BURHAN

Translation et produit d'un vecteur par un réel : exercices, entraînement

3ème Année Collège · Mathématiques

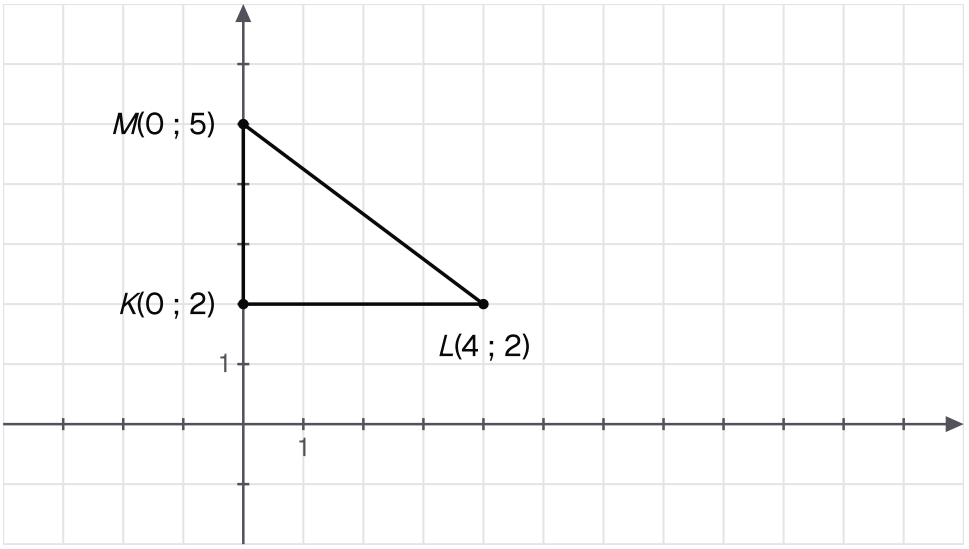
Version en ligne : burhan.ma/3ac/mathematiques/translation-et-vecteurs/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Translation et produit d'un vecteur par un réel	Entraînement	7

Exercice 1

Le motif d'une frise décorative

Une frise décorative répète le même motif triangulaire. Sur un quadrillage où un carreau mesure 1 cm, le premier motif est le triangle KLM, avec $K(0;2)$, $L(4;2)$ et $M(0;5)$. Le motif suivant est son image par la translation t qui déplace chaque point de 6 carreaux vers la droite.



Le premier motif de la frise : le triangle KLM, à gauche du quadrillage.

1.

Donne les coordonnées des sommets K', L' et M' du deuxième motif.

INDICE

Outil : la seconde coordonnée ne change pas ; ajoute 6 à la première.

CORRIGÉ

Méthode. D'après la définition de t, chaque sommet avance de 6 carreaux vers la droite. On ajoute 6 à la première coordonnée, et la seconde ne change pas.

Conclusion. Les sommets du deuxième motif sont $K'(6;2)$, $L'(10;2)$ et $M'(6;5)$.

2.

Le triangle KLM est rectangle en K. Calcule LM, puis déduis-en $L'M'$.

INDICE

Début : lis KL et KM sur le quadrillage. **Ensuite :** pour $L'M'$, aucun calcul n'est utile.

CORRIGÉ

Côtés de l'angle droit. On lit $KL = 4$ cm et $KM = 3$ cm.

Pythagore. Rappel du premier semestre : le théorème de Pythagore. Dans le triangle KLM rectangle en K :

$$LM^2 = 4^2 + 3^2 = 25$$

Donc $LM = 5$ cm.

Image. Les points L' et M' sont les images de L et M par t. D'après la conservation des distances, $L'M' = LM = 5$ cm.

Conclusion. Le côté $[LM]$ mesure 5 cm, et $[L'M']$ aussi.

3.

Donne la mesure de l'angle $\widehat{L'K'M'}$ et l'aire du triangle $K'L'M'$.

INDICE

Outil : une translation conserve les mesures des angles et les aires.

