BURHAN

Résumé : Translation et produit d'un vecteur par un réel

3ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/3ac/mathematiques/translation-et-vecteurs/resume

Chapitre	Semestre
Translation et produit d'un vecteur par un réel	Semestre 2

Rappels de 2AC : vecteurs égaux

> **À retenir : Un vecteur, trois données**
>
> Rappel de 2AC : un vecteur est décrit par trois données. Ce sont sa direction, son sens et sa longueur.
>
> Deux vecteurs sont égaux quand ces trois données sont les mêmes. Toute la translation repose sur cette idée.

Méthode : comparer deux vecteurs

1. **Direction** : regarde si les deux droites portant les vecteurs sont parallèles ou confondues.
2. **Sens** : regarde si l'on va du même côté, de l'origine vers l'extrémité.
3. **Longueur** : compare les deux distances.
4. **Sur un quadrillage** : deux vecteurs égaux ont le même déplacement en carreaux.
5. **Conclus** par une phrase, en citant le parallélogramme si les points ne sont pas alignés.

Exemple

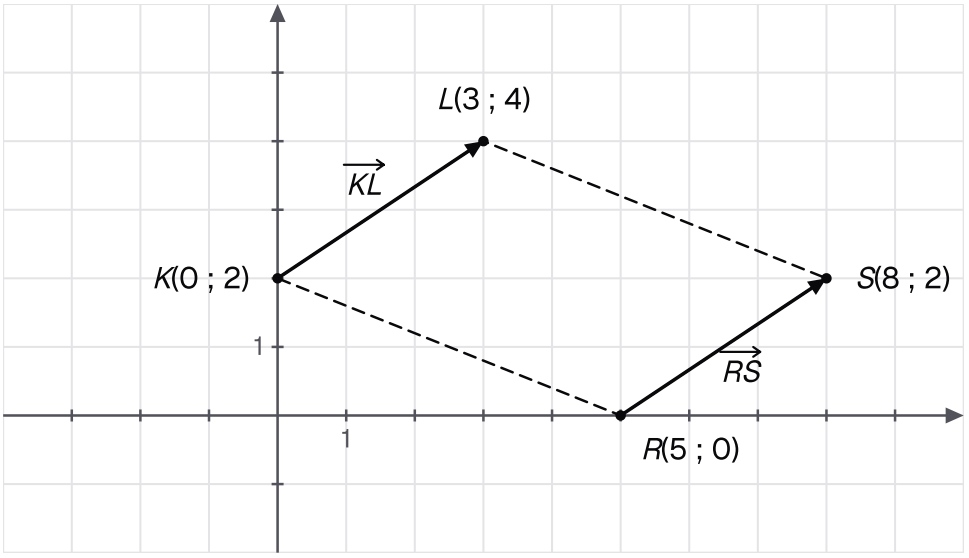
Énoncé. Sur un quadrillage, place $K(0;2)$, $L(3;4)$, $R(5;0)$ et $S(8;2)$.

Déplacements. De K à L : 3 carreaux vers la droite et 2 vers le haut. De R à S : le même déplacement. On a donc :

$$\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{RS}$$

Points non alignés. De K à R, on va 5 carreaux à droite et 2 en bas : ce n'est pas la direction de K vers L. Les points K, L et R ne sont donc pas alignés.

Conclusion. Le quadrilatère $KLSR$ est un parallélogramme.



Les flèches KL et RS ont le même déplacement ; avec les côtés en pointillés, elles bordent KLSR.

Attention : Le tour de la figure fixe l'ordre des lettres

Avec $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{RS}$, le parallélogramme s'appelle $KLSR$, et non $KLRS$.

Fais le tour : de K à L, puis de L à S, puis de S à R.

Le quadrilatère $KLRS$ est croisé : deux de ses côtés se coupent, ici $[LR]$ et $[SK]$.

Image d'un point par une translation

À retenir : Tous les points glissent pareil

Une translation fait glisser tous les points du plan. Ils bougent tous de la même façon : même direction, même sens, même longueur.

