BURHAN

Translation et produit d'un vecteur par un réel : exercices, niveau examen

3ème Année Collège · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/3ac/mathematiques/translation-et-vecteurs/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Translation et produit d'un vecteur par un réel	Niveau examen	5

Exercice 1 5 pts

Un rectangle et un cercle obtenus par translation

Le plan est muni d'un quadrillage dont le carreau mesure 1 cm. On place $G(2;1)$, $H(8;1)$ et $J(2;9)$. On note t la translation qui transforme G en H.



Les trois points G, H et J de l'énoncé, sur un quadrillage assez large pour leurs images.

1. 1 pts

Construire les images J' et H' des points J et H par t, et donner leurs coordonnées. Nommer t d'une autre façon, à l'aide des points H et H'.

INDICE

Outil : de G à H, on avance de 6 carreaux vers la droite, sans monter.

2. 1 pts

Justifier que $GHJ'J$ est un parallélogramme. Sachant que $\widehat{HGJ} = 90^\circ$, préciser sa nature.

INDICE

Début : vérifie d'abord que J n'est pas sur la droite (GH). **Point délicat :** regarde l'angle $\widehat{HGJ}$ que l'énoncé te donne.

3. 1 pts

Calculer HJ. En déduire le périmètre du triangle $HJ'H'$.

INDICE

Début : le triangle GHJ est rectangle en G ; applique le théorème de Pythagore. **Ensuite :** H, J' et H' sont les images de G, J et H par t.

4. 1 pts

Justifier que H est le milieu du segment $[GH']$. En déduire le réel k tel que $\overrightarrow{GH'} = k\overrightarrow{GH}$.

INDICE

Début : utilise l'égalité de vecteurs trouvée à la question 1. **Ensuite :** compare GH' et GH.

5. 1 pts

On note $(\mathcal{C})$ le cercle de centre G qui passe par J. Déterminer son image $(\mathcal{C}')$ par t, et justifier que J' est sur $(\mathcal{C}')$.

INDICE

Outil : l'image d'un cercle est un cercle de même rayon, de centre l'image du centre.

Exercice 2 5 pts

La cabine glisse le long de son câble

Le câble d'une télécabine est une droite. Sur un schéma quadrillé où un carreau mesure 1 cm, la cabine est accrochée au câble en $P(0;5)$. Son plancher est le segment $[RS]$, avec $R(0;1)$ et $S(2;1)$. La cabine glisse sans tourner : son point d'accroche passe de P à $Q(8;9)$. On note t la translation qui transforme P en Q.

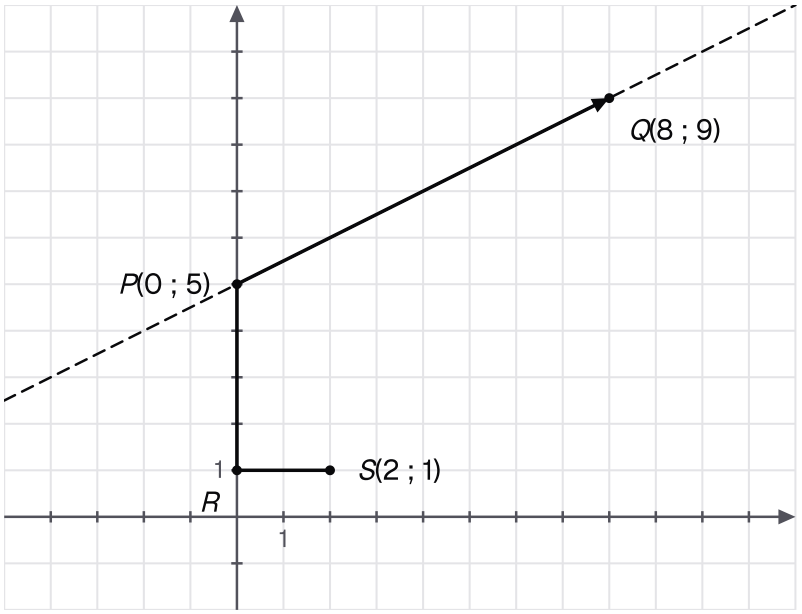


Schéma de la télécabine : le câble (PQ), la tige [PR] et le plancher [RS], avant le glissement.

