BURHAN

Triangle rectangle : théorème de Pythagore et trigonométrie

3ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/3ac/mathematiques/triangle-rectangle-et-trigonometrie/cours

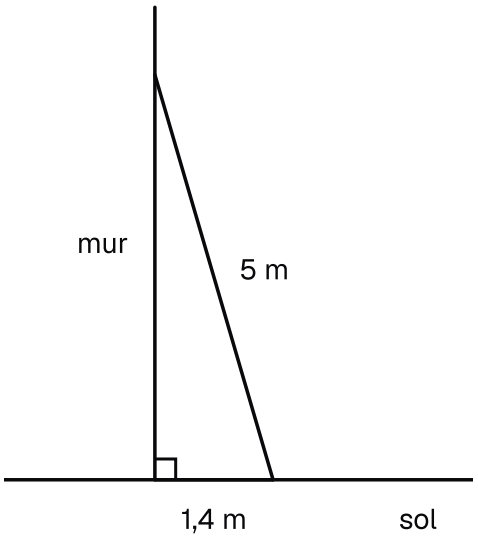
Chapitre	Semestre
Triangle rectangle : théorème de Pythagore et trigonométrie	Semestre 1

Une échelle contre un mur

Une échelle de 5 m est posée contre un mur. Le mur est vertical et le sol est horizontal. Le pied de l'échelle est à $1{,}4$ m du mur.

Jusqu'où l'échelle monte-t-elle sur le mur ? Quel angle fait-elle avec le sol ? Tu n'as ni mètre ni rapporteur.

Fais un petit schéma sur ton cahier.



Le schéma de l'échelle de 5 m appuyée contre le mur, son pied posé sur le sol à 1,4 m du mur.

Devine : Une prédiction

À quelle hauteur arrive le haut de l'échelle sur le mur ?

A. À 5 m.

Faux.

L'échelle est penchée : elle monte moins haut que sa longueur.

B. À $6{,}4$ m.

Faux.

Tu as ajouté 5 et $1{,}4$. L'échelle ne peut pas monter plus haut que sa longueur.

C. À $4{,}8$ m.

Juste.

Juste : c'est un peu moins que la longueur de l'échelle.

D. À $3{,}6$ m.

Faux.

Tu as retiré $1{,}4$ à 5. Les côtés d'un triangle rectangle ne se soustraient pas ainsi : tu vas revoir le bon calcul.

Correction

Le mur, le sol et l'échelle forment un triangle rectangle. L'angle droit est au pied du mur, et l'échelle est l'hypoténuse.

Notons h la hauteur atteinte sur le mur. D'après le théorème de Pythagore, $5^2 = 1{,}4^2 + h^2$. On isole h^2 :

$$\begin{aligned} h^2 &= 25 - 1{,}96 \\ &= 23{,}04 \end{aligned}$$

Une longueur est positive, et $4{,}8^2 = 23{,}04$: donc $h = 4{,}8$ m.

L'angle avec le sol se calcule plus loin, avec le cosinus.

Dans ce chapitre, tu revois le théorème de Pythagore. Tu apprends à prouver qu'un triangle est rectangle, ou qu'il ne l'est pas.

Puis tu découvres le sinus et la tangente d'un angle aigu. Avec eux, tu calcules une longueur ou un angle sans le mesurer.

Rappel : le théorème de Pythagore

Le côté le plus long

Rappel de 2e année : un triangle **rectangle** a un angle droit.

Le côté opposé à l'angle droit s'appelle l'**hypoténuse**. C'est le côté le plus long du triangle.

Vérifie : Trouver l'hypoténuse

Le triangle EFG est rectangle en F. Quelle est son hypoténuse ?

A. Le côté $[EF]$.

Faux.

Ce côté passe par F : c'est un côté de l'angle droit.

B. Le côté $[EG]$.

Juste.

Juste : il est en face de l'angle droit en F.

C. Le côté $[FG]$.

Faux.

Ce côté passe par F : c'est un côté de l'angle droit.

D. On ne peut pas savoir.

Faux.

Il suffit de savoir où est l'angle droit.

Correction

L'angle droit est en F. L'hypoténuse est le côté qui ne passe pas par F : c'est $[EG]$.

Les côtés $[EF]$ et $[FG]$, eux, forment l'angle droit.

Le théorème de Pythagore

Théorème : Théorème de Pythagore

Soit ABC un triangle rectangle en A. Son côté le plus long, $[BC]$, opposé à l'angle droit, s'appelle l'**hypoténuse**.

Le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

Démonstration

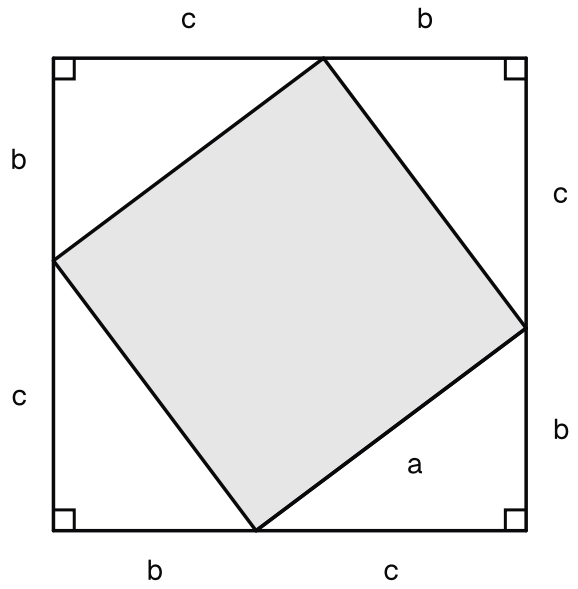
Idée de la preuve. Ce théorème a été démontré en 2e année du collège ; en voici seulement l'idée. On note $a = BC$, $b = AB$ et $c = AC$.

Étape 1. On construit un grand carré de côté $b + c$. On y place quatre copies du triangle ABC, une dans chaque coin. Elles laissent au centre un carré de côté a : ce point de la construction n'est pas justifié ici.

Étape 2. On calcule l'aire du grand carré de deux façons : directement, puis comme l'aire du petit carré augmentée de l'aire des quatre triangles. On obtient $(b + c)^2 = a^2 + 4 \times \dfrac{bc}{2}$. Après développement et simplification, il reste $b^2 + c^2 = a^2$.

À retenir : L'idée à retenir

- La preuve calcule **une même aire de deux façons**.
- Les deux résultats sont égaux.
- En développant et en simplifiant, on obtient l'égalité de Pythagore.
- Cette idée resservira : deux calculs d'une même grandeur donnent une égalité.



Le grand carré de côté b + c découpé en quatre triangles rectangles identiques, dans les coins, et un carré central de côté a.

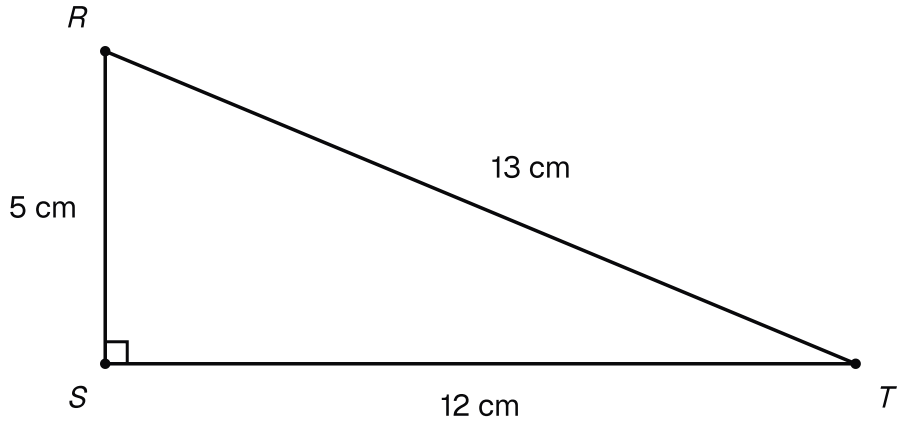
Exemple : calculer l'hypoténuse

Le triangle RST est rectangle en S, avec $RS = 5$ cm et $ST = 12$ cm. L'hypoténuse est $[RT]$, en face de l'angle droit.

D'après le théorème de Pythagore, $RT^2 = RS^2 + ST^2$. On remplace les longueurs connues :

$$RT^2 = 25 + 144 = 169$$

Une longueur est positive : $RT = \sqrt{169} = 13$ cm.



Le triangle RST rectangle en S : les côtés de l'angle droit mesurent 5 cm et 12 cm, l'hypoténuse [RT] mesure 13 cm.

Calculer un côté de l'angle droit

Exemple : un côté de l'angle droit

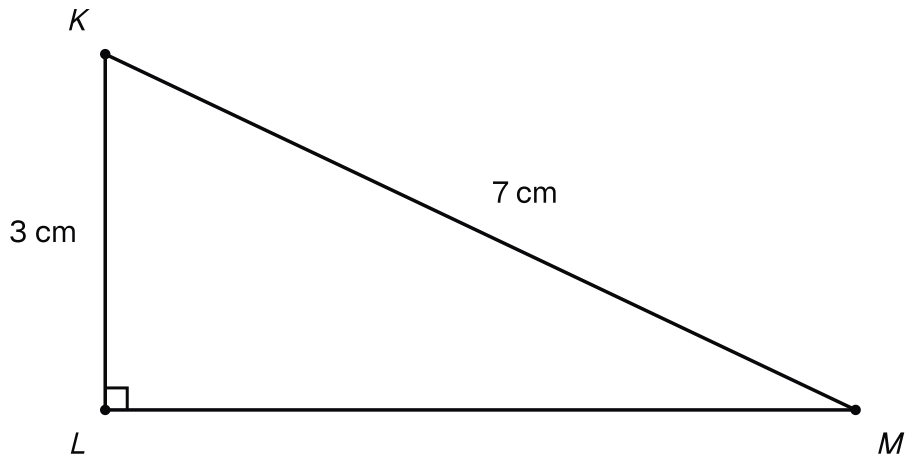
Le triangle KLM est rectangle en L, avec $KM = 7$ cm et $KL = 3$ cm. On cherche LM.

L'hypoténuse est $[KM]$. D'après le théorème de Pythagore, $KM^2 = KL^2 + LM^2$. On isole LM^2 :

$$\begin{aligned} LM^2 &= KM^2 - KL^2 \\ &= 49 - 9 = 40 \end{aligned}$$

Une longueur est positive : $LM = \sqrt{40}$ cm. Rappel du chapitre sur les racines carrées : $\sqrt{40} = \sqrt{4 \times 10} = 2\sqrt{10}$.

Donc $LM = 2\sqrt{10}$ cm. À la calculatrice, $LM \approx 6{,}3$ cm au dixième.



Le triangle KLM rectangle en L, avec l'hypoténuse [KM] de 7 cm et le côté [KL] de 3 cm ; le côté [LM] est celui que l'on cherche.

Méthode : une longueur par le théorème de Pythagore

1. **Trouve** l'angle droit. L'hypoténuse est le côté en face.
2. **Écris** l'égalité avec les lettres de la figure. Le carré de l'hypoténuse est seul d'un côté.
3. **Remplace** les deux longueurs connues. Calcule le carré cherché.
4. **Prends** la racine carrée positive. Donne la valeur exacte, puis une valeur approchée si on te la demande.

Deux pièges, puis à toi

Attention : le carré de l'hypoténuse est seul

✗ « Le triangle PQR est rectangle en Q, donc $PQ^2 = PR^2 + QR^2$. »

✓ L'angle droit est en Q. L'hypoténuse est donc $[PR]$. On écrit $PR^2 = PQ^2 + QR^2$.

Repère toujours l'hypoténuse avant d'écrire l'égalité.

Trouve l'erreur : La copie de Sami

Le triangle DEF est rectangle en E, avec $DE = 1$ cm et $EF = 2{,}4$ cm. Sami écrit : « $DF = 1 + 2{,}4 = 3{,}4$ cm. » Où est l'erreur ?