Rien ne tourne et rien ne se retourne. Le point obtenu s'appelle l'image du point de départ.

Définition : Translation qui transforme A en B

Soit A et B deux points du plan. La **translation qui transforme A en B** associe à chaque point M du plan le point M' tel que :

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}.$$

Le point M' est l'**image** du point M par cette translation. Si on la nomme t, on écrit $t(M) = M'$. En particulier, $t(A) = B$.

Si le point M n'est pas sur la droite (AB), le quadrilatère $ABM'M$ est un parallélogramme. Si M est sur la droite (AB), le point M' est aussi sur cette droite.

Méthode : construire l'image d'un point

1. **Sur un quadrillage** : compte le déplacement de A vers B, en carreaux. Fais le même déplacement à partir de M.
2. **Au compas**, si M n'est pas sur (AB) : trace un arc de centre M et de rayon AB. Trace un arc de centre B et de rayon AM.
3. **Choisis** le point d'intersection qui fait de $ABM'M$ un parallélogramme non croisé.
4. **Si M est sur** (AB) : reporte la longueur AB sur cette droite, à partir de M, dans le sens de A vers B.
5. **Vérifie** que $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont même direction, même sens et même longueur.

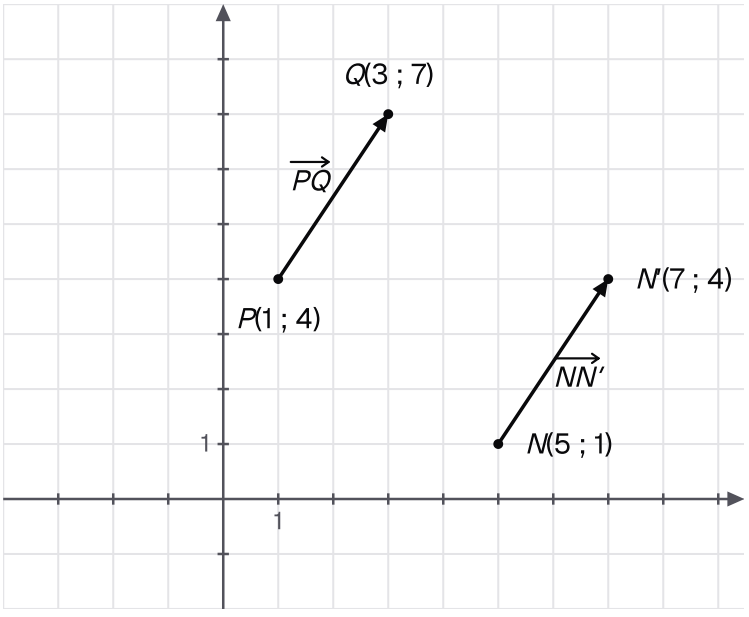
Exemple

Énoncé. Sur un quadrillage, construis l'image de $N(5;1)$ par la translation qui transforme $P(1;4)$ en $Q(3;7)$.

Déplacement. De P à Q : 2 carreaux vers la droite et 3 vers le haut.

Image. À partir de N, on fait le même déplacement. L'image de N est $N'(7;4)$, et :

$$\overrightarrow{NN'} = \overrightarrow{PQ}$$



Le point N et son image N' : la flèche de N vers N' copie celle de P vers Q.

Remarque : Un point de la droite reste sur la droite

Reprends la translation qui transforme $P(1;4)$ en $Q(3;7)$. Le point $H(5;10)$ est sur la droite (PQ) : de P à H, on fait deux fois le déplacement de P à Q.

Son image est $H'(7;13)$, sur la même droite. Ici, aucun parallélogramme ne se forme : les quatre points sont alignés.