CORRIGÉ

Angle. L'angle $\widehat{L'K'M'}$ est l'image de l'angle droit $\widehat{LKM}$. D'après la conservation des mesures des angles :

$$\widehat{L'K'M'} = \widehat{LKM} = 90^\circ$$

Aire de KLM. Ce triangle est rectangle en K, et ses côtés de l'angle droit mesurent 4 cm et 3 cm. Son aire vaut $\dfrac{4 \times 3}{2} = 6 \text{ cm}^2$.

Aire de l'image. D'après la conservation des aires, le triangle $K'L'M'$ a lui aussi une aire de 6 cm^2.

Conclusion. L'angle $\widehat{L'K'M'}$ est droit, et l'aire de $K'L'M'$ vaut 6 cm^2.

4.

Quelle est l'image de la droite (KL) ? Et celle de la droite (LM) ? Précise leur position par rapport à la droite de départ.

INDICE

Point délicat : regarde si K' et L' sont encore sur la droite (KL).

CORRIGÉ

Droite (KL). Son image est la droite $(K'L')$. Les quatre points K, L, K' et L' sont sur la ligne du quadrillage qui passe par K et L. L'image de (KL) est donc confondue avec (KL).

Droite (LM). Son image est la droite $(L'M')$. D'après l'image d'une droite, elle est parallèle à (LM) ou confondue avec elle.

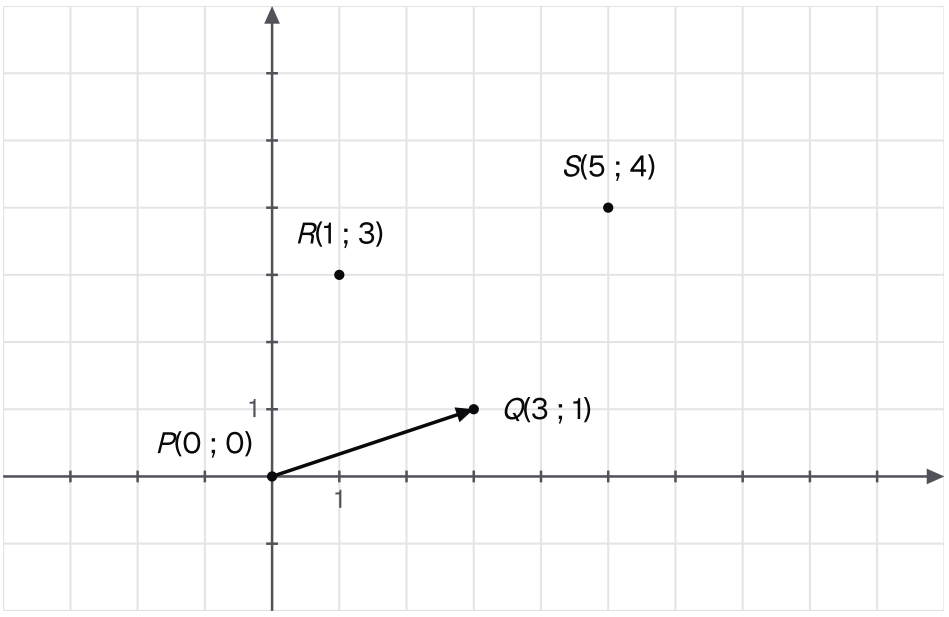
Cas écarté. De L à M, on va 4 carreaux à gauche et 3 en haut. De L à L', on va 6 à droite sans monter : une autre direction. Le point L' n'est donc pas sur (LM).

Conclusion. La droite (KL) a pour image elle-même. La droite (LM) a pour image $(L'M')$, et ces deux droites sont parallèles.

Exercice 2

Justifier un parallélisme par une translation

On place sur un quadrillage les points $P(0;0)$, $Q(3;1)$, $R(1;3)$ et $S(5;4)$. On note t la translation qui transforme P en Q.



Les points P, Q, R et S, avec la flèche de P vers Q qui donne la translation t.

1.

Construis les images R' et S' de R et S par t.

INDICE

Outil : de P à Q, on avance de 3 carreaux à droite et de 1 carreau en haut.