A. Il s'est trompé d'hypoténuse.
Faux.
Non : l'hypoténuse est bien $[DF]$, en face de l'angle droit.

B. Il a oublié d'écrire l'unité de longueur.
Faux.
Non : l'unité est écrite. L'erreur est dans le calcul.

C. Il a ajouté les longueurs, pas leurs carrés.
Juste.
Juste : on ajoute DE^2 et EF^2, puis on prend la racine carrée.

D. Il n'y a pas d'erreur.
Faux.
Si : $3{,}4^2 = 11{,}56$, alors que $DE^2 + EF^2 = 6{,}76$.

Correction
Le triangle DEF est rectangle en E : son hypoténuse est $[DF]$. D'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} DF^2 &= DE^2 + EF^2 \\ &= 1 + 5{,}76 = 6{,}76 \end{aligned}$$

Une longueur est positive : $DF = \sqrt{6{,}76} = 2{,}6$ cm.

Le résultat de Sami, $3{,}4$ cm, est trop grand : il a ajouté les longueurs, et non leurs carrés.

Attention : la racine carrée d'une somme

✗ « $\sqrt{9^2 + 12^2} = 9 + 12 = 21$. »

✓ On calcule d'abord la somme des carrés : $81 + 144 = 225$. Puis on prend la racine carrée : $\sqrt{225} = 15$.

La racine carrée d'une somme n'est pas la somme des racines carrées.

À toi : Un côté de l'angle droit

Le triangle XYZ est rectangle en Y, avec $XZ = 17$ cm et $XY = 8$ cm. Calcule YZ. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Repère l'angle droit, puis l'hypoténuse.
Indice 2
Écris l'égalité de Pythagore, avec XZ^2 seul d'un côté.
Indice 3
Point délicat : la longueur cherchée n'est pas l'hypoténuse. Tu fais une soustraction.

Réponse
L'angle droit est en Y : l'hypoténuse est $[XZ]$, et l'on cherche un côté de l'angle droit.

Égalité. D'après le théorème de Pythagore, $XZ^2 = XY^2 + YZ^2$.

Calcul. On isole YZ^2 par une soustraction :

$$\begin{aligned} YZ^2 &= 289 - 64 \\ &= 225 \end{aligned}$$

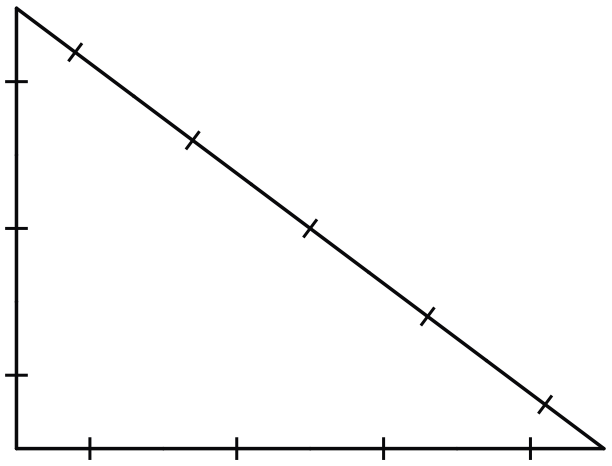
Conclusion. Une longueur est positive, donc $YZ = \sqrt{225} = 15$ cm.

Réciproque du théorème de Pythagore : reconnaître un triangle rectangle

La corde à douze nœuds

Il y a très longtemps, des bâtisseurs utilisaient une corde à 12 nœuds. Les nœuds étaient régulièrement espacés. Avec cette corde, ils formaient un triangle de côtés 3, 4 et 5 intervalles.

Ce triangle leur donnait un angle droit, pour tracer le coin d'un mur. Ils ne connaissaient pas d'équerre précise.



La corde des bâtisseurs tendue en triangle : douze intervalles égaux, répartis en trois, quatre et cinq sur les côtés.

Devine : Le triangle de la corde

Un triangle a des côtés de longueurs 3, 4 et 5. D'après toi, est-il rectangle ?

A. Oui, et l'angle droit est entre les côtés 3 et 4.

Juste.

Juste : il est en face du côté le plus long, 5.

B. Oui, et l'angle droit est en face du côté 3.

Faux.

L'angle droit est en face du côté le plus long.

C. Non, il faudrait deux côtés égaux.

Faux.

Un triangle rectangle n'a pas besoin de deux côtés égaux.

D. On ne peut pas le savoir sans rapporteur.

Faux.

Un calcul sur les longueurs suffit, comme tu vas le voir.

Correction

On compare le carré du côté le plus long et la somme des carrés des deux autres côtés.

On a $5^2 = 25$ et $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$. Les deux nombres sont égaux.

La réciproque du théorème de Pythagore, juste en dessous, permet de conclure : le triangle est rectangle. L'angle droit est en face du côté 5.

La réciproque

Théorème : Réciproque du théorème de Pythagore

Soit ABC un triangle. Si

$$BC^2 = AB^2 + AC^2,$$

alors le triangle ABC est **rectangle en** A. L'angle droit est au sommet opposé au côté le plus long.

Remarque

Ce résultat est admis.

Exemple : un triangle rectangle

Le triangle LMN a pour côtés $LM = 8$ cm, $LN = 15$ cm et $MN = 17$ cm.

- Le côté le plus long est $[MN]$.
- D'une part, $MN^2 = 289$.
- D'autre part, $LM^2 + LN^2 = 64 + 225 = 289$.
- Les deux nombres sont égaux. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle LMN est rectangle en L.

Un triangle qui n'est pas rectangle

Un triangle a pour côtés 4 cm, 5 cm et 6 cm. On a $6^2 = 36$ et $4^2 + 5^2 = 41$.

Les deux nombres sont différents. Ce triangle n'est pas rectangle.

Pourquoi est-ce vrai ? Imagine que ce triangle ait un angle droit. Son hypoténuse serait le plus long côté, celui de 6 cm. Le théorème de Pythagore donnerait $36 = 41$. C'est faux : il n'a donc pas d'angle droit.

Propriété : Triangle qui n'est pas rectangle

Soit ABC un triangle dont le côté le plus long est $[BC]$. Si

$$BC^2 \neq AB^2 + AC^2,$$

alors le triangle ABC **n'est pas rectangle**.

Démonstration

Étape 1. Supposons que le triangle ABC soit rectangle. Son hypoténuse serait alors son côté le plus long, c'est-à-dire $[BC]$: l'angle droit serait en A.

Étape 2. D'après le théorème de Pythagore, on aurait alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Étape 3. Or, par hypothèse, $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$. La supposition de l'étape 1 est donc impossible : le triangle ABC n'est pas rectangle.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

- La preuve **suppose le contraire** : le triangle serait rectangle.
- Alors son hypoténuse serait le côté le plus long.
- Le théorème de Pythagore donnerait une égalité. Or elle est fausse.
- La supposition est donc impossible.

Vérifie : Où serait l'angle droit ?

Dans la preuve, pourquoi l'angle droit serait-il en A ?

A. Car A est la première lettre du triangle.
Faux.
Le nom des sommets ne décide de rien.

B. Car $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$.
Faux.
Cette hypothèse sert à la fin de la preuve, pas ici.

C. Car $[BC]$, le plus long côté, serait l'hypoténuse.
Juste.
Juste : l'angle droit est en face de l'hypoténuse.

D. Car le triangle serait isocèle.
Faux.
Rien ne dit que le triangle a deux côtés égaux.

Correction
Rappel de 2e année : dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est le côté le plus long. Ici, le côté le plus long est $[BC]$. L'angle droit serait donc en face de $[BC]$, c'est-à-dire en A.

Exemple : l'hypothèse compte

Choisis bien le plus long côté. Reprends le triangle de la corde, de côtés 3, 4 et 5.

Compare $4^2 = 16$ et $3^2 + 5^2 = 34$: les nombres sont différents. Pourtant ce triangle est rectangle ! Le côté 4 n'est pas le plus long : ce calcul était mal choisi.

Un triangle presque rectangle. Ses côtés mesurent 7 cm, 24 cm et $25{,}1$ cm. Sur un dessin, l'angle semble droit.

Mais $25{,}1^2 = 630{,}01$ et $7^2 + 24^2 = 625$: ce triangle n'est pas rectangle.

La méthode et un piège

Méthode : rectangle ou pas rectangle ?

1. **Repère** le côté le plus long.
2. **Calcule** son carré, d'un côté.
3. **Calcule** la somme des carrés des deux autres côtés, de l'autre côté.
4. **Compare.** Égaux : d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle est rectangle. Différents : d'après la propriété du triangle qui n'est pas rectangle, il ne l'est pas.

Exemple : avec des nombres décimaux

Le triangle RST a pour côtés $RS = 3{,}6$ cm, $ST = 1{,}5$ cm et $RT = 3{,}9$ cm.

- Le côté le plus long est $[RT]$.
- D'une part, $RT^2 = 15{,}21$.
- D'autre part, $RS^2 + ST^2 = 12{,}96 + 2{,}25 = 15{,}21$.
- Les deux nombres sont égaux. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle RST est rectangle en S.

Attention : ne pas conclure avant de calculer

✗ « $GH^2 = GK^2 + HK^2$, donc le triangle GHK est rectangle. »

✓ Cette égalité est justement ce qu'il faut vérifier. On ne l'écrit pas au début.

Calcule d'abord GH^2, puis, à part, $GK^2 + HK^2$. Compare les deux nombres. Ensuite seulement, conclus.

À toi, puis le coin examen

> **À toi : Deux triangles**
>
> Le triangle UVW a pour côtés $UV = 11$ cm, $VW = 61$ cm et $UW = 60$ cm.

Le triangle OPQ a pour côtés $OP = 6$ cm, $PQ = 9$ cm et $OQ = 7$ cm. Chacun est-il rectangle ? Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Applique la méthode à chaque triangle.
Indice 2
Pour UVW, compare VW^2 et $UV^2 + UW^2$.
Indice 3
Point délicat : dans OPQ, le côté le plus long est $[PQ]$, et pas le dernier écrit.

Réponse
Triangle UVW. Le côté le plus long est $[VW]$. D'une part, $VW^2 = 3\,721$. D'autre part :

$$\begin{aligned} &UV^2 + UW^2 \\ &= 121 + 3\,600 \\ &= 3\,721 \end{aligned}$$

Les deux nombres sont égaux. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, UVW est rectangle en U.

Triangle OPQ. Le côté le plus long est $[PQ]$. D'une part, $PQ^2 = 81$. D'autre part, $OP^2 + OQ^2 = 36 + 49 = 85$.

Les nombres sont différents. D'après la propriété du triangle qui n'est pas rectangle, OPQ n'est pas rectangle.

Conclusion. Le triangle UVW est rectangle en U, et le triangle OPQ n'est pas rectangle.

Remarque : Coin examen : rédiger avec la réciproque

En examen, chaque conclusion cite la propriété employée. Voici un modèle de rédaction :

« Dans le triangle IJK, le côté le plus long est $[JK]$. D'une part, $JK^2 = 29^2 = 841$.

D'autre part :

$$\begin{aligned} &IJ^2 + IK^2 \\ &= 20^2 + 21^2 \\ &= 400 + 441 = 841 \end{aligned}$$

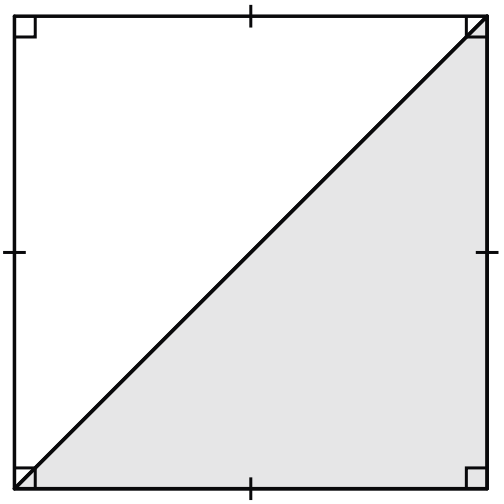
Donc $JK^2 = IJ^2 + IK^2$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle IJK est rectangle en I. »

Pythagore dans les figures usuelles

Un triangle rectangle caché

Rappel de 1re année : un carré a quatre côtés égaux et quatre angles droits. Trace un carré sur ton cahier, puis une diagonale.