1. 1 pts

Donner les coordonnées des images R' et S' de R et S par t. Le point $(10;6)$ est-il l'image de S par t ? Justifier.

INDICE

Outil : de P à Q, on avance de 8 carreaux vers la droite et de 4 vers le haut.

2. 1 pts

Le plancher reste-t-il horizontal ? Justifier à l'aide de l'image d'une droite.

INDICE

Début : l'image de (RS) est $(R'S')$. **Point délicat :** écarte le cas « confondues ».

3. 1 pts

La tige $[PR]$ est perpendiculaire au plancher : $\widehat{PRS} = 90°$. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{QR'S'}$. Quelle est l'image de la demi-droite $[PR)$?

INDICE

Outil : Q, R' et S' sont les images de P, R et S. **Ensuite :** l'image d'une demi-droite a pour origine l'image de son origine.

4. 1 pts

Calculer la valeur exacte de la distance PS. En déduire QS'.

INDICE

Début : le triangle PRS est rectangle en R. **Ensuite :** cite la conservation des distances.

5. 1 pts

Quelle est la nature du quadrilatère $PQR'R$? En déduire que le point R se déplace parallèlement au câble.

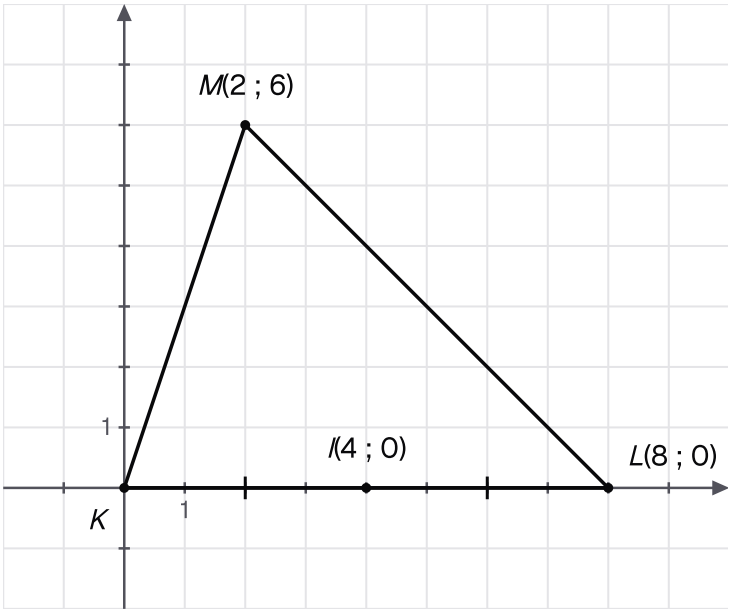
INDICE

Début : vérifie que R n'est pas sur la droite (PQ). **Ensuite :** dans un parallélogramme, les côtés opposés sont parallèles.

Exercice 3 — 5 pts

Une translation et le milieu d'un côté

Sur un quadrillage dont le carreau mesure 1 cm, on considère le triangle KLM avec $K(0;0)$, $L(8;0)$ et $M(2;6)$. Le point $I(4;0)$ est le milieu de $[KL]$. On note t la translation qui transforme K en I.



Le triangle KLM et le milieu I de son côté [KL], placés sur le quadrillage.

1. — 0,5 pts

Justifier que l'image de I par t est le point L.

INDICE

Outil : compare les vecteurs $\overrightarrow{KI}$ et $\overrightarrow{IL}$.

2. — 1 pts

Construire le point M', image de M par t. Justifier que $ILM'M$ est un parallélogramme.

INDICE

Début : t déplace chaque point de 4 carreaux vers la droite. **Ensuite :** t est aussi la translation qui transforme I en L.

3. — 1 pts

On note J le point d'intersection des diagonales $[LM]$ et $[IM']$. Que représente J pour le segment $[LM]$? Donner ses coordonnées.

INDICE

Outil : les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu. **Ensuite :** compte les carreaux de L à M.

4. 1 pts

Quelle est l'image de la droite (KM) par t ? En déduire que les droites (IJ) et (KM) sont parallèles.