CORRIGÉ

Déplacement. De $P(0;0)$ à $Q(3;1)$, on compte 3 carreaux à droite et 1 en haut.

Conclusion. Chaque point fait ce déplacement. À partir de $R(1;3)$ et de $S(5;4)$, on obtient $R'(4;4)$ et $S'(8;5)$.

2.

Justifie que les droites $(R'S')$ et (RS) sont parallèles.

INDICE

Début : cite l'image d'une droite par une translation. **Point délicat :** écarte le cas où les deux droites sont confondues.

CORRIGÉ

Image. D'après l'image d'une droite par une translation, l'image de (RS) par t est la droite $(R'S')$. Elle est parallèle à (RS) ou confondue avec elle.

Cas écarté. De R à S, on avance de 4 carreaux à droite pour 1 en haut. De R à R', de 3 à droite pour 1 en haut. Les directions diffèrent : R' n'est pas sur (RS), et les deux droites ne sont pas confondues.

Conclusion. Les droites $(R'S')$ et (RS) sont parallèles :

$$(R'S') \parallel (RS)$$

3.

Quelle est la nature du quadrilatère $RR'S'S$? Justifie.

INDICE

Outil : t est aussi la translation qui transforme R en R'.

CORRIGÉ

Translation. On a $\overrightarrow{RR'} = \overrightarrow{PQ}$: la translation t est aussi celle qui transforme R en R'. Elle transforme S en S'.

Position de S. De R à S : 4 carreaux à droite et 1 en haut. De R à R' : 3 à droite et 1 en haut. Les directions diffèrent : S n'est pas sur la droite (RR').

Conclusion. D'après la définition de la translation, $RR'S'S$ est un parallélogramme.

4.

Vérifie ce résultat : trouve les milieux des diagonales $[RS']$ et $[R'S]$ en comptant les carreaux.

INDICE

Outil : le milieu d'un segment s'obtient en faisant la moitié du déplacement d'une extrémité à l'autre.

CORRIGÉ

Milieu de $[RS']$. De $R(1;3)$ à $S'(8;5)$: 7 carreaux à droite et 2 en haut. La moitié, soit $3{,}5$ à droite et 1 en haut, mène de R au point $(4{,}5;4)$.

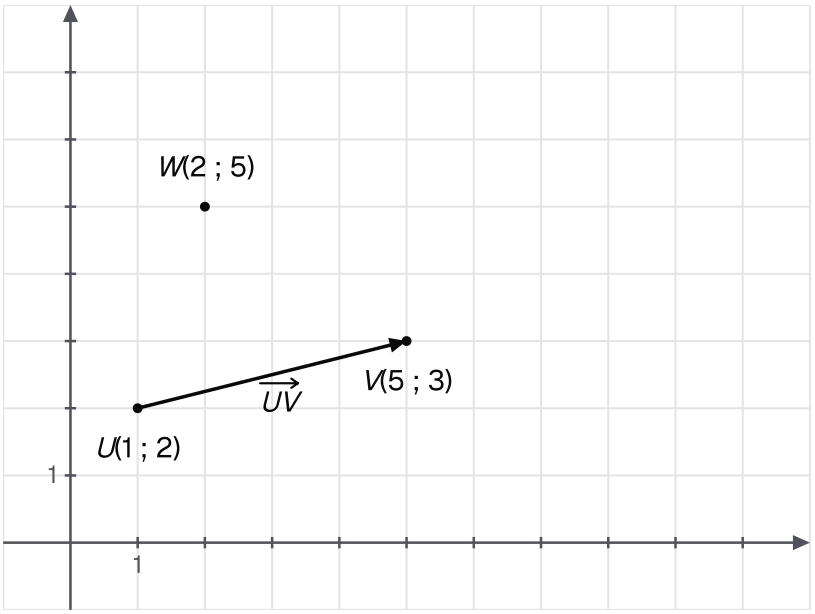
Milieu de $[R'S]$. De $R'(4;4)$ à $S(5;4)$: 1 carreau à droite. La moitié, un demi-carreau, mène de R' au point $(4{,}5;4)$.