Elle coupe le carré en deux triangles rectangles. La diagonale est leur hypoténuse.



Un carré et l'une de ses diagonales : elle le partage en deux triangles rectangles dont elle est l'hypoténuse commune.

Devine : La diagonale d'un carré

Un carré a des côtés de 5 cm. Combien mesure sa diagonale, au centimètre près ?

A. Environ 5 cm.

Faux.

La diagonale est l'hypoténuse : elle est plus longue qu'un côté.

B. Environ 10 cm.

Faux.

Tu as ajouté deux côtés. Or $10^2 = 100$, et $5^2 + 5^2 = 50$.

C. Environ 25 cm.

Faux.

C'est l'aire du carré, en cm², pas une longueur.

D. Environ 7 cm.

Juste.

Juste : le carré de la diagonale vaut 50, proche de 49.

Correction

Un carré a quatre angles droits : le triangle formé par deux côtés et la diagonale est rectangle, et la diagonale en est l'hypoténuse.

D'après le théorème de Pythagore, le carré de la diagonale vaut $5^2 + 5^2 = 50$.

La diagonale vaut donc $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ cm. À la calculatrice, c'est environ 7 cm au centimètre près.

Exemple : la diagonale d'un carré de côté a

Soit $EFGH$ un carré de côté a. Un carré a quatre angles droits : le triangle EFG est rectangle en F.

D'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} EG^2 &= EF^2 + FG^2 \\ &= a^2 + a^2 = 2a^2 \end{aligned}$$

Rappel du chapitre sur les racines carrées : $\sqrt{2a^2} = \sqrt{2} \times \sqrt{a^2} = a\sqrt{2}$, car a est positif.

La diagonale mesure $a\sqrt{2}$. Pour $a = 3$ cm, elle vaut $3\sqrt{2}$ cm, soit environ $4{,}2$ cm au dixième.

La hauteur d'un triangle équilatéral

Exemple : la hauteur d'un triangle équilatéral de côté a

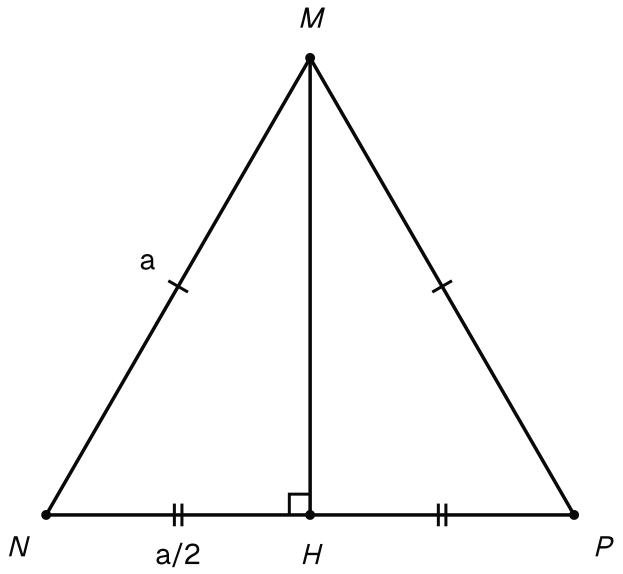
Soit MNP un triangle équilatéral de côté a, et H le milieu de $[NP]$. Rappel de 1re année : la médiane $[MH]$ est aussi une hauteur.

Le triangle MHN est donc rectangle en H, avec $HN = \dfrac{a}{2}$. D'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} MH^2 &= MN^2 - HN^2 \\ &= a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4} \end{aligned}$$

On prend la racine carrée, car une longueur est positive : $MH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Pour $a = 4$ cm, la hauteur vaut $2\sqrt{3}$ cm, soit environ $3{,}5$ cm au dixième.



Le triangle équilatéral MNP de côté a, partagé par la hauteur [MH] en deux triangles rectangles en H, avec HN = a/2.

Vérifie : Une hauteur à calculer

Un triangle équilatéral a des côtés de 6 cm. Combien mesure sa hauteur ?

A. 3 cm

Faux.

C'est la moitié d'un côté, pas la hauteur.

B. $6\sqrt{3}$ cm

Faux.

Tu as oublié de diviser par 2 : la formule est $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

C. $\sqrt{45}$ cm

Faux.

Tu as ajouté 36 et 9. Or la hauteur n'est pas l'hypoténuse.

D. $3\sqrt{3}$ cm

Juste.

Juste : $\frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$.

Correction

Le pied de la hauteur est le milieu d'un côté. On obtient un triangle rectangle d'hypoténuse 6 cm et de petit côté 3 cm.

D'après le théorème de Pythagore, le carré de la hauteur vaut $36 - 9 = 27$.

La hauteur vaut donc $\sqrt{27} = \sqrt{9 \times 3} = 3\sqrt{3}$ cm.

Un triangle isocèle, puis la méthode

Exemple : la hauteur d'un triangle isocèle

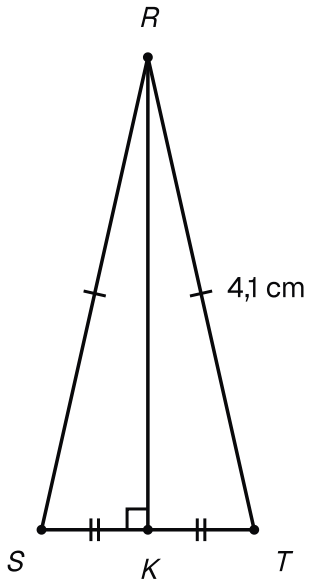
Le triangle RST est isocèle en R, avec $RS = RT = 4{,}1$ cm et $ST = 1{,}8$ cm. Soit K le milieu de $[ST]$.

Rappel de 1re année : dans ce triangle isocèle, la médiane $[RK]$ est aussi une hauteur. Le triangle RKS est donc rectangle en K, avec $KS = 0{,}9$ cm.

D'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} RK^2 &= RS^2 - KS^2 \\ &= 16{,}81 - 0{,}81 = 16 \end{aligned}$$

Une longueur est positive, donc $RK = 4$ cm.



Le triangle RST isocèle en R : la médiane [RK] tombe perpendiculairement sur [ST], en son milieu K.

Méthode : dans une figure usuelle

1. **Cherche** un triangle rectangle caché : une diagonale de carré, une hauteur de triangle.
2. **Justifie** l'angle droit par une propriété de la figure. Nomme cette propriété.
3. **Applique** le théorème de Pythagore à ce triangle.
4. **Simplifie** la racine carrée, par exemple en $a\sqrt{2}$ ou en $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

D'autres figures, puis à toi

Remarque : d'autres figures

Le même geste sert dans d'autres figures. Les polygones réguliers, comme l'hexagone, cachent aussi des triangles rectangles. Tu les rencontreras dans les exercices.

À toi : Du côté à la diagonale, et retour

Un carré a une diagonale de 8 cm. Calcule la longueur exacte de son côté, puis une valeur approchée au dixième. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Appelle c le côté. Le triangle formé par deux côtés et la diagonale est rectangle.
Indice 2
D'après le théorème de Pythagore, $c^2 + c^2 = 8^2$.
Indice 3
Point délicat : simplifie $\sqrt{32}$ avec la racine carrée d'un produit.

Réponse
Appelons c la longueur du côté. Un carré a un angle droit à chaque sommet : deux côtés et la diagonale forment un triangle rectangle, dont la diagonale est l'hypoténuse.

Calcul de c^2. D'après le théorème de Pythagore, $c^2 + c^2 = 64$, donc $2c^2 = 64$ et $c^2 = 32$.

Valeur exacte. Une longueur est positive. En centimètres :

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{32} \\ &= \sqrt{16 \times 2} = 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

Conclusion. Le côté du carré mesure $4\sqrt{2}$ cm. À la calculatrice, $c \approx 5{,}7$ cm au dixième.

Synthèse : le théorème de Pythagore et sa réciproque

Rappels de cette première partie. Tu n'apprends rien de nouveau ici. Tu ranges ce que tu sais déjà.

Vérifie : Quel outil ?

On connaît les trois longueurs d'un triangle, et aucun angle. Que fais-tu pour savoir s'il est rectangle ?

A. J'applique le théorème de Pythagore.
Faux.
Ce théorème suppose que le triangle est rectangle : c'est ce que tu cherches.

B. Je mesure les angles sur la figure.
Faux.
Une mesure sur un dessin n'est pas une preuve.

C. Je compare deux nombres calculés.
Juste.

Juste : le carré du plus long côté et la somme des deux autres carrés.

D. J'additionne les trois longueurs.
Faux.
Le périmètre ne dit rien de l'angle droit.

Correction
On calcule le carré du côté le plus long, puis la somme des carrés des deux autres côtés.

- Égaux : la réciproque du théorème de Pythagore conclut que le triangle est rectangle.
- Différents : la propriété du triangle qui n'est pas rectangle conclut qu'il ne l'est pas.

Ce tableau résume la première partie.

Je sais	Je cherche	J'utilise
le triangle est rectangle	une longueur	le théorème de Pythagore
les trois longueurs	s'il est rectangle	la réciproque, ou le triangle qui n'est pas rectangle
le côté d'un carré ou d'un triangle équilatéral	une diagonale, une hauteur	un triangle rectangle caché

À retenir : Prouver qu'un triangle est rectangle, ou qu'il ne l'est pas

Trois façons de prouver qu'il est rectangle :

- un angle droit est connu, par une propriété de la figure ;
- l'égalité de la réciproque du théorème de Pythagore est vérifiée ;
- **Rappel de 2e année** : un côté du triangle est un diamètre du cercle qui passe par ses trois sommets.

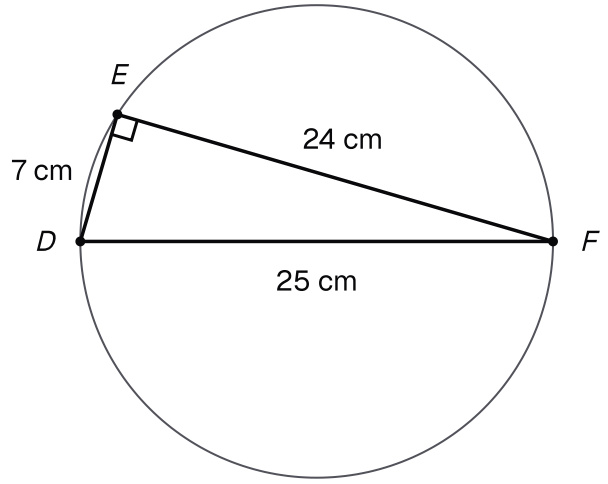
Une façon de prouver qu'il ne l'est pas : l'égalité est fausse pour le côté le plus long.

Exemple : Rappel de 2e année : un cercle, puis Pythagore

Rappel de 2e année, sans rien de nouveau. Le point E est sur le cercle de diamètre $[DF]$, avec $DF = 25$ cm et $DE = 7$ cm.

- Le côté $[DF]$ du triangle DEF est un diamètre de ce cercle. Le triangle est donc rectangle en E .
- D'après le théorème de Pythagore, $EF^2 = DF^2 - DE^2 = 625 - 49 = 576$.

- Donc $EF = \sqrt{576} = 24$ cm.



Le point E sur le cercle de diamètre [DF] : le triangle DEF est rectangle en E, avec DF = 25 cm, DE = 7 cm et EF = 24 cm.

Vérifie : Trois situations

Dans laquelle de ces situations la réciproque du théorème de Pythagore sert-elle ?

A. On veut prouver qu'un triangle aux côtés connus est rectangle.

Juste.

Juste : elle part d'une égalité vérifiée par le calcul.

B. On cherche l'hypoténuse d'un triangle rectangle.

Faux.

Le triangle est déjà rectangle : c'est le théorème de Pythagore.

