BURHAN

Triangle rectangle : théorème de Pythagore et trigonométrie : exercices, entraînement

3ème Année Collège · Mathématiques

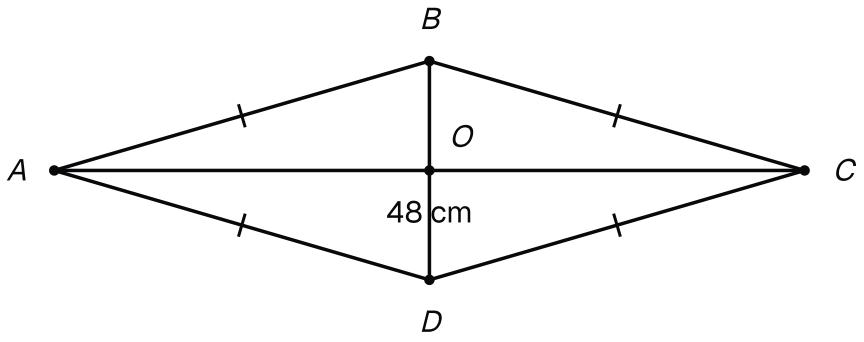
Version en ligne : burhan.ma/3ac/mathematiques/triangle-rectangle-et-trigonometrie/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Triangle rectangle : théorème de Pythagore et trigonométrie	Entraînement	7

Exercice 1

Un cerf-volant en forme de losange

La toile d'un cerf-volant a la forme d'un losange $ABCD$. Ses diagonales mesurent $AC = 48$ cm et $BD = 14$ cm. Elles se coupent au point O.



La toile en losange ABCD, sa grande diagonale [AC] de 48 cm et sa petite diagonale [BD], sécantes en O.

1.

Justifier que le triangle AOB est rectangle en O.

INDICE

Outil : les propriétés des diagonales d'un losange.

Début : quel angle les deux diagonales font-elles entre elles ?

CORRIGÉ

Le quadrilatère $ABCD$ est un losange. Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires, donc (AC) et (BD) forment un angle droit en O.

Conclusion. Les points A et B sont sur ces deux diagonales : le triangle AOB est rectangle en O.

2.

Calculer OA et OB.

INDICE

Outil : une autre propriété des diagonales d'un losange.

Début : où le point O se trouve-t-il sur chacune d'elles ?

CORRIGÉ

Les diagonales d'un losange se coupent en leur milieu. Le point O est donc le milieu de $[AC]$ et celui de $[BD]$.

Conclusion. On a $OA = \dfrac{48}{2} = 24$ cm et $OB = \dfrac{14}{2} = 7$ cm.

3.

Calculer la longueur AB d'un côté du losange.

INDICE

Outil : le théorème de Pythagore dans le triangle AOB.

Point délicat : l'hypoténuse est $[AB]$.

CORRIGÉ

Égalité. D'après la question 1, le triangle AOB est rectangle en O, d'hypoténuse $[AB]$. Le théorème de Pythagore donne :

$$AB^2 = OA^2 + OB^2.$$

Calcul. Avec $24^2 = 576$ et $7^2 = 49$, on trouve $AB^2 = 576 + 49 = 625$.

Racine. Une longueur est positive et $25^2 = 625$, donc $AB = \sqrt{625} = 25$ cm.

Conclusion. Un côté du losange mesure 25 cm.

4.

Le bord de la toile est entouré d'un ruban. Quelle longueur de ruban faut-il ?

INDICE

Outil : un losange a quatre côtés de même longueur.

