BURHAN

Triangle rectangle : théorème de Pythagore et trigonométrie : exercices, application

3ème Année Collège · Mathématiques

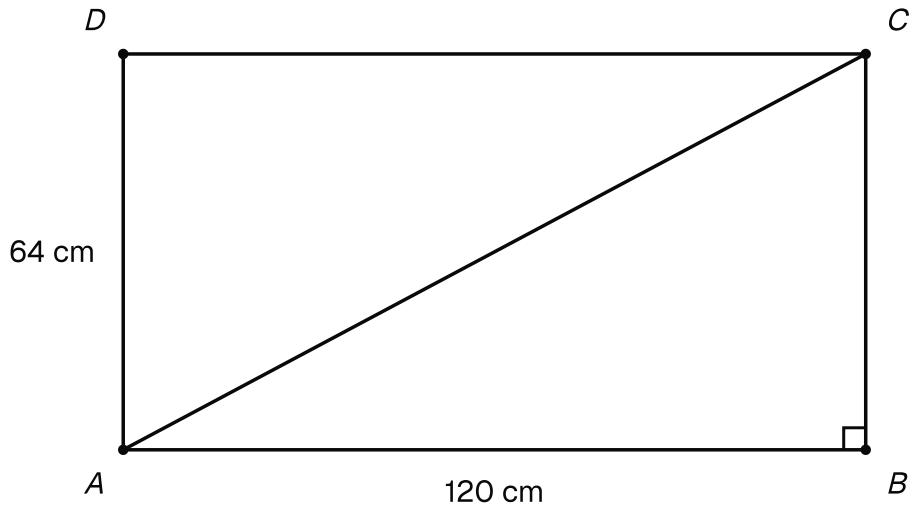
Version en ligne : burhan.ma/3ac/mathematiques/triangle-rectangle-et-trigonometrie/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Triangle rectangle : théorème de Pythagore et trigonométrie	Application	8

Exercice 1

La diagonale d'un écran de télévision

La taille d'un écran se mesure par sa diagonale. Un écran rectangulaire $ABCD$ a pour largeur $AB = 120$ cm et pour hauteur $BC = 64$ cm. Trace la figure sur ton cahier.



L'écran rectangulaire ABCD de 120 cm sur 64 cm et sa diagonale [AC], dont on cherche la longueur.

1.

Calculer la longueur de la diagonale $[AC]$.

INDICE

Outil : le théorème de Pythagore.

Début : le triangle ABC est rectangle en B, car $ABCD$ est un rectangle.

CORRIGÉ

Triangle. L'écran $ABCD$ est un rectangle, donc son angle en B est droit. Le triangle ABC est rectangle en B, et son hypoténuse est $[AC]$.

Égalité. Le théorème de Pythagore donne :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2.$$

Calcul. On remplace par $120^2 = 14\,400$ et $64^2 = 4\,096$:

$$\begin{aligned} AC^2 &= 14\,400 + 4\,096 \\ &= 18\,496. \end{aligned}$$

Une longueur est un nombre positif, et $136^2 = 18\,496$. Donc $AC = \sqrt{18\,496} = 136$ cm.

Conclusion. La diagonale $[AC]$ de l'écran mesure 136 cm.

2.

Un autre écran mesure 100 cm de large et 60 cm de haut. Donner la valeur exacte de sa diagonale, sous la forme la plus simple.

INDICE

Outil : la racine carrée d'un produit.

Point délicat : écris $13\,600 = 400 \times 34$.

CORRIGÉ

Calcul. On note d la diagonale de ce second écran. Comme pour le premier, elle est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent 100 cm et 60 cm. D'après le théorème de Pythagore, $d^2 = 10\,000 + 3\,600 = 13\,600$.

Simplification. On écrit $13\,600 = 400 \times 34$, où $400 = 20^2$ est un carré parfait. La racine carrée d'un produit est le produit des racines carrées :

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{13\,600} \\ &= \sqrt{400 \times 34} \\ &= \sqrt{400} \times \sqrt{34} \\ &= 20\sqrt{34}. \end{aligned}$$

Conclusion. La valeur exacte de la diagonale est $20\sqrt{34}$ cm.

3.

Donner une valeur approchée de cette diagonale au centimètre près.

INDICE

Outil : la calculatrice.

Point délicat : pars de la valeur exacte, sans arrondi intermédiaire.