C. Le triangle est inscrit dans un cercle de diamètre l'un de ses côtés.

Faux.

C'est la propriété du cercle, rappel de 2e année.

Correction

La réciproque part des trois longueurs et d'une égalité vérifiée. Elle conclut que le triangle est rectangle.

Le théorème de Pythagore, lui, part d'un triangle rectangle et donne une longueur.

À retenir

- Repère toujours l'hypoténuse avant d'écrire une égalité.

- Le théorème de Pythagore part d'un angle droit connu.
- La réciproque cherche un angle droit, avec deux calculs séparés.
- Un dessin ne prouve jamais un angle droit.

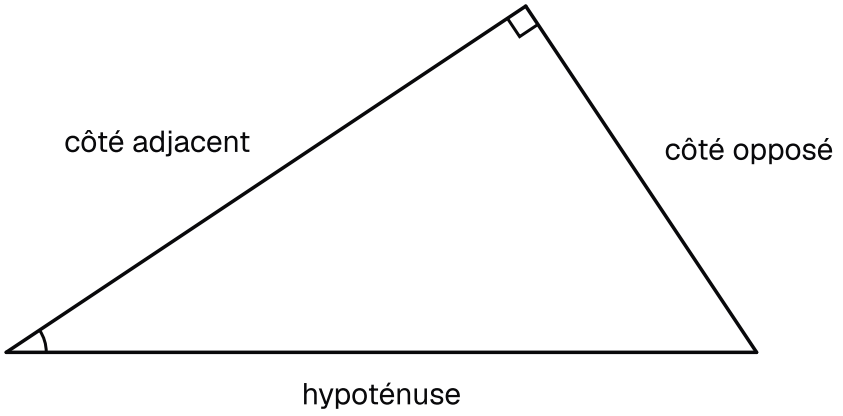
Rappel : le cosinus d'un angle aigu

Nommer les côtés

Rappel de 2e année : un angle **aigu** mesure strictement moins de $90°$. Dans un triangle rectangle, choisis un angle aigu.

Le **côté adjacent** à cet angle est le côté de l'angle droit qui forme cet angle avec l'hypoténuse.

Le **côté opposé** est le côté en face : il ne passe pas par le sommet de l'angle. L'hypoténuse ne change pas.



Pour l'angle aigu marqué d'un arc : l'hypoténuse fait face à l'angle droit, le côté adjacent forme l'angle avec elle, le côté opposé lui fait face.

Vérifie : Le côté adjacent

Le triangle PRS est rectangle en R. Quel est le côté adjacent à l'angle $\widehat{RPS}$?

A. Le côté $[PR]$.

Juste.

Juste : avec l'hypoténuse $[PS]$, il forme l'angle en P.

B. Le côté $[RS]$.

Faux.

Ce côté ne passe pas par P : il est opposé à l'angle.

C. Le côté $[PS]$.

Faux.

C'est l'hypoténuse, en face de l'angle droit.

Correction

L'angle étudié est formé par $[PR]$ et $[PS]$. Le côté $[PS]$ est l'hypoténuse : le côté adjacent est donc $[PR]$, un côté de l'angle droit.

Le côté $[RS]$ est le côté opposé.

Le cosinus

Définition : Cosinus d'un angle aigu

Soit ABC un triangle rectangle en A. Pour l'angle aigu $\widehat{ABC}$, le côté $[AB]$ est le **côté adjacent** : il forme cet angle avec l'hypoténuse $[BC]$.

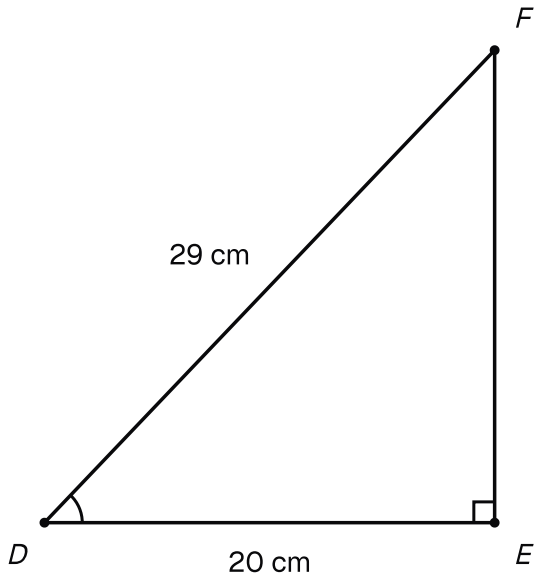
Le **cosinus** de l'angle $\widehat{ABC}$ est le quotient de la longueur du côté adjacent par la longueur de l'hypoténuse :

$$\cos\widehat{ABC} = \frac{AB}{BC}.$$

Exemple : calculer un cosinus

Le triangle DEF est rectangle en E, avec $DE = 20$ cm et $DF = 29$ cm.

- Pour l'angle $\widehat{EDF}$, le côté adjacent est $[DE]$ et l'hypoténuse est $[DF]$.
- D'après la définition du cosinus, $\cos\widehat{EDF} = \frac{DE}{DF} = \frac{20}{29}$.
- À la calculatrice, $\cos\widehat{EDF} \approx 0{,}69$ au centième.



Le triangle DEF rectangle en E et l'angle EDF : le côté adjacent [DE] mesure 20 cm, l'hypoténuse [DF] mesure 29 cm.

Vérifie : Un cosinus à écrire

Le triangle GHI est rectangle en H, avec $GH = 9$ cm, $HI = 40$ cm et $GI = 41$ cm. Que vaut $\cos \widehat{HGI}$?

A. $\dfrac{40}{41}$

Faux.

Le côté $[HI]$ est opposé à l'angle en G, pas adjacent.

B. $\dfrac{9}{41}$

Juste.

Juste : côté adjacent sur hypoténuse.

C. $\dfrac{9}{40}$

Faux.

Le dénominateur doit être l'hypoténuse, $GI = 41$ cm.

D. $\dfrac{41}{9}$

Faux.

Le quotient est renversé : l'hypoténuse va en bas.

Correction

Pour l'angle $\widehat{HGI}$, le côté adjacent est $[GH]$ et l'hypoténuse est $[GI]$.

D'après la définition du cosinus :

$$\cos \widehat{HGI} = \frac{GH}{GI} = \frac{9}{41}$$

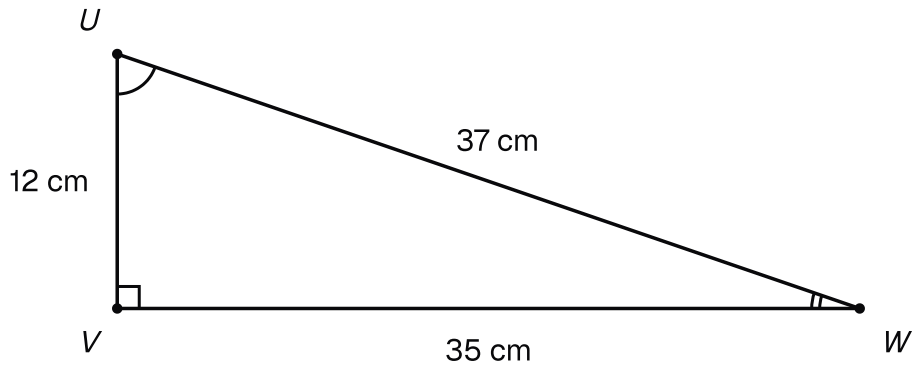
Deux angles, un piège, à toi

Exemple : les deux angles aigus

Le triangle UVW est rectangle en V, avec $UV = 12$ cm, $VW = 35$ cm et $UW = 37$ cm.

- Pour l'angle $\widehat{VUW}$, le côté adjacent est $[UV]$: $\cos \widehat{VUW} = \dfrac{12}{37}$.
- Pour l'angle $\widehat{VWU}$, le côté adjacent est $[VW]$: $\cos \widehat{VWU} = \dfrac{35}{37}$.

Les deux angles aigus n'ont pas le même cosinus. Le côté adjacent dépend de l'angle choisi.



Le triangle UVW rectangle en V et ses deux angles aigus, en U et en W, marqués différemment : chacun a son propre côté adjacent.

Attention : adjacent à quel angle ?

✗ « Dans le triangle UVW rectangle en V, le côté adjacent est toujours $[UV]$. »

✓ Le côté $[UV]$ est adjacent à l'angle en U, mais opposé à l'angle en W.

Nomme les côtés à partir de l'angle étudié. Seule l'hypoténuse reste la même.

À toi : Deux cosinus

Le triangle PQR est rectangle en P, avec $PQ = 33$ cm et $QR = 65$ cm. Calcule $\cos \widehat{PQR}$, puis $\cos \widehat{PRQ}$.

Donne chaque fois la valeur exacte, puis une valeur approchée au centième. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Pour chaque angle, repère le côté adjacent et l'hypoténuse.
Indice 2

Pour l'angle en R, il te faut la longueur PR : utilise le théorème de Pythagore.

Indice 3

Point délicat : le côté adjacent à l'angle en R est $[PR]$, pas $[PQ]$.

Réponse

Le triangle PQR est rectangle en P : son hypoténuse est $[QR]$.

Angle en Q. Le côté adjacent à l'angle $\widehat{PQR}$ est $[PQ]$. D'après la définition du cosinus, $\cos\widehat{PQR} = \dfrac{33}{65}$. À la calculatrice, $\cos\widehat{PQR} \approx 0{,}51$ au centième.

Longueur PR. D'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} PR^2 &= QR^2 - PQ^2 \\ &= 4\,225 - 1\,089 \\ &= 3\,136 \end{aligned}$$

Une longueur est positive, donc $PR = 56$ cm.

Angle en R. Le côté adjacent à l'angle $\widehat{PRQ}$ est $[PR]$: $\cos\widehat{PRQ} = \dfrac{56}{65}$. À la calculatrice, $\cos\widehat{PRQ} \approx 0{,}86$ au centième.

Conclusion. Les deux cosinus valent $\dfrac{33}{65}$ et $\dfrac{56}{65}$, soit environ $0{,}51$ et $0{,}86$ au centième.

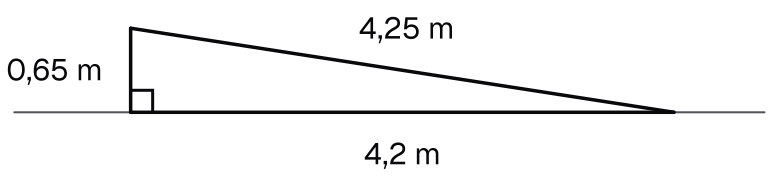
Sinus et tangente d'un angle aigu

Une rampe d'accès

Une rampe permet à un fauteuil roulant d'entrer dans un bâtiment. Elle monte de $0{,}65$ m. Au sol, elle avance de $4{,}2$ m.

La rampe elle-même mesure $4{,}25$ m.

Une rampe trop raide est dangereuse. Pour mesurer sa pente, on compare la hauteur aux autres longueurs.



La rampe d'accès en coupe : elle monte de 0,65 m pendant qu'elle avance de 4,2 m au sol, et mesure elle-même 4,25 m.

Devine : La rampe la plus raide

Deux rampes montent toutes les deux de $0{,}5$ m. La première avance de 5 m au sol, la seconde de 4 m. Laquelle est la plus raide ?

A. La première.

Faux.
Elle avance plus loin pour la même hauteur : elle est plus douce.

B. La seconde.

Juste.
Juste : elle monte autant sur une distance plus courte.

C. Elles sont aussi raides.

Faux.
Les hauteurs sont égales, mais pas les distances au sol.

Correction

On divise la hauteur par la distance au sol. Pour la première, $\dfrac{0{,}5}{5} = 0{,}1$. Pour la seconde, $\dfrac{0{,}5}{4} = 0{,}125$.

Le quotient est plus grand pour la seconde : elle est plus raide. Ce quotient s'appelle la tangente de l'angle de la rampe avec le sol.