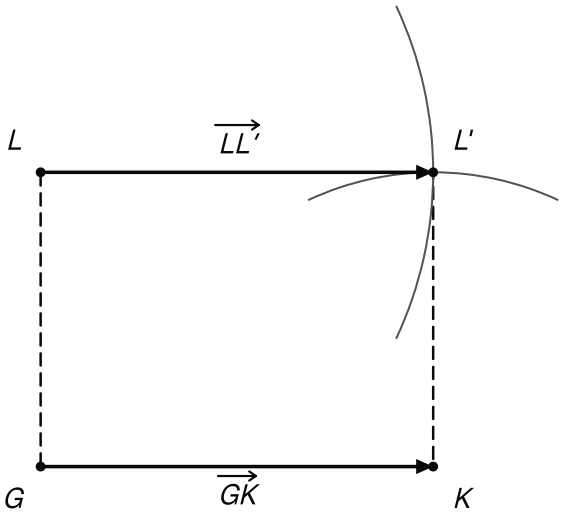
Exemple

Énoncé. Sans quadrillage, construis l'image L' de L par la translation qui transforme G en K. Le point L n'est pas sur la droite (GK).

Arcs. Trace l'arc de centre L et de rayon GK. Trace l'arc de centre K et de rayon GL.

Choix. Les arcs se coupent en deux points. Garde le point d'intersection qui fait de $GKL'L$ un parallélogramme non croisé. Alors :

$$\overrightarrow{LL'} = \overrightarrow{GK}$$



Au compas, L' se trouve à la croisée de deux arcs, l'un centré en L, l'autre centré en K.

Attention : Le sens compte

La translation qui transforme P en Q ne transforme pas Q en P. Elle envoie Q plus loin, en $(5;10)$.

Les vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{QP}$ ont des sens contraires. Pour une image, déplace toujours le point dans le sens qui va de P vers Q.

Reconnaître une image, nommer une translation

Méthode : reconnaître une image, nommer une translation

1. **Image ?** Pour savoir si M' est l'image de M, compare $\overrightarrow{MM'}$ au vecteur de la translation.

2. **Sur un quadrillage**, compare les deux déplacements en carreaux.
3. **Nommer** : la translation qui transforme M en M' est aussi celle qui transforme R en S, dès que $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{MM'}$.
4. **Écris** toujours le point de départ en premier.

Exemple

Énoncé. On considère la translation qui transforme $U(2;1)$ en $V(6;2)$.

Déplacement. De U à V : 4 carreaux vers la droite et 1 vers le haut.

Premier point. De $Z(0;5)$ à $(4;6)$, le déplacement est le même : $(4;6)$ est l'image de Z.

Second point. De $Y(2;2)$ à $(5;3)$, on avance de 3 carreaux seulement. Ce n'est pas l'image de Y.

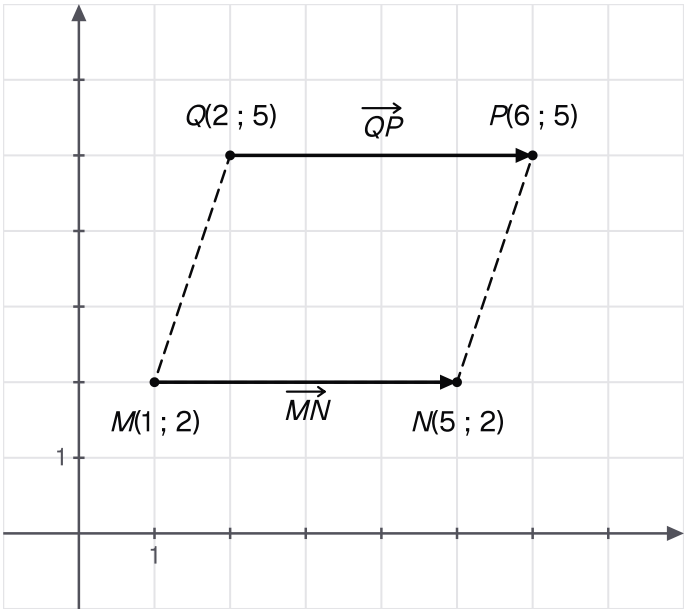
Exemple

Énoncé. $MNPQ$ est un parallélogramme, avec $M(1;2)$, $N(5;2)$, $P(6;5)$ et $Q(2;5)$.