CORRIGÉ

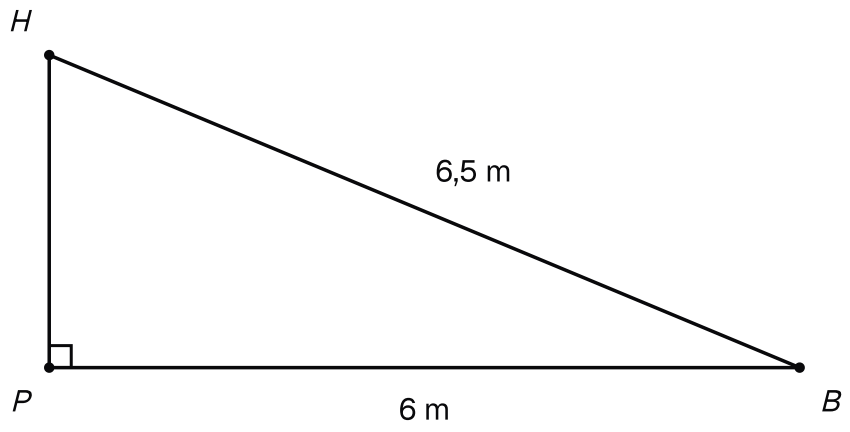
On part de la valeur exacte de la question 2, sans arrondi intermédiaire. La calculatrice affiche environ $116{,}62$ pour $20\sqrt{34}$.

Conclusion. On a $d = 20\sqrt{34} \approx 117$ cm au centimètre près.

Exercice 2

La hauteur d'un toboggan

Le haut de la glissière d'un toboggan est le point H. Le bas de la glissière est le point B, au sol. Le point P est au sol, juste sous H. Le triangle HPB est rectangle en P. La glissière mesure $HB = 6{,}5$ m et l'on a $PB = 6$ m.



La glissière [HB] du toboggan, de 6,5 m, le point P au sol sous H et la distance PB de 6 m.

1.

Calculer la hauteur HP du toboggan.

INDICE

Outil : le théorème de Pythagore.

Début : l'hypoténuse est la glissière $[HB]$.

CORRIGÉ

Égalité. Le triangle HPB est rectangle en P. Son hypoténuse est la glissière $[HB]$. D'après le théorème de Pythagore :

$$HB^2 = HP^2 + PB^2.$$

Isoler. On retire PB^2 des deux membres, avec $6{,}5^2 = 42{,}25$ et $6^2 = 36$:

$$\begin{aligned} HP^2 &= HB^2 - PB^2 \\ &= 42{,}25 - 36 \\ &= 6{,}25. \end{aligned}$$

Racine. Une longueur est un nombre positif, et $2{,}5^2 = 6{,}25$. Donc $HP = \sqrt{6{,}25} = 2{,}5$ m.

Conclusion. Le toboggan a une hauteur de $2{,}5$ m.

2.

Un petit toboggan a une glissière de 4 m, avec $PB = 3$ m. Donner la valeur exacte de sa hauteur.

INDICE

Outil : même égalité.

Point délicat : le résultat est la racine carrée d'un nombre qui n'est pas un carré parfait.

CORRIGÉ

Le triangle HPB est encore rectangle en P, avec cette fois $HB = 4$ m et $PB = 3$ m. On isole HP^2 comme à la question 1. D'après le théorème de Pythagore, $HP^2 = 16 - 9 = 7$.

Le nombre 7 n'est pas un carré parfait : on garde la racine carrée. Une longueur est positive, donc $HP = \sqrt{7}$ m.

Conclusion. La valeur exacte de la hauteur du petit toboggan est $\sqrt{7}$ m.

3.

Donner une valeur approchée de la hauteur du petit toboggan, au dixième de mètre.

INDICE

Outil : la touche racine carrée de la calculatrice.

CORRIGÉ

La calculatrice affiche environ $2{,}646$ pour $\sqrt{7}$. Le chiffre des centièmes est 4, donc on arrondit au dixième inférieur.

Conclusion. On a $\sqrt{7} \approx 2{,}6$ m au dixième : le petit toboggan mesure environ $2{,}6$ m de haut.

Exercice 3

Deux parcelles d'un potager

Un jardinier trace deux parcelles triangulaires. La parcelle EFG a pour côtés $EF = 3{,}3$ m, $FG = 5{,}6$ m et $EG = 6{,}5$ m. La parcelle KLN a pour côtés $KL = 4$ m, $LN = 7$ m et $KN = 8$ m.

1.

La parcelle EFG a-t-elle un angle droit ? Si oui, en quel sommet ?

INDICE

Outil : la réciproque du théorème de Pythagore.