Sinus et tangente

Définition : Sinus et tangente d'un angle aigu

Soit ABC un triangle rectangle en A. Pour l'angle aigu $\widehat{ABC}$, le côté $[AC]$ est le **côté opposé** : il ne touche pas le sommet B.

- Le **sinus** de l'angle $\widehat{ABC}$ est le quotient de la longueur du côté opposé par la longueur de l'hypoténuse : $\sin \widehat{ABC} = \dfrac{AC}{BC}$.
- La **tangente** de l'angle $\widehat{ABC}$ est le quotient de la longueur du côté opposé par la longueur du côté adjacent : $\tan \widehat{ABC} = \dfrac{AC}{AB}$.

Exemple : les trois rapports de la rampe

On note R le bas de la rampe, S son haut, et H le point du sol sous S.

Le triangle RHS est rectangle en H, avec $RH = 4{,}2$, $HS = 0{,}65$ et $RS = 4{,}25$, en mètres. Pour l'angle $\widehat{HRS}$:

- d'après la définition du cosinus, $\cos \widehat{HRS} = \dfrac{4{,}2}{4{,}25} = \dfrac{84}{85}$;
- d'après la définition du sinus, $\sin \widehat{HRS} = \dfrac{0{,}65}{4{,}25} = \dfrac{13}{85}$;

- d'après la définition de la tangente, $\tan \widehat{HRS} = \dfrac{0{,}65}{4{,}2} = \dfrac{13}{84}$.

Un nombre attaché à l'angle

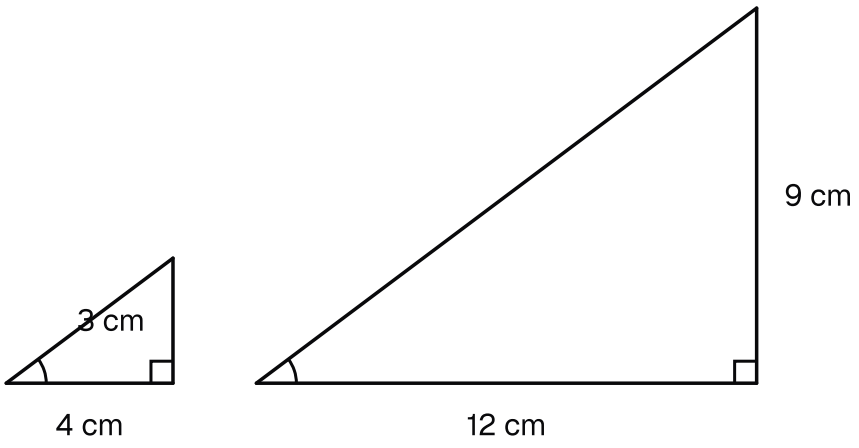
Exemple : deux triangles de tailles différentes

Un triangle rectangle a des côtés de 3 cm, 4 cm et 5 cm. Un autre a des côtés trois fois plus longs : 9 cm, 12 cm et 15 cm. Trace-les sur ton cahier.

Dans chacun, mesure au rapporteur l'angle en face du plus petit côté. Tu trouves environ $37°$ les deux fois.

Son sinus vaut $\dfrac{3}{5}$ dans le premier, et $\dfrac{9}{15}$ dans le second. Or $\dfrac{9}{15} = \dfrac{3}{5}$. Ici, agrandir le triangle n'a pas changé le sinus.

Un seul exemple ne suffit pas à le prouver pour tous les triangles.



Deux triangles rectangles, l'un de côtés 3, 4 et 5 cm, l'autre trois fois plus grand : l'angle en face du plus petit côté porte le même codage.

Propriété : Des nombres qui ne dépendent que de l'angle

Le cosinus, le sinus et la tangente d'un angle aigu ne dépendent que de la **mesure** de cet angle. Ils ne dépendent ni du triangle rectangle choisi, ni de sa taille.

Si x est la mesure en degrés d'un angle aigu, avec $0° < x < 90°$, on note simplement $\cos x$, $\sin x$ et $\tan x$. Ce sont les **rapports trigonométriques** de x.

Remarque

Ce résultat est admis.

Choisir le bon rapport

Méthode : quel rapport choisir ?

1. **Repère** l'angle aigu étudié.
2. **Nomme** les trois côtés à partir de cet angle : hypoténuse, côté opposé, côté adjacent.
3. **Repère** les deux côtés en jeu : celui que tu connais, celui que tu cherches.
4. **Choisis** : adjacent et hypoténuse donnent le cosinus ; opposé et hypoténuse, le sinus ; opposé et adjacent, la tangente.

Exemple : trois questions, trois rapports

Le triangle KLM est rectangle en K. On étudie l'angle $\widehat{KLM}$. Le côté adjacent est $[KL]$, le côté opposé est $[KM]$, l'hypoténuse est $[LM]$.

- On connaît KL et on cherche LM : on choisit le cosinus.
- On connaît LM et on cherche KM : on choisit le sinus.
- On connaît KL et on cherche KM : on choisit la tangente.

Vérifie : Le bon rapport

Le triangle BCD est rectangle en C. On connaît BC et CD. Quel rapport de l'angle $\widehat{CBD}$ peut-on calculer avec ces deux longueurs seulement ?

A. Le cosinus.
Faux.
Il faudrait l'hypoténuse $[BD]$, inconnue ici.

B. Le sinus.
Faux.
Il faudrait aussi l'hypoténuse $[BD]$.

C. La tangente.
Juste.
Juste : côté opposé sur côté adjacent.

D. Aucun des trois.
Faux.

La tangente n'utilise pas l'hypoténuse.

Correction
Pour l'angle $\widehat{CBD}$, le côté adjacent est $[BC]$ et le côté opposé est $[CD]$. L'hypoténuse $[BD]$ est inconnue.

D'après la définition de la tangente, $\tan\widehat{CBD} = \dfrac{CD}{BC}$: c'est le seul rapport calculable.

À la calculatrice, puis à toi

Exemple : trois rapports à la calculatrice

Règle ta calculatrice en degrés. Pour un angle de $25°$, les touches « cos », « sin » et « tan » donnent, au centième :

- $\cos 25° \approx 0{,}91$;
- $\sin 25° \approx 0{,}42$;
- $\tan 25° \approx 0{,}47$.

Ces nombres ne dépendent que de la mesure de l'angle, pas du triangle.

À toi : Les trois rapports

Le triangle EFG est rectangle en F, avec $EF = 2{,}8$ cm, $FG = 4{,}5$ cm et $EG = 5{,}3$ cm. Écris $\cos\widehat{FEG}$, $\sin\widehat{FEG}$ et $\tan\widehat{FEG}$ sous forme de fractions d'entiers. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Nomme les côtés à partir de l'angle en E.
Indice 2
Le côté adjacent est $[EF]$, le côté opposé est $[FG]$.
Indice 3
Point délicat : une tangente peut être plus grande que 1. Ce n'est pas une erreur.

Réponse
Côtés. L'hypoténuse est $[EG]$, en face de l'angle droit. Pour l'angle en E, le côté adjacent est $[EF]$ et le côté opposé est $[FG]$.

Rapports. D'après les définitions :

- $\cos\widehat{FEG} = \dfrac{2{,}8}{5{,}3} = \dfrac{28}{53}$;
- $\sin\widehat{FEG} = \dfrac{4{,}5}{5{,}3} = \dfrac{45}{53}$;
- $\tan\widehat{FEG} = \dfrac{4{,}5}{2{,}8} = \dfrac{45}{28}$.

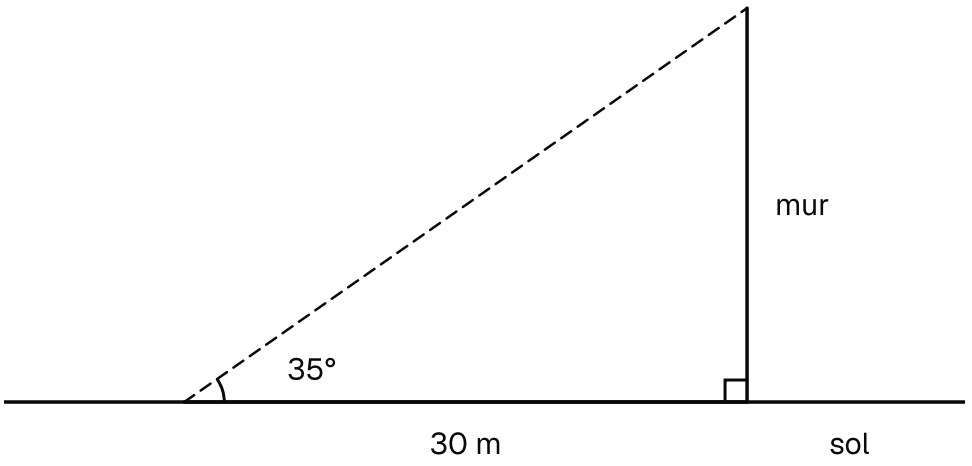
Conclusion. Écrits avec des entiers, le cosinus, le sinus et la tangente de l'angle en E valent $\frac{28}{53}$, $\frac{45}{53}$ et $\frac{45}{28}$.

Calculer une longueur ou un angle avec la trigonométrie

La hauteur d'un bâtiment

Tu poses un appareil de visée sur le sol, à 30 m du pied d'un immeuble. Le sol est horizontal et le mur vertical. L'appareil voit le sommet du mur sous un angle de $35°$ avec le sol.

Tu ne peux pas monter mesurer le mur. Un rapport trigonométrique va le faire pour toi.



L'appareil posé au sol à 30 m du pied de l'immeuble vise le sommet du mur sous un angle de 35 degrés avec le sol.

Devine : Une estimation

D'après toi, quelle est la hauteur de l'immeuble ?

A. Environ 17 m.

Faux.

Ce n'est pas ça. Tu verras le bon calcul dans l'exemple plus bas.

B. Exactement 35 m.

Faux.

La mesure d'un angle n'est pas une longueur.

C. Environ 25 m.

Faux.

Ce n'est pas ça. Tu verras le bon calcul dans l'exemple plus bas.

D. Environ 21 m.

Juste.

Juste : la tangente relie la hauteur et la distance au sol.

Correction

La hauteur est le côté opposé à l'angle de $35°$. La distance de 30 m est le côté adjacent. On utilise la tangente.

Le calcul complet est fait dans l'exemple de la méthode, plus bas.

Entre 0 et 1

Reprends l'échelle de l'entrée. Pour l'angle au sol, le cosinus vaut $\frac{1{,}4}{5} = 0{,}28$. Le sinus vaut $\frac{4{,}8}{5} = 0{,}96$.

Ces deux nombres sont compris entre 0 et 1.

Pourquoi est-ce vrai ? L'hypoténuse est le plus long côté. Elle est au dénominateur.

Propriété : Encadrement du cosinus et du sinus

Pour tout angle aigu de mesure x :

$$0 < \cos x < 1 \quad \text{et} \quad 0 < \sin x < 1.$$

La tangente $\tan x$ est un nombre strictement positif. Elle peut être plus grande que 1.

Démonstration

Étape 1. On place l'angle de mesure x en B dans un triangle ABC rectangle en A. L'hypoténuse $[BC]$ est le côté le plus long (rappel de la 2e année) : $0 < AB < BC$ et $0 < AC < BC$.

Étape 2. D'après la définition du cosinus, $\cos x = \dfrac{AB}{BC}$. C'est un quotient de deux nombres strictement positifs, donc il est strictement positif. Son numérateur est plus petit que son dénominateur, donc il est strictement inférieur à 1.

Étape 3. De même, d'après la définition du sinus, $\sin x = \dfrac{AC}{BC}$ est compris strictement entre 0 et 1. Enfin, $\tan x = \dfrac{AC}{AB}$ est un quotient de deux nombres strictement positifs. Rien ne compare AC à AB : si $AC > AB$, alors $\tan x > 1$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

- Tout vient d'un rappel : **l'hypoténuse est le plus long côté**.
- Dans le cosinus et le sinus, elle est au dénominateur.
- Le numérateur est plus petit : le quotient est plus petit que 1.
- Les longueurs sont positives : le quotient est positif.