Égalité. Dans ce parallélogramme :

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$$

Conclusion. La translation qui transforme M en N transforme aussi Q en P. On peut donc la nommer « la translation qui transforme Q en P ».



Dans MNPQ, les flèches MN et QP sont égales : une seule translation, deux noms possibles.

Ce que conserve une translation ; images des figures

Propriété : Translation et égalité de vecteurs

Soit t une translation. Si t transforme le point M en M' et le point N en N', alors :

$$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}.$$

En particulier, $M'N' = MN$: une translation **conserve les distances**.

Propriété : Ce que conserve une translation

Une translation conserve :

- les **distances** : l'image d'un segment est un segment de même longueur ;
- l'**alignement** : les images de trois points alignés sont trois points alignés ;
- les **mesures des angles** : l'image d'un angle est un angle de même mesure ;
- le **parallélisme** : les images de deux droites parallèles sont deux droites parallèles ;
- les **aires** : l'image d'une figure est une figure de même aire.

Remarque : Des résultats admis

Ce résultat est admis, comme la propriété précédente. Ces deux propriétés s'observent en mesurant une figure et son image, à la règle, au compas ou au rapporteur. Tu les cites par leur nom dans une justification.

Exemple

Énoncé. Une translation transforme U, V, W en U', V', W'. On sait que $UV = 3{,}7$ cm et $\widehat{UVW} = 48°$.

Longueur. D'après la conservation des distances, $U'V' = 3{,}7$ cm.

Angle. D'après la conservation des mesures des angles, $\widehat{U'V'W'} = 48°$.

Propriété : Images des figures usuelles

Soit t une translation, et A', B', O' les images respectives des points A, B, O par t, avec $A \neq B$.

- L'image du **segment** $[AB]$ est le segment $[A'B']$, et $A'B' = AB$.
- L'image de la **droite** (AB) est la droite $(A'B')$, parallèle à (AB) ou confondue avec elle.
- L'image de la **demi-droite** $[AB)$ est la demi-droite $[A'B')$.

- L'image d'un **angle** est un angle de même mesure : si C est un point distinct de B et C' son image, alors $\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC}$.
- L'image du **cercle** de centre O et de rayon r est le cercle de centre O' et de même rayon r.

Remarque : Un résultat admis

Ce résultat est admis. Tu le cites par son nom : « d'après l'image d'une droite par une translation », ou d'un segment, d'un angle, d'un cercle.

Méthode : tracer l'image d'une figure

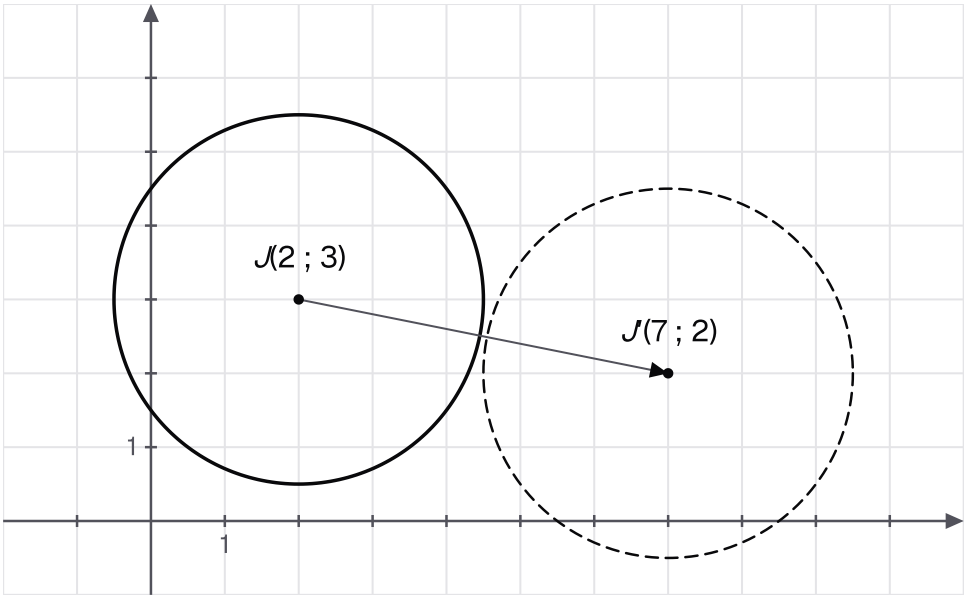
1. **Choisis** les points utiles : deux extrémités, deux points d'une droite, le sommet d'un angle avec un point sur chacun de ses côtés, le centre d'un cercle.
2. **Construis** l'image de chacun de ces points.
3. **Trace** l'image de la figure avec la bonne propriété : même longueur, droite parallèle ou confondue, même angle, même rayon.