INDICE

Début : $t(K) = I$ et $t(M) = M'$. **Point délicat :** J est sur la droite (IM').

5. 1,5 pts

On place $H(2;0)$. Calculer la valeur exacte de KM. En déduire IJ à l'aide du théorème de Thalès dans le triangle LKM.

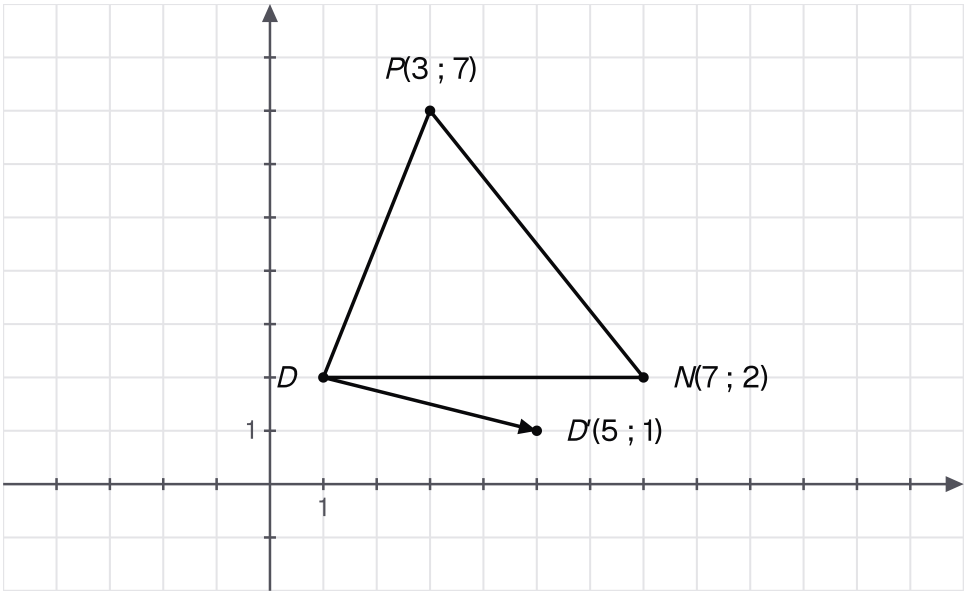
INDICE

Début : le triangle KHM est rectangle en H. **Ensuite :** dans le triangle LKM, I est sur $[LK]$, J sur $[LM]$ et $(IJ) \parallel (KM)$.

Exercice 4 5 pts

Un milieu et une aire qui se conservent

Sur un quadrillage dont le carreau mesure 1 cm, on place les sommets du triangle DNP : $D(1;2)$, $N(7;2)$ et $P(3;7)$. On note t la translation qui transforme D en $D'(5;1)$.



Le triangle DNP et la flèche de D vers D' qui définit la translation t.

1. 1 pts

Décrire le déplacement de t. Construire l'image N' du point N par t et donner ses coordonnées.

INDICE

Outil : compte les carreaux de D à D', puis fais le même déplacement à partir de N.

2. 1 pts

Le point $I(4;2)$ est le milieu de $[DN]$. Donner les coordonnées de son image I' par t. En déduire, à l'aide de deux propriétés de conservation, que I' est le milieu de $[D'N']$.

INDICE

Début : les points D, I et N sont alignés, et $DI = IN$. **Ensuite :** cherche ce que deviennent l'alignement et les distances par t.

3. 1 pts

Calculer l'aire du triangle DNP. En déduire l'aire du triangle $D'N'P'$, où P' est l'image de P par t. Cette aire servira de contrôle à la question suivante.

INDICE

Début : le côté $[DN]$ suit une ligne du quadrillage ; compte de combien de carreaux P est au-dessus de la droite (DN). **Ensuite :** cite une propriété de conservation.

4. 1 pts

Sur son cahier, un camarade a placé l'image de P par t au point $K(7;8)$. Calculer l'aire du triangle $D'N'K$. En déduire que K n'est pas l'image de P par t, puis donner la bonne image P'.

INDICE

Début : le côté $[D'N']$ suit lui aussi une ligne du quadrillage. **Point délicat :** si K était l'image de P, quel triangle serait l'image de DNP ?