Vérifie : Plus petit que 1

Dans la preuve, pourquoi a-t-on $\cos x < 1$?

A. Car l'angle mesure moins de $90°$.

Faux.

La preuve ne s'appuie pas sur cette mesure, mais sur les longueurs.

B. Car AB et BC sont positifs.

Faux.

Cela prouve seulement que $\cos x > 0$.

C. Car $\cos x = AB \times BC$.

Faux.

Le cosinus est un quotient, pas un produit.

D. Car AB est plus petit que BC.

Juste.

Juste : le numérateur est plus petit que le dénominateur.

Correction

D'après la définition du cosinus, $\cos x = \dfrac{AB}{BC}$.

L'hypoténuse $[BC]$ est le plus long côté : $AB < BC$.

Un quotient de deux nombres positifs dont le numérateur est plus petit est inférieur à 1.

Exemple : la tangente n'est pas bornée par 1

- La tangente n'a pas l'hypoténuse au dénominateur. Si le côté opposé est plus long que le côté adjacent, elle dépasse 1. À la calculatrice, $\tan 70° \approx 2{,}75$ au centième.
- Un cosinus ou un sinus égal à $1{,}2$ est impossible pour un angle aigu. Si ta calculatrice l'affiche, cherche l'erreur.

Calculer une longueur

Méthode : une longueur par un rapport

1. **Choisis** le rapport, puis écris-le avec les lettres de la figure.
2. **Remplace** la mesure de l'angle et la longueur connue.
3. **Isole** la longueur cherchée par un produit en croix.
4. **Calcule** à la calculatrice réglée en degrés.

5. **Écris** la précision et l'unité.

Exemple : la hauteur de l'immeuble

On note P l'appareil, B le pied du mur et S le sommet. Le triangle PBS est rectangle en B, avec $PB = 30$ m et $\widehat{BPS} = 35°$.

- Pour l'angle en P, $[BS]$ est opposé et $[PB]$ adjacent : on choisit la tangente.
- D'après la définition de la tangente, $\tan 35° = \dfrac{BS}{30}$.
- Par un produit en croix, $BS = 30 \times \tan 35°$.
- À la calculatrice réglée en degrés, $BS \approx 21{,}0$ m au dixième.

Calculer un angle

Méthode : un angle par un rapport

1. **Calcule** un rapport de l'angle avec deux longueurs connues.
2. **Tape** « Shift », puis la touche du rapport, puis sa valeur.
3. **Arrondis** la mesure à la précision demandée, au degré près par exemple.
4. **Contrôle** : un angle aigu mesure entre $0°$ et $90°$.

Exemple : l'angle de l'échelle

Reprends l'échelle de l'entrée. Son pied est à $1{,}4$ m du mur, et l'échelle mesure 5 m. On cherche l'angle x entre l'échelle et le sol.

- Le côté adjacent mesure $1{,}4$ m et l'hypoténuse 5 m.
- D'après la définition du cosinus, $\cos x = \dfrac{1{,}4}{5} = 0{,}28$.
- Avec « Shift » puis « cos », la calculatrice réglée en degrés donne $x \approx 74°$ au degré près.
- Contrôle : $74°$ est bien entre $0°$ et $90°$.

Deux pièges

Attention : la calculatrice en degrés

✗ « $\cos 40° \approx -0{,}67$. »

✓ Ta calculatrice n'était pas réglée en degrés. Réglée en degrés, elle donne $\cos 40° \approx 0{,}77$ au centième. Un cosinus négatif, pour un angle aigu, doit t'alerter.

Un résultat positif ne prouve pas le bon réglage. Vérifie toujours le symbole de l'écran : « D » ou « DEG ».

Attention : arrondir trop tôt

✗ « $\sin 25° \approx 0{,}4$, donc $\dfrac{12}{\sin 25°} \approx \dfrac{12}{0{,}4} = 30$. »

✓ Garde la valeur de la calculatrice jusqu'au bout. On trouve $\dfrac{12}{\sin 25°} \approx 28{,}4$ au dixième.

Arrondis seulement le résultat final.

Trouve l'erreur : Trois résultats

On doit calculer $EF = 7 \times \tan 52°$ au dixième. Quel résultat est juste ?

A. $9{,}1$

Faux.

Tu as arrondi $\tan 52°$ à $1{,}3$ trop tôt.

B. $9{,}0$

Juste.

Juste : on arrondit seulement à la fin.

C. $5{,}5$

Faux.

Tu as appuyé sur « sin » au lieu de « tan ».

Correction

À la calculatrice réglée en degrés, $7 \times \tan 52° \approx 8{,}96$ au centième. Au dixième, $EF \approx 9{,}0$.

Avec $\tan 52°$ arrondi d'abord à $1{,}3$, on obtiendrait $9{,}1$: l'erreur se voit au dixième.

À toi, puis le coin examen

À toi : Une longueur, puis un angle

(a) Le triangle MNP est rectangle en N, avec $MP = 9$ cm et $\widehat{NMP} = 28°$. Calcule MN au dixième.

(b) Le triangle GHJ est rectangle en H, avec $GH = 7$ cm et $HJ = 5$ cm. Calcule $\widehat{HGJ}$ au degré près. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Pour chaque question, nomme les côtés à partir de l'angle, puis choisis le rapport.

Indice 2

En (a), $[MN]$ est adjacent et $[MP]$ est l'hypoténuse. En (b), $[HJ]$ est opposé et $[GH]$ adjacent.

Indice 3

Point délicat : en (b), utilise « Shift » puis « tan », la calculatrice réglée en degrés.

Réponse

(a) La longueur MN. Pour l'angle en M, le côté $[MN]$ est adjacent et $[MP]$ est l'hypoténuse : on choisit le cosinus.

D'après la définition du cosinus, $\cos 28^\circ = \dfrac{MN}{9}$. Donc $MN = 9 \times \cos 28^\circ$. À la calculatrice réglée en degrés, $MN \approx 7{,}9$ cm au dixième.

(b) L'angle $\widehat{HGJ}$. Pour l'angle en G, le côté $[HJ]$ est opposé et $[GH]$ est adjacent : on choisit la tangente.

D'après la définition de la tangente, $\tan \widehat{HGJ} = \dfrac{5}{7}$. Avec « Shift » puis « tan », la calculatrice donne $\widehat{HGJ} \approx 36^\circ$ au degré près.

Conclusion. On trouve $MN \approx 7{,}9$ cm au dixième, et $\widehat{HGJ} \approx 36^\circ$ au degré près.

Remarque : Coin examen : rédiger le calcul d'une longueur

En examen, chaque calcul nomme le rapport employé et donne sa précision. Voici un modèle de rédaction :

« Le triangle DEF est rectangle en D. Pour l'angle $\widehat{DEF}$, le côté $[DF]$ est opposé et $[EF]$ est l'hypoténuse.

D'après la définition du sinus, $\sin 41^\circ = \dfrac{DF}{15}$. Donc $DF = 15 \times \sin 41^\circ$.

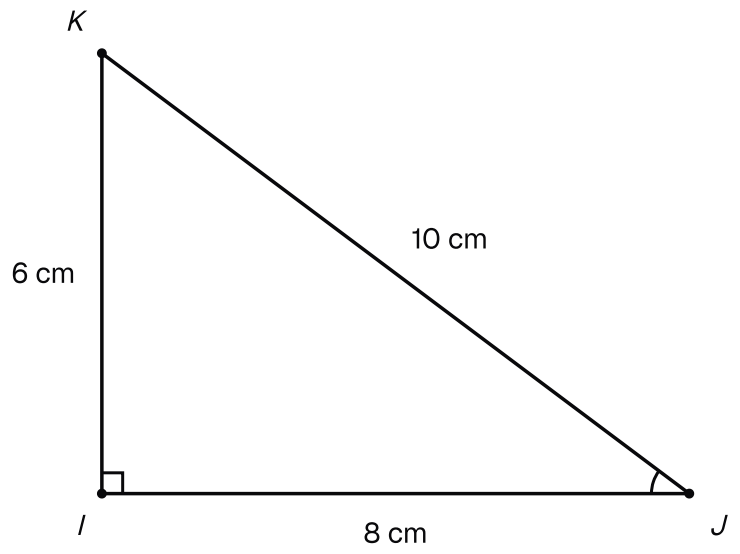
À la calculatrice réglée en degrés, $DF \approx 9{,}8$ cm au dixième. »

Deux relations entre cosinus, sinus et tangente

Un triangle de côtés 6, 8 et 10

Le triangle IJK est rectangle en I, avec $IJ = 8$ cm, $IK = 6$ cm et $JK = 10$ cm.

Pour l'angle $\widehat{IJK}$, le cosinus vaut $\dfrac{8}{10} = 0{,}8$. Le sinus vaut $\dfrac{6}{10} = 0{,}6$.



Le triangle IJK rectangle en I, de côtés 6, 8 et 10 cm, et l'angle IJK étudié.

Devine : Deux carrés

Pour cet angle, combien vaut le carré du cosinus plus le carré du sinus ?

A. $1{,}4$

Faux.

Tu as ajouté $0{,}8$ et $0{,}6$ sans les élever au carré.

B. $0{,}28$

Faux.

Tu as calculé $0{,}64 - 0{,}36$: il faut une somme.

C. 1

Juste.

Juste : $0{,}64 + 0{,}36 = 1$.

D. $1{,}96$

Faux.

Tu as calculé $(0{,}8 + 0{,}6)^2$: c'est le carré de la somme.

Correction

Le carré du cosinus vaut $0{,}8^2 = 0{,}64$. Le carré du sinus vaut $0{,}6^2 = 0{,}36$.

Leur somme vaut $0{,}64 + 0{,}36 = 1$. Ce n'est pas un hasard : c'est la relation qui suit.

Cosinus et sinus

Essaie avec un autre triangle, de côtés 5, 12 et 13. On trouve :

$$\left(\frac{12}{13}\right)^2 + \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{144+25}{169} = 1$$

Encore 1.

Pourquoi est-ce vrai ? Les numérateurs 144 et 25 s'ajoutent en 169. Or $169 = 13^2$, le carré de l'hypoténuse : c'est le théorème de Pythagore.

Propriété : Relation entre cosinus et sinus

Pour tout angle aigu de mesure x :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

L'écriture $\cos^2 x$ désigne le carré du cosinus : $\cos^2 x = (\cos x)^2$. De même, $\sin^2 x = (\sin x)^2$.

Démonstration

Étape 1. On place l'angle de mesure x en B dans un triangle ABC rectangle en A. D'après les définitions du cosinus et du sinus, $\cos x = \dfrac{AB}{BC}$ et $\sin x = \dfrac{AC}{BC}$.

Étape 2. On élève au carré et on ajoute :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = \frac{AB^2}{BC^2} + \frac{AC^2}{BC^2} = \frac{AB^2 + AC^2}{BC^2}.$$

Étape 3. D'après le théorème de Pythagore, $AB^2 + AC^2 = BC^2$. Le quotient vaut donc $\dfrac{BC^2}{BC^2} = 1$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

- On écrit le cosinus et le sinus avec les côtés.
- On élève au carré, puis on ajoute : le dénominateur commun est BC^2.
- **Le théorème de Pythagore** remplace le numérateur par BC^2.
- Le quotient vaut 1.

Vérifie : L'égalité clé

À la dernière étape de la preuve, quelle égalité permet de conclure ?

A. $AB + AC = BC$

Faux.
Cette égalité est fausse dans un vrai triangle.

B. $AB^2 + AC^2 = BC^2$

Juste.

Juste : c'est le théorème de Pythagore.

C. $BC^2 = AB^2 - AC^2$

Faux.

Ce n'est pas l'égalité de Pythagore.

D. $\cos x = \dfrac{AB}{BC}$

Faux.

La définition sert à la première étape, pas à la dernière.

Correction

Après l'addition, le numérateur est $AB^2 + AC^2$. D'après le théorème de Pythagore, il vaut BC^2.