Exemple

Énoncé. Un cercle a pour centre $J(2;3)$ et pour rayon $2{,}5$ cm. Une translation déplace chaque point de 5 carreaux vers la droite et 1 vers le bas.

Centre. L'image du centre est $J'(7;2)$.

Conclusion. D'après l'image d'un cercle, l'image est le cercle de centre J' et de rayon $2{,}5$ cm.



Seul le centre se déplace : le cercle image a pour centre J' et garde son rayon de 2,5 cm.

Remarque : Parallèle ou confondue

Prends $G(0;4)$, $H(5;4)$ et la translation qui transforme G en H. L'image de H est $(10;4)$, encore sur la droite (GH). L'image de la droite (GH) est donc la droite (GH) elle-même. Une droite qui a la direction du déplacement est confondue avec son image.

Utiliser une translation dans un problème

Méthode : résoudre un problème avec une translation

1. **Repère** la translation, puis écris les images utiles : $t(R) = R'$, $t(S) = S'$.
2. **Cite** la propriété qui répond : distances, angles, alignement, parallélisme, image d'une droite.
3. **Termine** par une phrase de conclusion qui reprend la question.

Exemple

Énoncé. Une translation t déplace chaque point de 2 carreaux vers la droite et 4 vers le haut. On place $R(1;0)$ et $S(4;1)$.

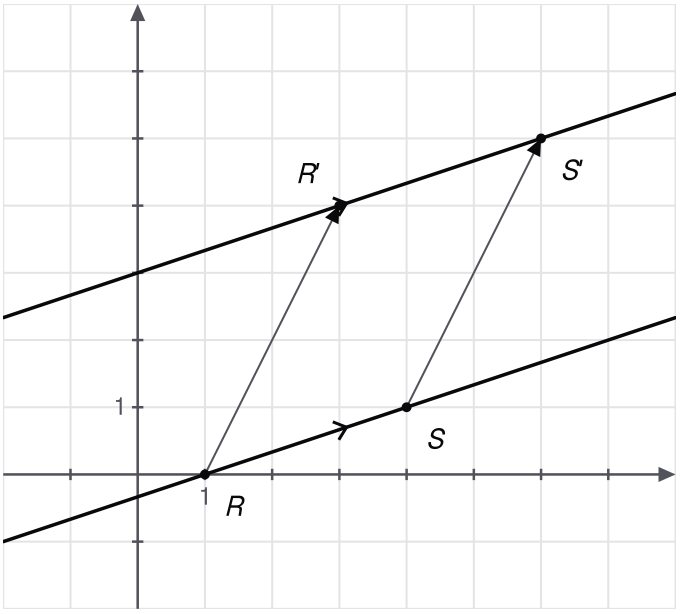
Images. On obtient $R'(3;4)$ et $S'(6;5)$.

Image de la droite. D'après l'image d'une droite, $(R'S')$ est parallèle à (RS) ou confondue avec elle.

Droites distinctes. De R à S, on va 3 carreaux à droite et 1 en haut. De R à R', on va 2 à droite et 4 en haut : une autre direction. Le point R' n'est donc pas sur (RS).

Conclusion. Les deux droites sont parallèles :

$$(R'S') \parallel (RS)$$



Les droites (RS) et (R'S') ne se rencontrent pas : la translation les a rendues parallèles et distinctes.