CORRIGÉ

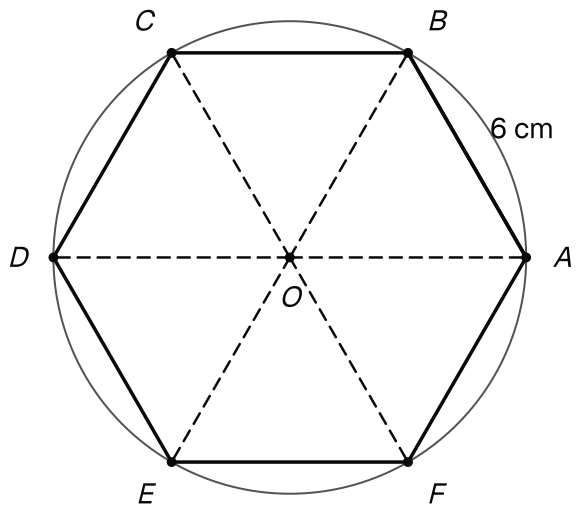
Les quatre côtés d'un losange ont la même longueur, ici 25 cm. Le ruban fait le tour de la toile : sa longueur est le périmètre du losange, soit $4 \times 25 = 100$ cm.

Conclusion. Il faut 100 cm de ruban, soit 1 m.

Exercice 2

Une dalle en forme d'hexagone régulier

Une dalle a la forme d'un hexagone régulier $ABCDEF$ de côté 6 cm. Ses six sommets sont sur un cercle de centre O. Les six angles $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COD}$, $\widehat{DOE}$, $\widehat{EOF}$ et $\widehat{FOA}$ sont égaux. Trace la figure sur ton cahier.



La dalle hexagonale ABCDEF de côté 6 cm, ses sommets sur le cercle de centre O, reliés au centre par six rayons.

1.

Calculer la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$.

INDICE

Début : six angles égaux font un tour complet de $360°$.

CORRIGÉ

Les six angles de sommet O sont égaux et font ensemble un tour complet, soit $360°$. Chacun en est donc le sixième.

Conclusion. On a $\widehat{AOB} = \dfrac{360°}{6} = 60°$.

2.

En déduire que le triangle AOB est équilatéral.

INDICE

Début : A et B sont sur le cercle de centre O.

Ensuite : calcule les angles en A et en B.

CORRIGÉ

Triangle isocèle. Les points A et B sont sur le cercle de centre O, donc $OA = OB$. Le triangle AOB est isocèle en O. Rappel de 1re année : ses angles à la base, en A et en B, sont égaux.

Angles. La somme des angles d'un triangle vaut $180°$, et l'angle en O mesure $60°$ d'après la question 1. Chaque angle à la base mesure donc $\dfrac{180° - 60°}{2} = 60°$.

Conclusion. Les trois angles du triangle AOB mesurent $60°$. Un triangle qui a trois angles égaux est équilatéral (rappel de 1re année) : AOB est équilatéral, et $OA = AB = 6$ cm.

3.

Le point H est le milieu de $[AB]$. Calculer la valeur exacte de la distance OH du centre au côté.

INDICE

Outil : dans un triangle équilatéral, une médiane est aussi une hauteur.

Ensuite : le théorème de Pythagore dans le triangle OHA.

CORRIGÉ

Angle droit. D'après la question 2, le triangle AOB est équilatéral. Sa médiane $[OH]$ est donc aussi une hauteur : le triangle OHA est rectangle en H. Le point H est le milieu de $[AB]$, donc $AH = 3$ cm.

Pythagore. L'hypoténuse est $[OA]$, de longueur 6 cm. Le théorème de Pythagore donne $OA^2 = OH^2 + AH^2$. On isole OH^2 : $OH^2 = 36 - 9 = 27$.

Racine. On écrit $27 = 9 \times 3$, avec $9 = 3^2$. Ainsi $OH = \sqrt{27} = \sqrt{9 \times 3} = 3\sqrt{3}$ cm.

Conclusion. La distance du centre au côté $[AB]$ vaut exactement $3\sqrt{3}$ cm.

4.

Les points A, O et D sont alignés. Justifier que le triangle ACD est rectangle en C.

INDICE

Outil : rappel de 2e année, la propriété du triangle inscrit dans un demi-cercle : un triangle dont les sommets sont sur un cercle, avec un côté pour diamètre, est rectangle.