Le quotient $\dfrac{BC^2}{BC^2}$ vaut donc 1.

Exemple : un contrôle à la calculatrice

À la calculatrice réglée en degrés, $\cos 40° \approx 0{,}766$ et $\sin 40° \approx 0{,}643$, au millième.

On calcule avec ces valeurs arrondies :

$$\begin{aligned} &0{,}766^2 + 0{,}643^2 \\ &= 0{,}586\,756 + 0{,}413\,449 \\ &= 1{,}000\,205 \end{aligned}$$

Le résultat n'est pas exactement 1. L'écart vient des arrondis au millième. La relation, elle, est exacte.

L'hypothèse compte. Le triangle de côtés 4, 5 et 6 n'est pas rectangle. Pour lui :

$$\begin{aligned} &\left(\frac{4}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \\ &= \frac{41}{36} \neq 1 \end{aligned}$$

Sans angle droit, ces quotients ne sont ni un cosinus ni un sinus.

Tangente, sinus et cosinus

Reviens au triangle IJK. Pour l'angle $\widehat{IJK}$, la tangente vaut $\dfrac{6}{8} = 0{,}75$. Et le sinus divisé par le cosinus vaut $\dfrac{0{,}6}{0{,}8} = 0{,}75$.

Pourquoi est-ce vrai ? Le sinus vaut $\dfrac{6}{10}$ et le cosinus $\dfrac{8}{10}$. En divisant l'un par l'autre, le dénominateur 10 disparaît. Il reste $\dfrac{6}{8}$: côté opposé sur côté adjacent.

Propriété : La tangente, quotient du sinus par le cosinus

Pour tout angle aigu de mesure x :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Démonstration

Étape 1. On place l'angle de mesure x en B dans un triangle ABC rectangle en A. D'après les définitions, $\sin x = \dfrac{AC}{BC}$, $\cos x = \dfrac{AB}{BC}$ et $\tan x = \dfrac{AC}{AB}$. D'après l'encadrement du cosinus, $\cos x > 0$: on peut diviser par $\cos x$.

Étape 2. Diviser par un quotient revient à multiplier par son inverse :

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{AC}{BC} \times \frac{BC}{AB}.$$

Étape 3. On simplifie par BC, qui n'est pas nul : $\dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{AC}{AB} = \tan x$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

- On remplace chaque rapport par son quotient de côtés.
- Le cosinus est positif : on peut diviser par lui.
- Diviser par un quotient, c'est **multiplier par son inverse**.
- L'hypoténuse BC apparaît en haut et en bas : on simplifie.

Vérifie : Multiplier par l'inverse

À l'étape 2 de la preuve, par quel quotient multiplie-t-on $\sin x$?

A. Par $\dfrac{BC}{AB}$.
Juste.
Juste : c'est l'inverse de $\cos x = \dfrac{AB}{BC}$.

B. Par $\dfrac{AB}{BC}$.
Faux.
C'est $\cos x$ lui-même, pas son inverse.

C. Par $\dfrac{AC}{AB}$.
Faux.
C'est $\tan x$, le résultat cherché.

D. Par $\dfrac{BC}{AC}$.
Faux.
C'est l'inverse de $\sin x$, pas de $\cos x$.

Correction

Diviser par $\cos x = \dfrac{AB}{BC}$ revient à multiplier par son inverse $\dfrac{BC}{AB}$.

On obtient, après simplification par BC :

$$\frac{AC}{BC} \times \frac{BC}{AB} = \frac{AC}{AB}$$

Exemple : pourquoi le cosinus ne doit pas être nul

- **L'hypothèse compte.** La preuve divise par $\cos x$. On ne divise jamais par 0 : le quotient $\dfrac{0{,}6}{0}$ n'existe pas. Ici, d'après l'encadrement du cosinus, $\cos x > 0$ pour un angle aigu.
- **Un contrôle.** À la calculatrice réglée en degrés, $\sin 50^\circ \div \cos 50^\circ \approx 1{,}19$ au centième. La touche « tan » donne aussi $\tan 50^\circ \approx 1{,}19$.

Un rapport connu, les autres calculés

Méthode : trouver les deux autres rapports

1. **Pars** du rapport connu, par exemple $\cos x$. Calcule $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$.
2. **Prends** la racine carrée positive : pour un angle aigu, le sinus est positif.
3. **Calcule** $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.
4. **Simplifie**, et rends le dénominateur rationnel si besoin.

Exemple : à partir d'un cosinus

Un angle aigu de mesure x vérifie $\cos x = \dfrac{1}{3}$.

Sinus. D'après la relation entre cosinus et sinus, $\sin^2 x = 1 - \dfrac{1}{9} = \dfrac{8}{9}$. Le sinus est positif : $\sin x = \dfrac{\sqrt{8}}{3} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Tangente. D'après la relation entre tangente, sinus et cosinus :

$$\begin{aligned} \tan x &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \div \frac{1}{3} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \times 3 = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Attention : le carré d'un cosinus

✗ « $\cos^2 40^\circ = \cos 1\,600^\circ$. »

✓ L'écriture $\cos^2 40°$ veut dire $(\cos 40°)^2$. On calcule d'abord le cosinus, puis on l'élève au carré.

À la calculatrice réglée en degrés, on obtient $\cos^2 40° \approx 0{,}59$ au centième. On n'élève jamais la mesure de l'angle au carré.

À toi, puis le coin examen

À toi : À partir d'un sinus

Un angle aigu de mesure x vérifie $\sin x = \dfrac{2}{5}$. Calcule les valeurs exactes de $\cos x$ et de $\tan x$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Applique la méthode, en partant du sinus.
Indice 2
Calcule d'abord $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$.
Indice 3
Point délicat : rends le dénominateur de $\tan x$ rationnel.

Réponse
Cosinus. D'après la relation entre cosinus et sinus, $\cos^2 x = 1 - \dfrac{4}{25} = \dfrac{21}{25}$. L'angle est aigu, donc son cosinus est positif : $\cos x = \dfrac{\sqrt{21}}{5}$.

Tangente. D'après la relation entre tangente, sinus et cosinus, puis en rendant rationnel le dénominateur :

$$\begin{aligned}\tan x &= \frac{2}{5} \times \frac{5}{\sqrt{21}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{21}} = \frac{2\sqrt{21}}{21}\end{aligned}$$

Conclusion. Les valeurs exactes sont $\cos x = \dfrac{\sqrt{21}}{5}$ et $\tan x = \dfrac{2\sqrt{21}}{21}$.

Remarque : Coin examen : simplifier une expression

En examen, on peut te demander de simplifier une expression. Chaque égalité cite sa relation. Voici un modèle de rédaction :

« Soit x la mesure d'un angle aigu. On pose :

$$\begin{aligned}A = &\tan x \times \cos x \\ &+ \cos^2 x + \sin^2 x\end{aligned}$$

D'après la relation entre tangente, sinus et cosinus, $\tan x \times \cos x = \sin x$. D'après la relation entre cosinus et sinus, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Donc $A = \sin x + 1$. »

Angles complémentaires et valeurs remarquables

Les deux angles aigus

Devine : Deux nombres à comparer

Un triangle rectangle a un angle aigu de $35°$. Son autre angle aigu mesure $55°$. Sans calculatrice, compare $\sin 55°$ et $\cos 35°$.

A. $\sin 55°$ est le plus grand.
Faux.
Les deux nombres viennent des mêmes côtés du triangle.

B. Ils sont égaux.
Juste.
Juste : c'est le même quotient de côtés.

C. $\cos 35°$ est le plus grand.
Faux.
Les deux nombres viennent des mêmes côtés du triangle.

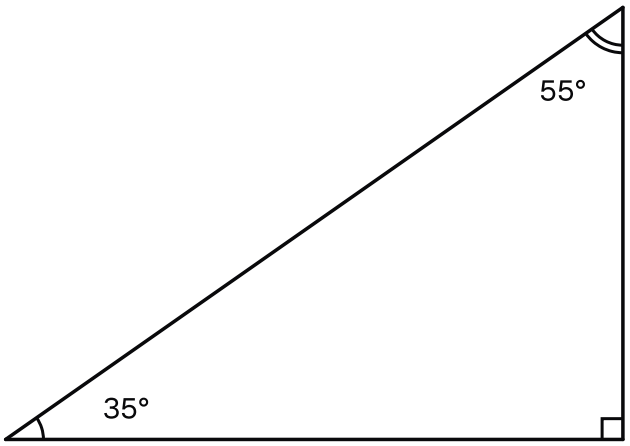
D. On ne peut pas savoir.
Faux.
Le triangle suffit à trancher, sans calcul.

Correction
Le côté opposé à l'angle de $55°$ est adjacent à l'angle de $35°$. Les deux rapports sont donc le même quotient de côtés : ils sont égaux.

À la calculatrice, $\sin 55° \approx 0{,}819$ et $\cos 35° \approx 0{,}819$, au millième.

Rappel de 1re année : la somme des angles d'un triangle vaut $180°$. Dans un triangle rectangle, les deux angles aigus ont donc une somme de $90°$. Ici, $35 + 55 = 90$.

Pourquoi est-ce vrai ? Un côté opposé à un angle aigu est adjacent à l'autre.



Un triangle rectangle dont les angles aigus mesurent 35 et 55 degrés : le côté vertical fait face au premier et forme le second avec l'hypoténuse.

Angles complémentaires

Propriété : Angles complémentaires

Deux angles sont **complémentaires** lorsque la somme de leurs mesures vaut 90°. Pour tout angle aigu de mesure x :

$$\cos(90^\circ - x) = \sin x, \qquad \sin(90^\circ - x) = \cos x, \qquad \tan(90^\circ - x) = \frac{1}{\tan x}.$$

Démonstration

Étape 1. On place l'angle de mesure x en B dans un triangle ABC rectangle en A. La somme des angles d'un triangle vaut 180° (rappel de la 1re année) : l'angle $\widehat{ACB}$ mesure donc $90^\circ - x$.

Étape 2. Le côté $[AC]$, opposé à l'angle en B, est adjacent à l'angle en C. Le côté $[AB]$, adjacent à l'angle en B, est opposé à l'angle en C.

Étape 3. D'après les définitions : $\cos(90^\circ - x) = \dfrac{AC}{BC} = \sin x$ et $\sin(90^\circ - x) = \dfrac{AB}{BC} = \cos x$. Enfin, $\tan(90^\circ - x) = \dfrac{AB}{AC}$, qui est l'inverse de $\tan x = \dfrac{AC}{AB}$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

- Les deux angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires.
- **Les côtés échangent leurs rôles** : l'opposé de l'un est l'adjacent de l'autre.
- Le cosinus de l'un devient le sinus de l'autre.

- La tangente, elle, se renverse.

Vérifie : L'autre angle

Dans la preuve, pourquoi l'angle $\widehat{ACB}$ mesure-t-il $90° - x$?

A. Car la somme des angles d'un triangle vaut 180°.
Juste.
Juste : $180° - 90° - x = 90° - x$.

B. Car le triangle est isocèle.
Faux.
Rien ne dit que le triangle est isocèle.

C. Car le théorème de Pythagore le donne.
Faux.
Ce théorème porte sur les longueurs, pas sur les angles.

D. Car le cosinus et le sinus sont égaux.
Faux.
C'est faux en général, et la preuve ne l'emploie pas.

Correction
Rappel de 1re année : la somme des angles d'un triangle vaut $180°$. L'angle en A est droit et l'angle en B mesure x.