Exemple

Suite. La translation t est celle qui transforme R en R'. Le point S n'est pas sur la droite (RR') : les déplacements de R vers S et de R vers R' n'ont pas la même direction.

Conclusion. D'après la définition de la translation, $RR'S'S$ est un parallélogramme. Ses diagonales $[RS']$ et $[R'S]$ ont donc le même milieu.

À retenir : Rédiger une justification

Une justification tient en quelques lignes. Nomme la translation et les images.

Cite la propriété par son nom : « d'après la conservation des distances ». Ne redémontre jamais une propriété admise : cite-la.

Produit d'un vecteur par un réel

À retenir : Même direction, sens et longueur réglés par k

Un réel est un nombre, positif ou négatif, comme 3, -2 ou $\frac{1}{2}$.

Multiplier un vecteur par un réel k garde sa direction. Le signe de k fixe le sens. Le nombre k, ou son opposé s'il est négatif, multiplie la longueur.

Définition : Produit d'un vecteur par un nombre réel

Soit A et B deux points distincts et k un nombre réel. Le vecteur $k\overrightarrow{AB}$ est le vecteur $\overrightarrow{AM}$, où M est le point de la droite (AB) tel que :

- si $k > 0$: M est sur la demi-droite $[AB)$ et $AM = k \times AB$;
- si $k < 0$: M est sur la droite (AB), et A est entre B et M ; $AM = (-k) \times AB$;
- si $k = 0$: $M = A$, et $0\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$.

Ainsi, $k\overrightarrow{AB}$ a la même **direction** que $\overrightarrow{AB}$. Il a le même **sens** si $k > 0$, le sens contraire si $k < 0$.

Méthode : placer M tel que RM = k RS (vecteurs)

1. **Trace** la droite (RS) : le point M cherché est sur elle.
2. **Signe** : si $k > 0$, M est du côté de S ; si $k < 0$, M est placé de façon que R soit entre S et M ; si $k = 0$, $M = R$.
3. **Longueur** : $RM = k \times RS$ si $k > 0$, et $RM = (-k) \times RS$ si $k < 0$.
4. **Reporte** cette longueur au compas, à partir de R.

Exemple

Énoncé. Sur une droite, $RS = 2$ cm. Place M tel que $\overrightarrow{RM} = 3\overrightarrow{RS}$, puis N tel que $\overrightarrow{RN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{RS}$.

Point M. Comme $3 > 0$, M est sur $[RS)$, avec $RM = 3 \times 2 = 6$ cm.

Point N. Comme $-\frac{1}{2} < 0$, N est sur la droite (RS), et R est entre S et N. On a $RN = \frac{1}{2} \times 2 = 1$ cm.

Attention : Le signe moins change le sens, pas la longueur

Si $KL = 1{,}5$ cm et $\overrightarrow{KP} = -2\overrightarrow{KL}$, alors $KP = 2 \times 1{,}5 = 3$ cm.

Écrire $KP = -3$ cm est faux : une longueur est toujours positive. Le signe moins indique seulement le sens : K est entre L et P.

Remarque : Deux valeurs simples de k

On place M tel que $\overrightarrow{RM} = k\overrightarrow{RS}$.

- Avec $k = 1$, le point M est sur $[RS)$ et $RM = RS$: c'est le point S lui-même.
- Avec $k = 0$, le point M est R, et le vecteur est nul.

Propriété : Produit d'un vecteur par un réel et alignement

Soit A et B deux points distincts.

- Si $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ pour un réel k, alors les points A, B et M sont **alignés**.
- Réciproquement, pour tout point M de la droite (AB), il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$.
- Le point I est le **milieu** du segment $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Remarque : Un résultat admis

Ce résultat est admis. Tu le cites par son nom : « d'après la propriété du produit et de l'alignement », ou « d'après la propriété du milieu ».

Exemple

Énoncé. Sur un quadrillage, on place $R(3;0)$, $S(7;2)$, $I(5;1)$ et $T(9;3)$.