Début : que représente le segment $[AD]$ pour le cercle ?

CORRIGÉ

Diamètre. Les angles $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$ et $\widehat{COD}$ mesurent chacun $60°$. On a donc $\widehat{AOD} = 3 \times 60° = 180°$. Ainsi $[AD]$ passe par le centre O : c'est un diamètre du cercle, et $AD = 2 \times 6 = 12$ cm.

Angle droit. Le point C est sur le cercle de diamètre $[AD]$, et il est distinct de A et de D. D'après la propriété du triangle inscrit dans un demi-cercle (rappel de 2e année), l'angle droit est au sommet C.

Conclusion. Le triangle ACD est rectangle en C.

5.

En déduire la valeur exacte de la longueur de la petite diagonale $[AC]$.

INDICE

Outil : le théorème de Pythagore dans le triangle ACD.

Point délicat : l'hypoténuse est le diamètre $[AD]$.

CORRIGÉ

Pythagore. D'après la question 4, le triangle ACD est rectangle en C, d'hypoténuse le diamètre $[AD]$. Le théorème de Pythagore donne $AD^2 = AC^2 + CD^2$, avec $AD = 12$ cm et $CD = 6$ cm. On isole AC^2 :

$$\begin{aligned} AC^2 &= AD^2 - CD^2 \\ &= 144 - 36 \\ &= 108. \end{aligned}$$

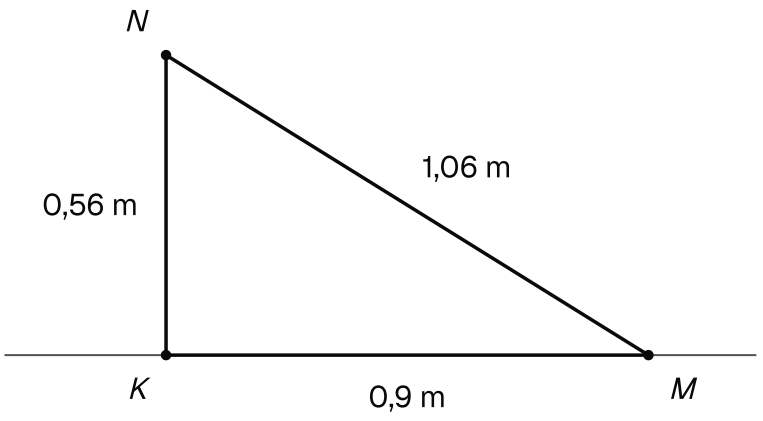
Racine. On écrit $108 = 36 \times 3$, avec $36 = 6^2$. Donc $AC = \sqrt{36 \times 3} = 6\sqrt{3}$ cm.

Conclusion. La petite diagonale $[AC]$ mesure exactement $6\sqrt{3}$ cm.

Exercice 3

Le support d'un panneau solaire

Un panneau solaire est posé sur un support. Le panneau est le segment $[MN]$, de longueur $1{,}06$ m. Le point M touche le sol. Le montant $[NK]$ mesure $0{,}56$ m. Le point K est au sol, à $0{,}9$ m de M. L'installateur veut vérifier que le montant est vertical.



Le panneau [MN] de 1,06 m, le montant [NK] de 0,56 m et la distance MK de 0,9 m au sol.

1.

Le triangle MKN est-il rectangle en K ?

INDICE

Outil : la réciproque du théorème de Pythagore.

Début : le plus long côté est le panneau $[MN]$.

CORRIGÉ

Plus long côté. C'est le panneau $[MN]$, de longueur $1{,}06$ m.

Calculs à part. D'une part, $MN^2 = 1{,}1236$. D'autre part, $MK^2 + KN^2 = 0{,}81 + 0{,}3136 = 1{,}1236$.

Comparaison. Les deux résultats coïncident. On applique la réciproque du théorème de Pythagore : MKN est rectangle en K, le sommet opposé à $[MN]$.

Conclusion. Oui, le triangle MKN est rectangle en K : le montant est bien vertical.