Début : le plus long côté est $[EG]$.

CORRIGÉ

Plus long côté. C'est $[EG]$, de longueur $6{,}5$ m. Si le triangle a un angle droit, il est opposé à ce côté.

Calculs à part. D'une part, $EG^2 = 42{,}25$. D'autre part, $EF^2 + FG^2 = 10{,}89 + 31{,}36 = 42{,}25$.

Comparaison. Les deux résultats coïncident. On applique la réciproque du théorème de Pythagore : EFG est rectangle en F, le sommet opposé à $[EG]$.

Conclusion. Oui : la parcelle EFG a un angle droit, au sommet F.

2.

La parcelle KLN a-t-elle un angle droit ?

INDICE

Outil : compare encore deux nombres.

Point délicat : si les nombres diffèrent, nomme la bonne propriété.

CORRIGÉ

Calculs à part. Le plus long côté est $[KN]$. D'une part, $KN^2 = 64$. D'autre part, $KL^2 + LN^2 = 16 + 49 = 65$.

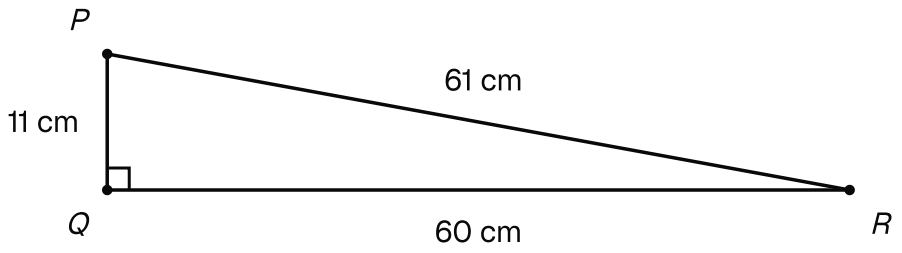
Comparaison. On a $64 \neq 65$. Si le triangle était rectangle, ces deux nombres seraient égaux. D'après la propriété du triangle qui n'est pas rectangle, KLN n'est donc pas rectangle.

Conclusion. Non : la parcelle KLN n'a pas d'angle droit.

Exercice 4

Nommer les côtés et écrire les rapports

Le triangle PQR est rectangle en Q. On a $PQ = 11$ cm, $QR = 60$ cm et $PR = 61$ cm. Trace une figure à main levée sur ton cahier.



Le triangle PQR rectangle en Q, de côtés PQ = 11 cm, QR = 60 cm et PR = 61 cm.

1.

Pour l'angle $\widehat{QPR}$, nommer l'hypoténuse, le côté opposé et le côté adjacent.

INDICE

Outil : le vocabulaire du triangle rectangle.

Début : l'hypoténuse fait face à l'angle droit en Q.

CORRIGÉ

Hypoténuse. Elle fait face à l'angle droit, de sommet Q : c'est $[PR]$.

Côté adjacent. Il part du sommet P et il est un côté de l'angle droit : c'est $[PQ]$.

Côté opposé. Il fait face au sommet P : c'est $[QR]$.

Conclusion. Pour l'angle $\widehat{QPR}$, l'hypoténuse est $[PR]$, le côté opposé est $[QR]$ et le côté adjacent est $[PQ]$.

2.

Écrire $\cos\widehat{QPR}$, $\sin\widehat{QPR}$ et $\tan\widehat{QPR}$ sous forme de fractions.

INDICE

Outil : les définitions des trois rapports.

Début : le cosinus est adjacent sur hypoténuse.

CORRIGÉ

On utilise les côtés trouvés à la question 1 et les longueurs données.

Cosinus. C'est le côté adjacent divisé par l'hypoténuse : $\cos\widehat{QPR} = \dfrac{PQ}{PR} = \dfrac{11}{61}$.

Sinus. C'est le côté opposé divisé par l'hypoténuse : $\sin\widehat{QPR} = \dfrac{QR}{PR} = \dfrac{60}{61}$.

Tangente. C'est le côté opposé divisé par le côté adjacent : $\tan\widehat{QPR} = \dfrac{QR}{PQ} = \dfrac{60}{11}$.

3.

Écrire de même les trois rapports de l'angle $\widehat{QRP}$.

INDICE

Point délicat : pour l'angle en R, le côté opposé et le côté adjacent changent.

CORRIGÉ

Côtés. Pour l'angle de sommet R, le côté adjacent est $[QR]$ et le côté opposé est $[PQ]$. L'hypoténuse reste $[PR]$.