5. 1 pts

Le point $L'(6;4)$ est l'image par t d'un point L. Traduire l'égalité $t(L)=L'$ par une égalité de vecteurs. En déduire le déplacement qui mène de L' à L, puis les coordonnées de L.

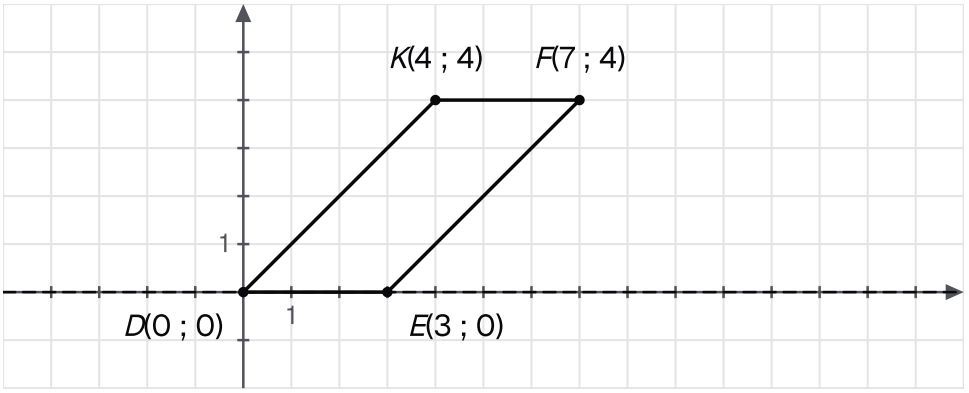
INDICE

Début : la translation t est définie par le vecteur $\overrightarrow{DD'}$. **Ensuite :** pour aller de L' à L, on parcourt le vecteur $\overrightarrow{LL'}$ à l'envers.

Exercice 5 — 5 pts

Les places d'un parking se répètent

Dans un parking, les places sont dessinées en épi le long d'un trottoir rectiligne. Sur un plan quadrillé où un carreau représente 1 m, le bord du trottoir est la droite qui passe par $D(0;0)$ et $E(3;0)$. La première place est le quadrilatère $DEFK$, avec $F(7;4)$ et $K(4;4)$. Chaque place suivante est l'image de la précédente par la translation t qui transforme D en E.



Plan du parking : le bord du trottoir et la première place DEFK, tracée en épi.

1. — 0,5 pts

Décrire le déplacement de t et justifier que $t(K) = F$.

INDICE

Outil : compte les carreaux de D à E, puis fais le même déplacement à partir de K.

2. — 1 pts

Donner les coordonnées des images E' et F' de E et F par t. En déduire l'image du côté $[DK]$, puis nommer la deuxième place. Préciser enfin la nature de la première place.

INDICE

Début : l'image d'un segment a pour extrémités les images des extrémités. **Ensuite :** pour la nature, traduis $t(K) = F$ par une égalité de vecteurs.

3. — 1 pts

Le trait $[DK]$ fait avec le trottoir l'angle $\widehat{KDE} = 45°$. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{FEE'}$, puis celle de l'angle $\widehat{DEF}$.

INDICE

Début : F, E et E' sont les images de K, D et E. **Point délicat :** les points D, E et E' sont sur le trottoir, et E est entre D et E'.

4. 1 pts

La troisième place $E'MNF'$ est l'image de la deuxième par t, avec $M = t(E')$ et $N = t(F')$. Donner les coordonnées de M et de N. En déduire la translation qui transforme D, E, F et K en E', M, N et F', nommée à l'aide de deux points.

INDICE

Début : compte le déplacement de D vers E'. **Ensuite :** vérifie que les trois autres sommets font le même déplacement.

5. 1,5 pts

On place $H(4;0)$. Calculer la valeur exacte de la longueur DK, puis une valeur approchée au dixième près. En déduire la longueur totale de peinture des quatre traits obliques $[DK]$, $[EF]$, $[E'F']$ et $[MN]$.

INDICE

Début : le triangle DHK est rectangle en H. **Ensuite :** chaque trait oblique est l'image du précédent par t.