2.

Calculer l'angle $\widehat{NMK}$ entre le panneau et le sol, au degré près.

INDICE

Outil : nomme les côtés à partir de l'angle en M.

Début : $[MN]$ est l'hypoténuse.

CORRIGÉ

Rapport. D'après la question 1, le triangle MKN est rectangle en K. Pour l'angle en M, le côté $[MK]$ est adjacent et $[MN]$ est l'hypoténuse. Le cosinus relie ces deux côtés : $\cos\widehat{NMK} = \dfrac{0{,}9}{1{,}06}$.

Calculatrice. En degrés, « Shift » puis « cos » donne $\widehat{NMK} \approx 32^\circ$ au degré près.

Conclusion. Le panneau fait un angle d'environ 32° avec le sol.

3.

Retrouver ce résultat avec la tangente.

INDICE

Outil : la tangente utilise le côté opposé et le côté adjacent.

Point délicat : tape le quotient entier, sans l'arrondir.

CORRIGÉ

Rapport. Pour l'angle en M, le côté $[NK]$ est opposé et $[MK]$ est adjacent. Donc $\tan\widehat{NMK} = \dfrac{0{,}56}{0{,}9}$.

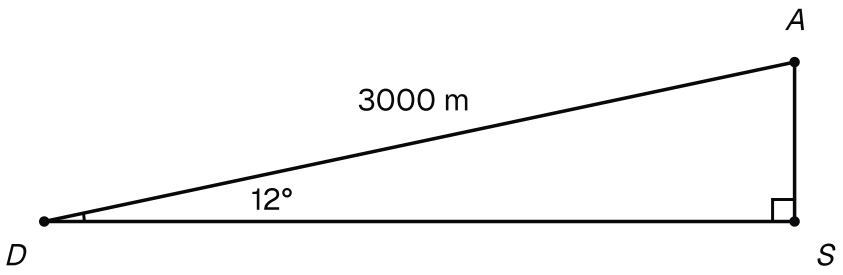
Calculatrice. On tape le quotient entier, sans l'arrondir. « Shift » puis « tan » donne encore $\widehat{NMK} \approx 32^\circ$ au degré près.

Conclusion. La tangente donne le même résultat que le cosinus : environ 32°.

Exercice 4

Un avion au décollage

Au décollage, un avion part du point D de la piste. Il monte en ligne droite. Sa trajectoire fait un angle de $12°$ avec la piste. Il parcourt $3\,000$ m sur cette trajectoire et arrive au point A. Le point S est au sol, sous l'avion. Le triangle DSA est rectangle en S.



La trajectoire [DA] de l'avion, longue de 3 000 m, monte depuis la piste sous un angle de 12 degrés ; S est au sol sous A.

1.

Calculer l'altitude AS de l'avion au point A, au mètre près.

INDICE

Outil : nomme les trois côtés à partir de l'angle en D.

Ensuite : la trajectoire $[DA]$ est l'hypoténuse.

CORRIGÉ

Rapport. Pour l'angle en D, l'altitude $[AS]$ est opposée et la trajectoire $[DA]$ est l'hypoténuse. Le sinus relie ces deux côtés : $\sin 12° = \dfrac{AS}{3\,000}$.

Produit en croix. $AS = 3\,000 \times \sin 12°$.

Calculatrice. En degrés, on obtient $AS \approx 624$ m au mètre près.

Conclusion. Au point A, l'avion vole à environ 624 m d'altitude.

2.

Calculer la distance DS parcourue au-dessus du sol, au mètre près.

INDICE

Outil : nomme le côté $[DS]$ par rapport à l'angle en D.

CORRIGÉ

Rapport. Pour l'angle en D, le côté $[DS]$ est adjacent et $[DA]$ reste l'hypoténuse. Donc $\cos 12° = \dfrac{DS}{3\,000}$.

Calcul. Par produit en croix, puis à la calculatrice : $DS = 3\,000 \times \cos 12° \approx 2\,934$ m au mètre près.