Milieu. De R à S : 4 carreaux à droite et 2 en haut. De R à I : 2 et 1, la moitié. Donc :

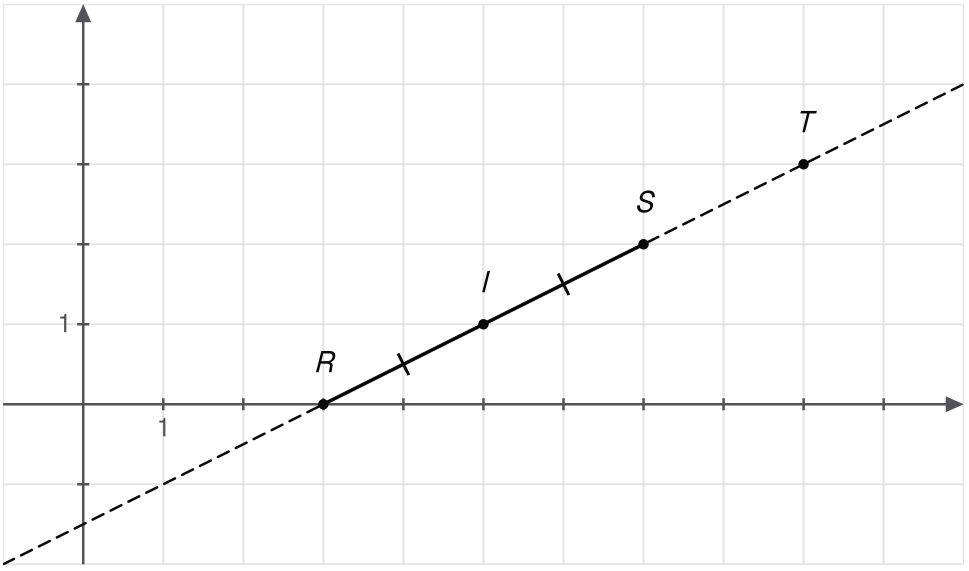
$$\overrightarrow{RI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{RS}$$

Le point I est le milieu de $[RS]$.

Alignement. De R à T : 6 et 3. Donc :

$$\overrightarrow{RT} = \frac{3}{2}\overrightarrow{RS}$$

Les points R, S, T sont alignés.



Quatre points d'une même droite : I coupe [RS] en deux moitiés, T prolonge au-delà de S.

Attention : Une longueur ne donne pas le vecteur

Savoir que $RM = 2 \times RS$ ne suffit pas pour écrire $\overrightarrow{RM} = 2\overrightarrow{RS}$.

Le point M pourrait être de l'autre côté de R, ou hors de la droite (RS). Vérifie aussi la direction et le sens.

Synthèse : reconnaître une transformation

Méthode : translation, symétrie centrale ou symétrie axiale ?

- **Translation** : les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ sont tous égaux, avec même direction, même sens et même longueur.
- **Symétrie centrale** (rappel de 1AC) : un même point est le milieu de chaque segment $[MM']$ qui joint un point à son image.
- **Symétrie axiale** (rappel de 2AC) : une même droite (d) est la médiatrice de chaque segment $[MM']$, pour M hors de (d).
- Ces trois transformations conservent quatre choses : les distances ; l'alignement ; les mesures des angles ; les aires.