L'angle en C mesure donc :

$$180° - 90° - x = 90° - x$$

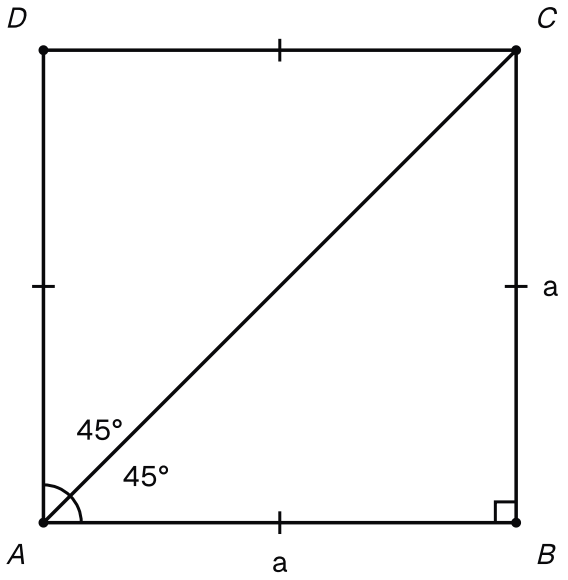
Exemple : utiliser des angles complémentaires

- La calculatrice donne $\sin 20° \approx 0{,}342$ au millième. Les angles de $20°$ et de $70°$ sont complémentaires. D'après la propriété des angles complémentaires, $\cos 70° = \sin 20° \approx 0{,}342$.
- **L'hypothèse compte.** Les angles de $40°$ et de $60°$ ne sont pas complémentaires : $40 + 60 = 100$. À la calculatrice, $\cos 40° \approx 0{,}766$ et $\sin 60° \approx 0{,}866$, au millième. Ces nombres sont différents.

L'angle de 45°

Dans la section sur les figures usuelles, la diagonale d'un carré de côté a mesurait $a\sqrt{2}$. Elle coupe l'angle droit du carré en deux angles de $45°$.

Pourquoi est-ce vrai ? Les côtés du triangle formé mesurent a, a et $a\sqrt{2}$. Les définitions donnent alors les trois rapports.



Le carré ABCD de côté a : sa diagonale [AC] partage l'angle droit en A en deux angles de 45 degrés.

Propriété : Rapports trigonométriques de 45°

Pour un angle de $45°$, le cosinus et le sinus sont égaux, et la tangente vaut 1 :

$$\cos 45° = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{et} \qquad \tan 45° = 1.$$

Démonstration

Étape 1. Soit $ABCD$ un carré de côté a. Le triangle ABC est rectangle et isocèle en B. Ses deux angles aigus sont égaux, car les angles à la base d'un triangle isocèle sont égaux (rappel de la 1re année). Leur somme vaut $90°$ (somme des angles d'un triangle) : chacun mesure $45°$.

Étape 2. D'après le théorème de Pythagore, $AC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$. Une longueur est positive, donc $AC = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$.

Étape 3. D'après la définition du cosinus, $\cos 45° = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, en rendant le dénominateur rationnel. De même, $\sin 45° = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, et $\tan 45° = \dfrac{BC}{AB} = 1$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

- Un carré cache un triangle **rectangle et isocèle**.
- Ses angles à la base sont égaux : chacun mesure $45°$.
- Le théorème de Pythagore donne l'hypoténuse $a\sqrt{2}$.
- Les définitions donnent les rapports. On rend enfin le dénominateur rationnel.

Vérifie : Deux angles de 45°

Dans la preuve, pourquoi les angles aigus du triangle ABC mesurent-ils $45°$?

A. Car la diagonale mesure $a\sqrt{2}$.

Faux.

Cette longueur vient après : elle ne donne pas les angles.

B. Car tous les angles d'un triangle sont égaux.

Faux.

C'est faux : l'angle en B est droit.

C. Car ils sont à la base d'un triangle isocèle.

Juste.

Juste : ils sont égaux, et leur somme vaut 90°.

D. Car le cosinus et le sinus de 45° sont égaux.

Faux.

C'est ce qu'on veut prouver : on ne peut pas s'en servir.

Correction

Le triangle ABC est rectangle et isocèle en B. Rappel de 1re année : les angles à la base d'un triangle isocèle sont égaux.

D'après la somme des angles d'un triangle, ils ont une somme de $90°$. Chacun mesure donc $45°$.

Exemple : la diagonale par le cosinus

Un carré a des côtés de 3 cm. Sa diagonale d fait un angle de $45°$ avec un côté.

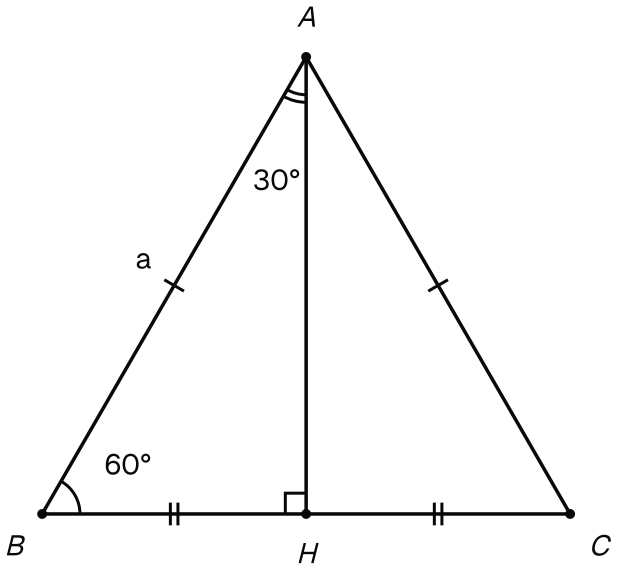
- D'après la définition du cosinus, $\cos 45° = \dfrac{3}{d}$.
- D'après les rapports trigonométriques de $45°$, $\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{3}{d}$.
- Par un produit en croix, $d = \dfrac{6}{\sqrt{2}}$.
- On rend le dénominateur rationnel : $d = \dfrac{6\sqrt{2}}{2}$.
- On simplifie : $d = 3\sqrt{2}$ cm.

On retrouve la diagonale d'un carré, $a\sqrt{2}$ avec $a = 3$.

Les angles de 30° et de 60°

Dans un triangle équilatéral de côté a, la hauteur mesure $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Tu l'as calculée dans la section sur les figures usuelles. Les angles de ce triangle mesurent $60°$.

Pourquoi est-ce vrai ? La hauteur coupe ce triangle en deux triangles rectangles. Leurs côtés mesurent $\frac{a}{2}$, $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ et a.



Le triangle équilatéral ABC de côté a et sa hauteur [AH] : dans le triangle ABH rectangle en H, l'angle en B mesure 60 degrés et l'angle en A 30 degrés.

Propriété : Rapports trigonométriques de 30° et de 60°

Les rapports trigonométriques des angles de $60°$ et de $30°$ sont :

$$\cos 60° = \frac{1}{2}, \qquad \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \tan 60° = \sqrt{3};$$

$$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \sin 30° = \frac{1}{2}, \qquad \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Démonstration

Étape 1. Soit ABC un triangle équilatéral de côté a et H le milieu de $[BC]$. La médiane (AH) est aussi une hauteur (rappel de la 1re année) : le triangle ABH est rectangle en H, avec $\widehat{ABH} = 60°$ et $BH = \frac{a}{2}$.

Étape 2. D'après le théorème de Pythagore, $AH^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$, donc $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Étape 3. D'après les définitions : $\cos 60° = \frac{BH}{AB} = \frac{1}{2}$, $\sin 60° = \frac{AH}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\tan 60° = \frac{AH}{BH} = \sqrt{3}$.

Étape 4. Les angles de $30°$ et de $60°$ sont complémentaires : d'après la propriété des angles complémentaires, $\cos 30° = \sin 60°$, $\sin 30° = \cos 60°$ et $\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

- Un triangle équilatéral **coupé par une hauteur** donne un triangle rectangle.
- Ses angles aigus mesurent $60°$ et $30°$.
- Le théorème de Pythagore donne la hauteur. Les définitions donnent les rapports de $60°$.
- Ceux de $30°$ viennent des angles complémentaires.

Vérifie : Les rapports de 30°

À la dernière étape de la preuve, comment obtient-on les rapports de $30°$?

A. En divisant ceux de $60°$ par 2.

Faux.

Faux : $\sin 30° = \dfrac{1}{2}$, mais $\dfrac{\sin 60°}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

B. Avec la calculatrice.

Faux.

La preuve donne des valeurs exactes, sans calculatrice.

C. Avec un autre triangle équilatéral.

Faux.

La preuve garde le même triangle.

D. Avec les angles complémentaires.

Juste.

Juste : $30° + 60° = 90°$.

Correction

Les angles de $30°$ et de $60°$ sont complémentaires.

D'après la propriété des angles complémentaires, $\cos 30° = \sin 60°$ et $\sin 30° = \cos 60°$. La tangente de $30°$ est l'inverse de celle de $60°$.

Le tableau des valeurs, puis à toi

Exemple : le tableau des valeurs remarquables

Angle	$30°$	$45°$	$60°$
cosinus	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$
sinus	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
tangente	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Un triangle rectangle a un angle de $30°$ et une hypoténuse de 8 cm.

D'après la définition du sinus, le côté opposé mesure $8 \times \sin 30° = 4$ cm. D'après la définition du cosinus, le côté adjacent mesure $8 \times \cos 30° = 4\sqrt{3}$ cm.

À toi : Deux calculs exacts

Calcule, sans calculatrice, $A = \cos^2 30° + \cos^2 60°$ et $B = \tan 30° \times \tan 60°$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Remplace chaque rapport par sa valeur du tableau.

Indice 2

On a $\cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\cos 60° = \dfrac{1}{2}$.

Indice 3

Point délicat : $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{4}$, car $\sqrt{3}^2 = 3$.

Réponse

Calcul de A. D'après les rapports trigonométriques de $30°$ et de $60°$, les carrés des deux cosinus valent $\dfrac{3}{4}$ et $\dfrac{1}{4}$:

$$A = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

C'est normal : $\cos 60° = \sin 30°$, et la relation entre cosinus et sinus donne 1.

Calcul de B. De même :

$$\begin{aligned} B &= \frac{\sqrt{3}}{3} \times \sqrt{3} \\ &= \frac{3}{3} = 1 \end{aligned}$$

C'est normal aussi : les deux tangentes sont inverses l'une de l'autre.

Conclusion. Les deux nombres sont égaux à 1.

Synthèse : cosinus, sinus et tangente

Rappels de la seconde partie. Rien de nouveau ici. Tu ranges les trois rapports et leurs usages.

Vérifie : Quel rapport ?

Dans un triangle rectangle, on connaît l'hypoténuse et un angle aigu. On cherche le côté opposé à cet angle. Quel rapport emploies-tu ?

A. Le sinus.

Juste.
Juste : côté opposé sur hypoténuse.

B. Le cosinus.
Faux.
Le cosinus relie le côté adjacent et l'hypoténuse.

C. La tangente.
Faux.
La tangente n'emploie pas l'hypoténuse.

Correction
Les deux côtés en jeu sont le côté opposé et l'hypoténuse. D'après la définition du sinus, le sinus de l'angle est le côté opposé divisé par l'hypoténuse.

Le côté cherché est donc l'hypoténuse multipliée par ce sinus.

Pour un angle aigu d'un triangle rectangle :

Rapport	Quotient	Côté qu'il n'emploie pas
cosinus	adjacent sur hypoténuse	le côté opposé
sinus	opposé sur hypoténuse	le côté adjacent
tangente	opposé sur adjacent	l'hypoténuse

À retenir **: Quelle méthode pour quelle question ?**

- **Une longueur** : choisis le rapport, écris-le, fais un produit en croix, puis calcule.
- **Un angle** : calcule un rapport, puis utilise « Shift » et la touche du rapport.
- **Un rapport à partir d'un autre** : la relation entre cosinus et sinus, puis celle de la tangente.
- **Une valeur exacte** : le tableau des valeurs remarquables, ou les angles complémentaires.

À retenir

- Nomme toujours les côtés à partir de l'angle étudié.
- Règle la calculatrice en degrés.
- Garde les valeurs exactes jusqu'au bout, et arrondis seulement à la fin.
- Écris toujours la précision d'une valeur approchée.

Le mot du prof : un triangle rectangle cache beaucoup de mesures. Avec un angle et une longueur, tu peux toutes les retrouver. Les bâtisseurs, les géomètres et les marins le savent depuis longtemps.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Triangle rectangle : théorème de Pythagore et trigonométrie » (3ac · general · mathematiques)