Conclusion. L'avion a parcouru environ $2\,934$ m au-dessus du sol.

3.

Un autre avion doit être à 900 m d'altitude après $3\,000$ m de trajectoire. Quel angle doit faire sa trajectoire avec la piste ? Arrondir au degré près.

INDICE

Outil : quels côtés connais-tu pour l'angle cherché ?

Ensuite : « Shift » puis la touche du rapport choisi.

CORRIGÉ

Rapport. On note x l'angle cherché. L'altitude de 900 m est opposée à x, et la trajectoire de $3\,000$ m est l'hypoténuse. Donc $\sin x = \dfrac{900}{3\,000} = 0{,}3$.

Calculatrice. En degrés, « Shift » puis « sin » donne $x \approx 17°$ au degré près.

Conclusion. La trajectoire doit faire un angle d'environ $17°$ avec la piste.

Exercice 5

Les deux relations au travail

L'angle aigu x vérifie $\cos x = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$.

1.

Calculer la valeur exacte de $\sin x$.

INDICE

Outil : la relation entre cosinus et sinus.

Début : $\left(\dfrac{\sqrt{7}}{4}\right)^2 = \dfrac{7}{16}$.

CORRIGÉ

Carré du sinus. D'après la relation entre cosinus et sinus, $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. Ici $\cos^2 x = \dfrac{7}{16}$, donc $\sin^2 x = 1 - \dfrac{7}{16} = \dfrac{9}{16}$.

Sinus. L'angle x est aigu, donc $\sin x > 0$. Comme $\left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = \dfrac{9}{16}$, on obtient $\sin x = \dfrac{3}{4}$.

Conclusion. La valeur exacte est $\sin x = \dfrac{3}{4}$.

2.

En déduire la valeur exacte de $\tan x$, avec un dénominateur rationnel.

INDICE

Outil : la tangente est le quotient du sinus par le cosinus.

Point délicat : multiplie par $\sqrt{7}$ en haut et en bas.

CORRIGÉ

Quotient. La tangente est le quotient du sinus par le cosinus. Diviser par $\dfrac{\sqrt{7}}{4}$, c'est multiplier par $\dfrac{4}{\sqrt{7}}$:

$$\tan x = \frac{3}{4} \times \frac{4}{\sqrt{7}} = \frac{3}{\sqrt{7}}.$$

Dénominateur rationnel. On multiplie le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{7}$:

$$\tan x = \frac{3 \times \sqrt{7}}{\sqrt{7} \times \sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7}.$$

Conclusion. On a $\tan x = \dfrac{3\sqrt{7}}{7}$.

3.

Pour l'angle x des questions 1 et 2, calculer $E = (\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2$.

INDICE

Outil : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (rappel du calcul littéral).

Début : remplace $\cos x$ par $\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ et $\sin x$ par $\dfrac{3}{4}$.

CORRIGÉ

Parenthèses. Avec les questions 1 et 2, $\cos x + \sin x = \dfrac{\sqrt{7}+3}{4}$ et $\cos x - \sin x = \dfrac{\sqrt{7}-3}{4}$.

Carrés. D'après les identités remarquables, $(\sqrt{7}+3)^2 = 7 + 6\sqrt{7} + 9 = 16 + 6\sqrt{7}$. On divise par $4^2 = 16$:

$$\left(\frac{\sqrt{7}+3}{4}\right)^2 = \frac{16+6\sqrt{7}}{16}.$$

De même, $(\sqrt{7}-3)^2 = 16 - 6\sqrt{7}$, donc :

$$\left(\frac{\sqrt{7}-3}{4}\right)^2 = \frac{16-6\sqrt{7}}{16}.$$

Somme. Les termes en $\sqrt{7}$ s'annulent, et $16 + 16 = 32$. Ainsi $E = \dfrac{32}{16} = 2$.

Conclusion. Pour cet angle x, on trouve $E = 2$.

4.