Rapports. On applique les mêmes définitions qu'à la question 2 :

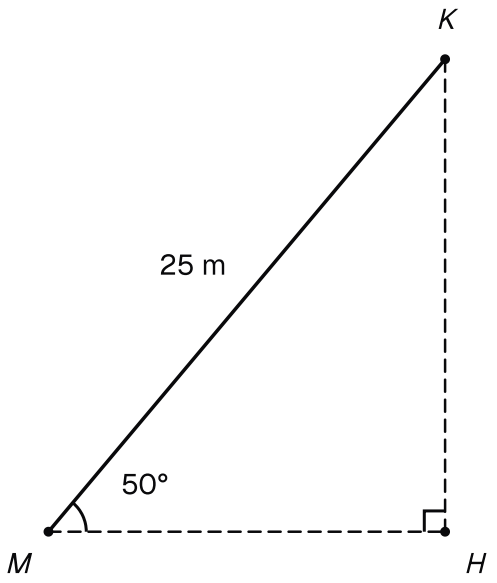
- $\cos\widehat{QRP} = \dfrac{60}{61}$;
- $\sin\widehat{QRP} = \dfrac{11}{61}$;
- $\tan\widehat{QRP} = \dfrac{11}{60}$.

Remarque. Le cosinus d'un angle aigu est le sinus de l'autre : les deux angles aigus du triangle sont complémentaires.

Exercice 5

Le fil d'un cerf-volant

Samia fait voler un cerf-volant. Le fil $[MK]$ est tendu et mesure 25 m. Le point M est sa main, le point K le cerf-volant. Le point H est sous K, à la hauteur de la main. Le triangle MHK est rectangle en H. Le fil fait un angle $\widehat{HMK} = 50^\circ$ avec l'horizontale.



Le fil [MK] du cerf-volant, long de 25 m, fait un angle de 50 degrés avec l'horizontale passant par la main M.

1.

Calculer la hauteur HK, au dixième de mètre.

INDICE

Outil : nomme les trois côtés à partir de l'angle en M.

Ensuite : le fil $[MK]$ est l'hypoténuse.

CORRIGÉ

Rapport. Pour l'angle en M, le côté $[HK]$ est opposé et le fil $[MK]$ est l'hypoténuse. Le rapport qui relie ces deux côtés est le sinus : $\sin 50^\circ = \dfrac{HK}{25}$.

Produit en croix. On multiplie les deux membres par 25 : $HK = 25 \times \sin 50^\circ$.

Calculatrice. Réglée en degrés, elle donne $HK \approx 19{,}2$ m au dixième.

Conclusion. Le cerf-volant est à environ $19{,}2$ m au-dessus de la main de Samia.

2.

Calculer la distance horizontale MH, au dixième de mètre.

INDICE

Outil : cette fois, nomme le côté $[MH]$ par rapport à l'angle en M.

CORRIGÉ

Rapport. Pour l'angle en M, le côté $[MH]$ est adjacent et $[MK]$ reste l'hypoténuse. On utilise donc le cosinus : $\cos 50^\circ = \dfrac{MH}{25}$.

Produit en croix. $MH = 25 \times \cos 50^\circ$.

Calculatrice. En degrés, on obtient $MH \approx 16{,}1$ m au dixième.

Conclusion. La distance horizontale MH vaut environ $16{,}1$ m.

Exercice 6

Une route en montée, la pente d'un toit

1.

Sur une route en montée, une voiture parcourt 400 m. Elle s'élève alors de 28 m. Calculer l'angle de la route avec l'horizontale, au degré près.

INDICE

Début : fais un triangle rectangle : la route est l'hypoténuse.

Ensuite : nomme la hauteur gagnée par rapport à l'angle cherché.

CORRIGÉ

Rapport. On dessine un triangle rectangle : la route en est l'hypoténuse, de 400 m, et la hauteur gagnée, de 28 m, est opposée à l'angle cherché x. Le sinus relie ces deux côtés : $\sin x = \dfrac{28}{400} = 0{,}07$.

Calculatrice. Réglée en degrés, « Shift » puis « sin » donne $x \approx 4^\circ$ au degré près.

Contrôle. Cette mesure est bien comprise entre 0° et 90°, comme celle d'un angle aigu.

Conclusion. La route fait un angle d'environ 4° avec l'horizontale.

2.

Un pan de toit monte de 3 m pour une distance horizontale de 5 m. Calculer son angle avec l'horizontale, au degré près.

INDICE

Outil : les deux longueurs connues sont les côtés de l'angle droit.

