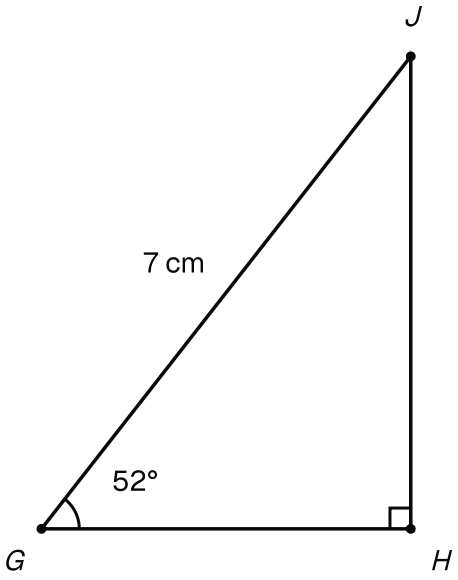
Exemple

Énoncé. Le triangle GHJ est rectangle en H. On a $GJ = 7$ cm et $\widehat{HGJ} = 52°$. Calcule GH.

Rapport. Pour l'angle en G, le côté $[GH]$ est adjacent. Le côté $[GJ]$ est l'hypoténuse. On utilise donc le cosinus : $\cos 52° = \dfrac{GH}{7}$.

Produit en croix. On obtient $GH = 7 \times \cos 52°$.

Calculatrice. Réglée en degrés, elle donne $GH \approx 4{,}3$ cm au dixième.



Le triangle GHJ rectangle en H : l'hypoténuse [GJ] de 7 cm et l'angle HGJ de 52 degrés donnent le côté adjacent [GH].

Méthode : calculer un angle avec la calculatrice

1. **Rapport.** Avec les deux longueurs connues, calcule le cosinus, le sinus ou la tangente de l'angle.
2. **Touche inverse.** En degrés, appuie sur « Shift » et sur la touche du rapport. Entre ensuite le nombre trouvé.
3. **Arrondi.** Donne la mesure à la précision demandée.
4. **Contrôle.** La mesure d'un angle aigu est strictement comprise entre $0°$ et $90°$.

Exemple

Énoncé. Le triangle MNP est rectangle en N. On a $MN = 8$ cm et $NP = 5$ cm. Calcule la mesure de l'angle $\widehat{NMP}$.

Rapport. Pour l'angle en M, le côté $[NP]$ est opposé. Le côté $[MN]$ est adjacent. Donc $\tan \widehat{NMP} = \dfrac{5}{8} = 0{,}625$.

Calculatrice. On tape « Shift » puis « tan ». On obtient $\widehat{NMP} \approx 32°$ au degré près.

Attention : Une calculatrice réglée en degrés

Avant tout calcul, vérifie le réglage de ta calculatrice. L'écran doit afficher « D » ou « DEG ».

Fais un test rapide : $\cos 60°$ doit donner $0{,}5$. Mal réglée, elle peut donner un nombre négatif, par exemple proche de $-0{,}95$.

Pour un angle aigu, ce signe trahit donc une erreur. Un nombre positif, lui, ne garantit rien : regarde toujours l'écran.

Attention : Arrondir à la fin seulement

Pour $x = \dfrac{15}{\cos 50°}$, la calculatrice donne $x \approx 23{,}3$ au dixième.

Si tu remplaces d'abord $\cos 50°$ par $0{,}6$, tu trouves 25. Ce résultat est faux.

Garde toutes les décimales jusqu'au bout.

Deux relations entre les rapports

Propriété : Relation entre cosinus et sinus

Pour tout angle aigu de mesure x :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

L'écriture $\cos^2 x$ désigne le carré du cosinus : $\cos^2 x = (\cos x)^2$. De même, $\sin^2 x = (\sin x)^2$.

Propriété : La tangente, quotient du sinus par le cosinus

Pour tout angle aigu de mesure x :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Méthode : trouver les autres rapports à partir d'un seul

1. **Carré manquant.** Écris $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, ou $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$.
2. **Racine.** L'angle est aigu : garde la racine carrée positive.
3. **Tangente.** Calcule le quotient du sinus par le cosinus.
4. **Simplification.** Si une racine carrée reste au dénominateur, rends-le rationnel.

Exemple

Énoncé. L'angle aigu x vérifie $\cos x = \frac{2}{3}$. Calcule $\sin x$ et $\tan x$.

Sinus. D'après la relation entre cosinus et sinus, $\sin^2 x = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$. Le sinus est positif. Donc $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Tangente. D'après la relation entre tangente, sinus et cosinus :

$$\tan x = \frac{\sqrt{5}}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Attention : Le carré d'un cosinus

L'écriture $\cos^2 30°$ veut dire $(\cos 30°)^2$.

On calcule d'abord $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Puis on élève au carré : $\frac{3}{4}$. On n'élève jamais la mesure 30 au carré.

Angles complémentaires et valeurs remarquables

Propriété : Angles complémentaires

Deux angles sont **complémentaires** lorsque la somme de leurs mesures vaut $90°$.

Pour tout angle aigu de mesure x :

$$\cos(90^\circ - x) = \sin x$$
$$\sin(90^\circ - x) = \cos x$$
$$\tan(90^\circ - x) = \frac{1}{\tan x}.$$

Exemple

Sans calculatrice. Les angles de 25° et de 65° sont complémentaires, car $25 + 65 = 90$.

Cosinus et sinus. D'après la propriété des angles complémentaires, $\cos 65^\circ = \sin 25^\circ$.