Pour un angle aigu quelconque y, prouver que $(\cos y + \sin y)^2 + (\cos y - \sin y)^2 = 2$.

INDICE

Outil : les identités remarquables de la question 3, avec $a = \cos y$ et $b = \sin y$.

Ensuite : regroupe $\cos^2 y$ et $\sin^2 y$.

CORRIGÉ

Soit y un angle aigu. On veut montrer que la somme des deux carrés vaut 2.

Développer. D'après les identités remarquables, avec $a = \cos y$ et $b = \sin y$:

- $(\cos y + \sin y)^2 = \cos^2 y + 2\cos y \sin y + \sin^2 y$;
- $(\cos y - \sin y)^2 = \cos^2 y - 2\cos y \sin y + \sin^2 y$.

Ajouter. Les doubles produits s'annulent. La somme vaut $2\cos^2 y + 2\sin^2 y = 2\left(\cos^2 y + \sin^2 y\right)$.

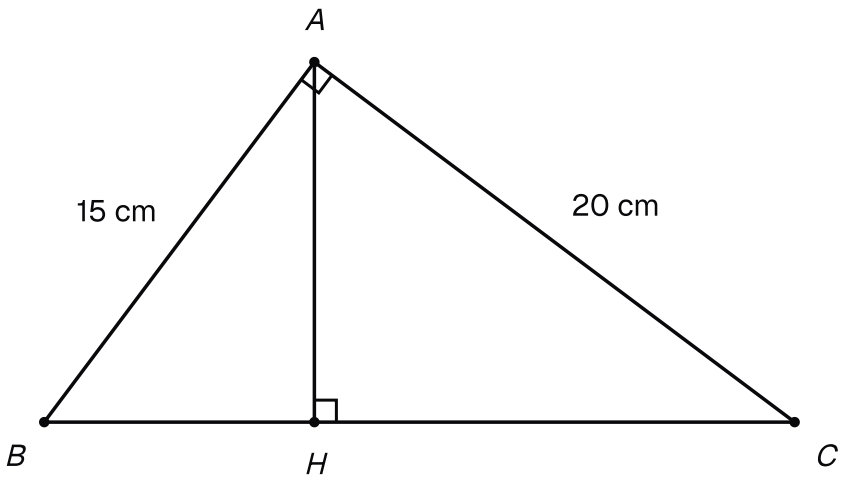
Relation. D'après la relation entre cosinus et sinus, la parenthèse vaut 1. La somme vaut donc 2.

Conclusion. Pour tout angle aigu y, on a $(\cos y + \sin y)^2 + (\cos y - \sin y)^2 = 2$. On retrouve le résultat de la question 3.

Exercice 6

Découvrir des égalités avec la hauteur

Le triangle ABC est rectangle en A, avec $AB = 15$ cm et $AC = 20$ cm. Le point H est sur $[BC]$, et la droite (AH) est perpendiculaire à (BC). Le segment $[AH]$ est la hauteur issue de A. Trace la figure sur ton cahier.



Le triangle ABC rectangle en A, avec AB = 15 cm et AC = 20 cm, et sa hauteur [AH] perpendiculaire à [BC].

1.

Calculer BC.

INDICE

Outil : le théorème de Pythagore dans le triangle ABC.

CORRIGÉ

Le triangle ABC est rectangle en A, d'hypoténuse $[BC]$. Le théorème de Pythagore donne, avec $15^2 = 225$ et $20^2 = 400$:

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 \\ &= 225 + 400 \\ &= 625. \end{aligned}$$

Une longueur est positive et $25^2 = 625$, donc $BC = 25$ cm.

Conclusion. Le côté $[BC]$ mesure 25 cm.

2.

Écrire l'aire du triangle ABC de deux façons. En déduire l'égalité $AB \times AC = BC \times AH$, puis la longueur AH.

INDICE

Début : la base $[AB]$ a pour hauteur $[AC]$.

Ensuite : la base $[BC]$ a pour hauteur $[AH]$.