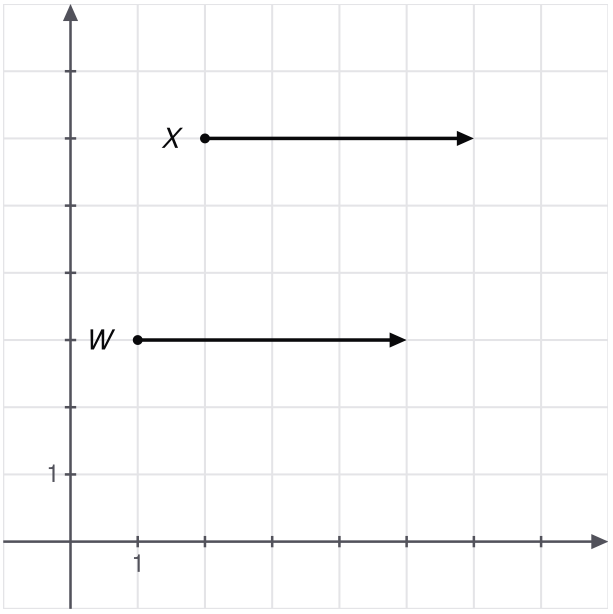
Exemple

Énoncé. Les points $W(1;3)$ et $X(2;6)$ ont pour images $(5;3)$ et $(6;6)$ par une première transformation. Par une seconde, leurs images sont $(7;5)$ et $(6;2)$.

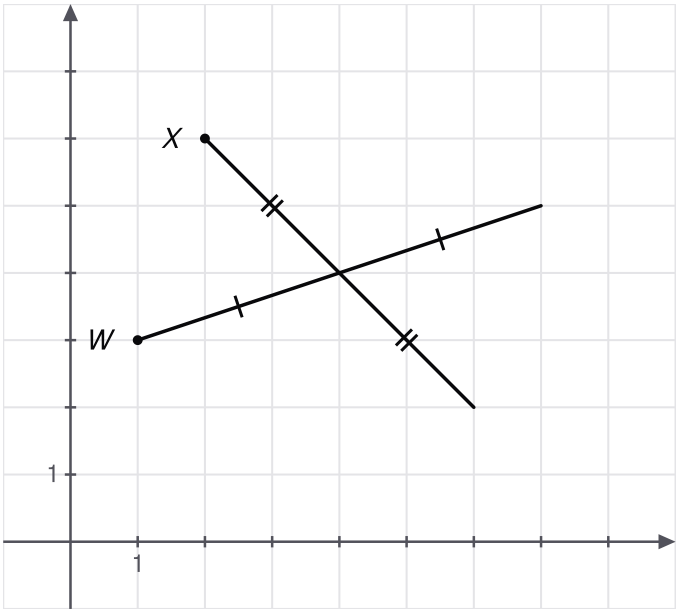
Première. Les deux points avancent de 4 carreaux vers la droite : c'est une translation.

Seconde. De W à $(7;5)$: 6 carreaux à droite et 2 en haut ; la moitié mène en $(4;4)$. De X à $(6;2)$: 4 à droite et 4 en bas ; la moitié mène aussi en $(4;4)$.

Conclusion. Les deux segments ont le même milieu : la seconde est la symétrie centrale de centre $(4;4)$.



Par la première transformation, W et X avancent chacun de 4 carreaux vers la droite.



Par la seconde transformation, les deux segments qui joignent chaque point à son image ont le même milieu.

Méthode : Quelle méthode pour quelle question ?

- **Comparer** deux vecteurs : direction, sens, longueur, ou déplacement en carreaux.
- **Construire** une image : même déplacement, ou parallélogramme au compas.
- **Reconnaître** une image : comparer deux vecteurs.
- **Tracer** l'image d'une figure : les points utiles, puis la conservation.
- **Justifier** une longueur, un angle, un parallélisme : citer la propriété de conservation.

- **Placer** M tel que $\overrightarrow{RM} = k\overrightarrow{RS}$: signe de k, puis longueur.
- **Reconnaître** une transformation : même vecteur, même centre ou même axe.

Image M' de M par la translation qui transforme A en B

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$$

Images M' et N' de M et N par une translation

$$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$$

Conservation des distances

$$M'N' = MN$$

Longueur du produit, k positif

$$AM = k \times AB$$

Longueur du produit, k négatif

$$AM = (-k) \times AB$$

Milieu I du segment [AB]

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

À retenir : Rédiger en devoir

Pour rédiger en devoir :

- décris chaque déplacement en carreaux avant de conclure ;
- nomme la propriété utilisée à chaque étape ;
- pour une droite, pense au cas « confondue » ;
- pour un produit, regarde d'abord le signe du nombre ;
- termine par une phrase qui répond à la question.