Tangentes. De même, $\tan 65^\circ = \frac{1}{\tan 25^\circ}$. Donc $\tan 25^\circ \times \tan 65^\circ = 1$.

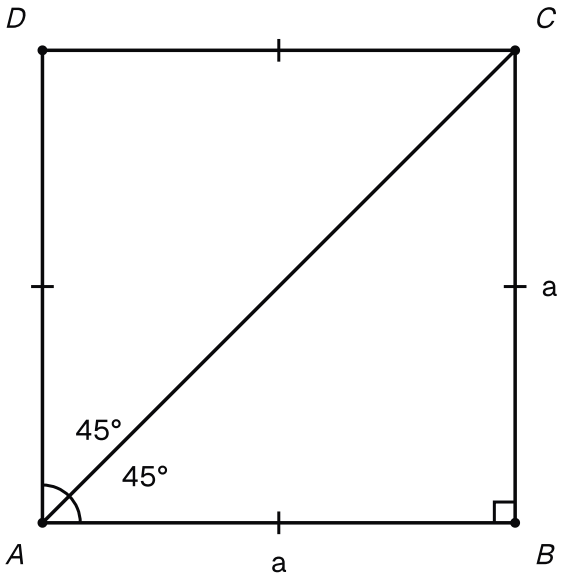
Propriété : Rapports trigonométriques de 45°

Pour un angle de 45°, le cosinus et le sinus sont égaux, et la tangente vaut 1 :

$$\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

et

$$\tan 45^\circ = 1.$$



Dans le carré ABCD, le triangle ABC est rectangle isocèle en B : ses deux angles aigus valent 45 degrés.

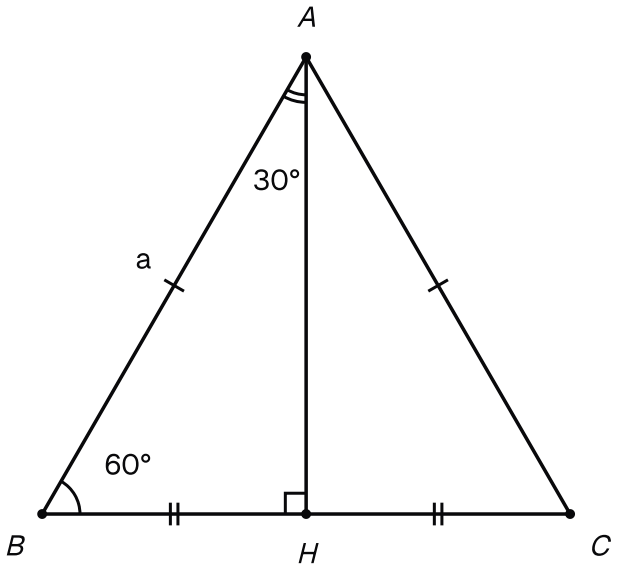
Propriété : Rapports trigonométriques de 30° et de 60°

Les rapports trigonométriques des angles de 60° et de 30° sont :

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$
$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

et

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$
$$\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$



La hauteur [AH] du triangle équilatéral ABC donne un triangle rectangle en H, d'angles 30 et 60 degrés.

À retenir : Tableau des valeurs remarquables

Les rapports de trois angles se calculent sans calculatrice.

Angle	30°	45°	60°
cosinus	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
sinus	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Remarque : Retenir le tableau

Lis la ligne des sinus de gauche à droite : $\frac{\sqrt{1}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$.

La ligne des cosinus est la même, lue de droite à gauche. C'est la propriété des angles complémentaires, car $30 + 60 = 90$.

Enfin, chaque tangente est le sinus divisé par le cosinus.

Exemple

Énoncé. Calcule sans calculatrice $A = \sin 60° \times \tan 30°$.

Valeurs. D'après le tableau, $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Produit. On multiplie les deux valeurs :

$$A = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}{2 \times 3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Quelle méthode pour quelle question ?

Méthode : Quelle méthode pour quelle question ?

- **Un côté, deux autres côtés connus** : le théorème de Pythagore.
- **Rectangle ou pas ?** Compare le carré du plus long côté à la somme des deux autres carrés.
- **Un côté, un angle et un côté connus** : le rapport qui contient les deux côtés en jeu.
- **Un angle, deux côtés connus** : le rapport, puis la touche « Shift » de la calculatrice.
- **Un rapport, un autre rapport connu** : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, puis $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.
- **L'angle complémentaire** : le cosinus et le sinus s'échangent.
- **Un angle de $30°$, $45°$ ou $60°$** : le tableau des valeurs remarquables.

Pythagore, triangle ABC rectangle en A

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

Cosinus de l'angle en B

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{AB}{BC}$$

Sinus de l'angle en B

$$\sin \widehat{ABC} = \frac{AC}{BC}$$

Tangente de l'angle en B

$$\tan \widehat{ABC} = \frac{AC}{AB}$$

Encadrement, angle aigu

$$0 < \cos x < 1 \text{ et } 0 < \sin x < 1$$

Relation entre cosinus et sinus

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

Tangente

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Angles complémentaires

$$\cos(90^\circ - x) = \sin x$$

À retenir : Rédiger en devoir

- Nomme la propriété utilisée à chaque étape. Écris par exemple « d'après la réciproque du théorème de Pythagore ».
- Donne chaque valeur approchée avec sa précision.
- Précise que la calculatrice est réglée en degrés.
- Termine par une phrase qui répond à la question.