CORRIGÉ

Première façon. Le triangle est rectangle en A : avec la base $[AB]$, la hauteur est $[AC]$. L'aire vaut $\dfrac{AB \times AC}{2}$.

Seconde façon. Avec la base $[BC]$, la hauteur est $[AH]$. L'aire vaut $\dfrac{BC \times AH}{2}$.

Égalité. Ces deux écritures donnent la même aire. On les multiplie par 2 : $AB \times AC = BC \times AH$.

Calcul. On remplace par les longueurs connues : $15 \times 20 = 25 \times AH$, soit $300 = 25 \times AH$.

Conclusion. On en déduit $AH = \dfrac{300}{25} = 12$ cm.

3.

Calculer BH, puis HC.

INDICE

Outil : le triangle ABH est rectangle en H.

Point délicat : son hypoténuse est $[AB]$.

CORRIGÉ

Pythagore. La droite (AH) est perpendiculaire à (BC), donc le triangle ABH est rectangle en H, d'hypoténuse $[AB]$. Le théorème de Pythagore donne $AB^2 = BH^2 + AH^2$. Donc $BH^2 = 225 - 144 = 81$, et $BH = 9$ cm, car $9^2 = 81$.

Soustraction. Le point H est sur le segment $[BC]$, donc $BH + HC = BC$. Ainsi $HC = 25 - 9 = 16$ cm.

Conclusion. On a $BH = 9$ cm et $HC = 16$ cm.

4.

Écrire $\cos\widehat{ABC}$ dans le triangle ABC, puis dans le triangle ABH. En déduire l'égalité $AB^2 = BH \times BC$, et la vérifier.

INDICE

Début : l'angle en B est le même dans les deux triangles.

Ensuite : dans ABH, l'hypoténuse est $[AB]$.

CORRIGÉ

Dans ABC. Pour l'angle en B, le côté adjacent est $[AB]$ et l'hypoténuse est $[BC]$: $\cos\widehat{ABC} = \dfrac{AB}{BC}$.

Dans ABH. Le point H est sur $[BC]$, donc l'angle $\widehat{ABH}$ est l'angle $\widehat{ABC}$. Dans le triangle ABH, rectangle en H, le côté adjacent est $[BH]$ et l'hypoténuse est $[AB]$: $\cos\widehat{ABC} = \dfrac{BH}{AB}$.

Égalité. Les deux quotients sont égaux au même cosinus :

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BH}{AB}.$$

Le produit en croix donne $AB^2 = BH \times BC$.

Vérification. D'une part $AB^2 = 225$. D'autre part $BH \times BC = 9 \times 25 = 225$. Les deux nombres sont égaux.

5.

Calculer AH^2 et $BH \times HC$. Que remarques-tu ?

INDICE

Début : utilise les résultats des questions 2 et 3.

CORRIGÉ

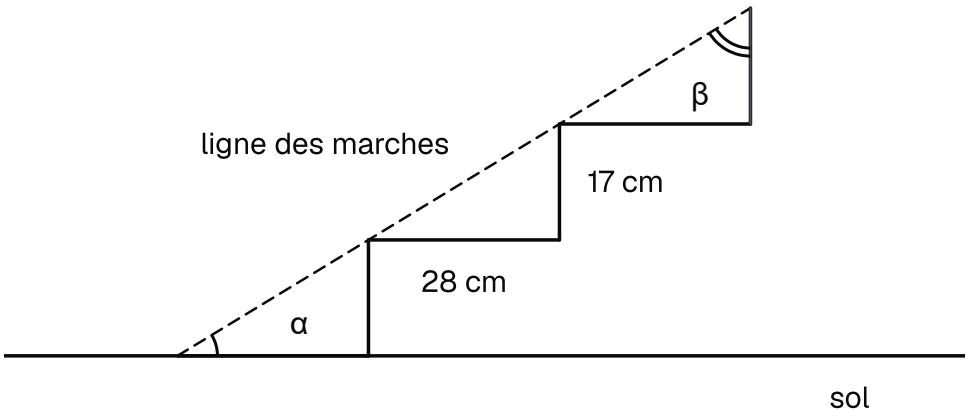
D'après la question 2, $AH = 12$ cm, donc $AH^2 = 144$. D'après la question 3, $BH \times HC = 9 \times 16 = 144$.