Point délicat : l'hypoténuse n'est pas connue, donc seul le rapport qui ne l'emploie pas est utilisable.

CORRIGÉ

Rapport. La montée de 3 m est opposée à l'angle y et la distance horizontale de 5 m lui est adjacente. L'hypoténuse n'est pas connue : on utilise la tangente, $\tan y = \dfrac{3}{5} = 0{,}6$.

Calculatrice. En degrés, « Shift » puis « tan » donne $y \approx 31^\circ$ au degré près.

Conclusion. Le pan de toit fait un angle d'environ 31° avec l'horizontale.

Exercice 7

Un rapport connu donne les deux autres

1.

L'angle aigu x vérifie $\cos x = 0{,}28$. Calculer $\sin x$.

INDICE

Outil : la relation entre cosinus et sinus.

Début : $0{,}28^2 = 0{,}0784$.

CORRIGÉ

Carré du sinus. D'après la relation entre cosinus et sinus, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. On a $0{,}28^2 = 0{,}0784$, donc $\sin^2 x = 1 - 0{,}0784 = 0{,}9216$.

Sinus. L'angle x est aigu, donc $\sin x > 0$. De plus $0{,}96^2 = 0{,}9216$. Ainsi $\sin x = \sqrt{0{,}9216} = 0{,}96$.

Conclusion. On obtient $\sin x = 0{,}96$.

2.

En déduire $\tan x$ sous forme de fraction.

INDICE

Outil : la seconde relation, entre la tangente, le sinus et le cosinus.

Point délicat : simplifie la fraction obtenue.

CORRIGÉ

D'après la relation entre la tangente, le sinus et le cosinus, $\tan x$ est le quotient de $\sin x$ par $\cos x$. On simplifie ensuite par 4 :

$$\tan x = \frac{0{,}96}{0{,}28} = \frac{96}{28} = \frac{24}{7}.$$

Conclusion. On a $\tan x = \dfrac{24}{7}$.

3.

L'angle aigu y vérifie $\sin y = \dfrac{1}{3}$. Calculer la valeur exacte de $\cos y$.

INDICE

Outil : la relation entre cosinus et sinus, dans l'autre sens.

Point délicat : simplifie la racine carrée de 8.

CORRIGÉ

Carré du cosinus. La relation entre cosinus et sinus donne $\cos^2 y = 1 - \sin^2 y$. Ici $\sin^2 y = \dfrac{1}{9}$, donc $\cos^2 y = 1 - \dfrac{1}{9} = \dfrac{8}{9}$.

Cosinus. L'angle y est aigu, donc $\cos y > 0$. On écrit $\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2}$. Ainsi $\cos y = \dfrac{\sqrt{8}}{3} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Conclusion. La valeur exacte est $\cos y = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Exercice 8

Des calculs sans calculatrice

1.

Calculer $A = \cos 30° \times \sin 60° - \sin 30° \times \cos 60°$.

INDICE

Outil : le tableau des valeurs remarquables.

Début : remplace chaque rapport par sa valeur exacte.

CORRIGÉ

Valeurs. D'après le tableau des valeurs remarquables, $\cos 30° = \sin 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin 30° = \cos 60° = \dfrac{1}{2}$.

Produits. $\dfrac{\sqrt{3}}{2} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3}{4}$ et $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$.

Résultat. $A = \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.

Conclusion. Le nombre A vaut $\dfrac{1}{2}$.

2.

Calculer $B = \sin^2 45° + \tan 45°$.

INDICE

Point délicat : $\sin^2 45°$ est le carré de $\sin 45°$.

CORRIGÉ

Carré. D'après le tableau des valeurs remarquables, $\sin 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Donc $\sin^2 45° = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.

Somme. Le même tableau donne $\tan 45° = 1$, donc $B = \dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{3}{2}$.

Conclusion. Le nombre B vaut $\dfrac{3}{2}$.

3.

On donne $\cos 20° \approx 0{,}94$ au centième. Sans calculatrice, donner une valeur approchée de $\sin 70°$.

INDICE

Outil : calcule $20 + 70$. Que peux-tu dire de ces deux angles ?

CORRIGÉ

Angles. On a $20 + 70 = 90$: les angles de $20°$ et de $70°$ sont complémentaires.

Propriété. Le sinus d'un angle aigu est le cosinus de son complémentaire. D'après la propriété des angles complémentaires, $\sin 70° = \cos 20°$.

Conclusion. On a $\sin 70° \approx 0{,}94$ au centième.