Conclusion. Les deux nombres sont égaux : dans ce triangle, $AH^2 = BH \times HC$.

Exercice 7

L'angle d'un escalier

Chaque marche d'un escalier a une hauteur de 17 cm et une profondeur de 28 cm. On note α l'angle entre la ligne des marches et le sol. On note β l'angle entre cette ligne et la verticale. Une marche, avec sa hauteur, sa profondeur et la ligne des marches, forme un triangle rectangle.



Trois marches de 17 cm de haut et 28 cm de profondeur, la ligne des marches, l'angle α avec le sol et l'angle β avec la verticale.

1.

Calculer $\tan\alpha$, puis la mesure de α au degré près.

INDICE

Début : dans le triangle d'une marche, nomme la hauteur et la profondeur par rapport à l'angle α.

CORRIGÉ

Rapport. Dans le triangle d'une marche, la hauteur de 17 cm est opposée à α et la profondeur de 28 cm lui est adjacente. Donc $\tan\alpha = \dfrac{17}{28}$.

Calculatrice. En degrés, « Shift » puis « tan » donne $\alpha \approx 31^\circ$ au degré près.

Conclusion. La ligne des marches fait un angle d'environ 31° avec le sol.

2.

Justifier que $\alpha + \beta = 90°$. En déduire $\tan\beta$ sous forme de fraction, et la mesure de β au degré près.

INDICE

Outil : la somme des angles d'un triangle.

Ensuite : pour la tangente, la propriété des angles complémentaires.

Point délicat : arrondis seulement à la fin.

CORRIGÉ

Angles. Le côté de 17 cm est vertical : l'angle entre la ligne des marches et ce côté est β. L'angle avec le côté horizontal, de 28 cm, est α. Ce sont les deux angles aigus du triangle de la marche.

Somme des angles. La somme des angles d'un triangle vaut $180°$, et ce triangle a un angle droit. Donc $\alpha + \beta = 180° - 90° = 90°$.

Tangente. Les angles α et β sont complémentaires. D'après la propriété des angles complémentaires, $\tan\beta = \dfrac{1}{\tan\alpha} = \dfrac{28}{17}$.

Mesure. Avec ce quotient non arrondi, « Shift » puis « tan » donne $\beta \approx 59°$ au degré près.

Conclusion. On a $\alpha + \beta = 90°$, $\tan\beta = \dfrac{28}{17}$ et $\beta \approx 59°$.

3.

Sans calculatrice, calculer $F = \sin^2 20° + \sin^2 70°$.

INDICE

Outil : remplace $\sin 70°$ grâce aux angles complémentaires.

Ensuite : la relation entre cosinus et sinus.

CORRIGÉ

Complémentaires. On a $20 + 70 = 90$. D'après la propriété des angles complémentaires, $\sin 70° = \cos 20°$.

Relation. On remplace, puis on applique la relation entre cosinus et sinus à l'angle de $20°$:

$$F = \sin^2 20° + \cos^2 20° = 1.$$

Conclusion. Le nombre F vaut 1.

4.

Sans calculatrice, calculer $G = \tan 15^\circ \times \tan 75^\circ$.

INDICE

Outil : pour deux angles complémentaires, les tangentes sont inverses l'une de l'autre.

CORRIGÉ

On a $15 + 75 = 90$: les deux angles sont complémentaires. D'après la propriété des angles complémentaires, $\tan 75^\circ = \dfrac{1}{\tan 15^\circ}$. On remplace dans G :

$$G = \tan 15^\circ \times \frac{1}{\tan 15^\circ} = 1.$$

Conclusion. Le nombre G vaut 1.