Conclusion. Les diagonales $[RS']$ et $[R'S]$ ont le même milieu : le quadrilatère $RR'S'S$ est bien un parallélogramme.

Exercice 3

Une translation, un parallélogramme et un milieu

Sur un quadrillage, on place $U(1;2)$, $V(5;3)$ et $W(2;5)$. On appelle t la translation qui transforme U en V.



Les points U, V et W, et la flèche de U vers V qui définit la translation t.

1.

Construis l'image W' de W par t et donne ses coordonnées.

INDICE

Outil : décris d'abord le déplacement de U vers V.

CORRIGÉ

Déplacement. De $U(1;2)$ à $V(5;3)$: 4 carreaux vers la droite et 1 vers le haut.

Conclusion. À partir de $W(2;5)$, ce déplacement mène au point $W'(6;6)$, image de W par t.

2.

Quelle est la nature du quadrilatère $UVW'W$? Justifie en citant une définition du cours.

INDICE

Début : vérifie que W n'est pas sur la droite (UV).

CORRIGÉ

Position de W. De U à W, on avance de 1 carreau à droite et de 3 en haut. Ce n'est pas la direction de U vers V : le point W n'est pas sur (UV).

Conclusion. On a $t(W) = W'$, avec W hors de (UV). D'après la définition de la translation qui transforme U en V, le quadrilatère $UVW'W$ est un parallélogramme.

3.

On appelle X l'image de V par t. Donne ses coordonnées, puis justifie que V est le milieu de $[UX]$.

INDICE

Outil : compare les vecteurs $\overrightarrow{UV}$ et $\overrightarrow{VX}$.

CORRIGÉ

Point X. À partir de $V(5;3)$, le déplacement de t donne $X(9;4)$.

Égalité. Comme $t(V) = X$, on a :

$$\overrightarrow{VX} = \overrightarrow{UV}$$

Milieu. Rappel de 2AC : si $\overrightarrow{UV} = \overrightarrow{VX}$, alors V est le milieu de $[UX]$.

Conclusion. Le point X a pour coordonnées $(9;4)$, et V est le milieu de $[UX]$.

4.

Complète l'égalité $\overrightarrow{UX} = \ldots \overrightarrow{UV}$. Que peut-on dire des points U, V et X ?

INDICE

Point délicat : compare le déplacement de U vers X à celui de U vers V.

CORRIGÉ

Comparaison. De U à X : 8 carreaux à droite et 2 en haut. C'est le double du déplacement de U vers V.

Produit. Le point X est sur $[UV)$ et $UX = 2 \times UV$. Donc :

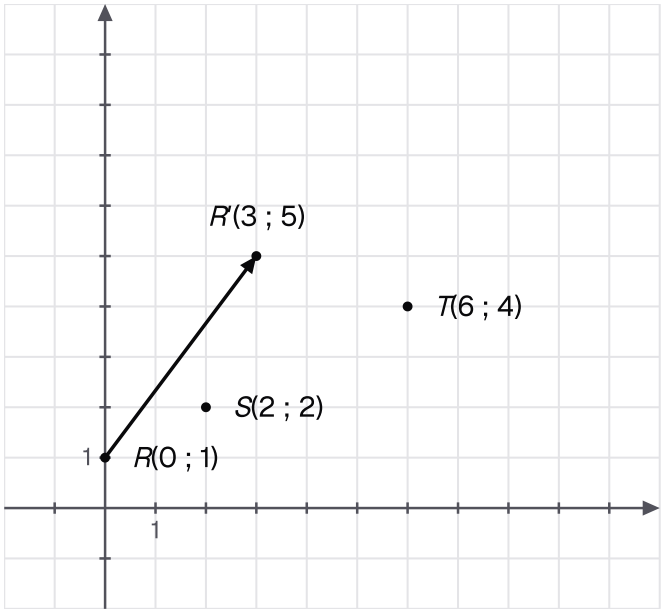
$$\overrightarrow{UX} = 2\overrightarrow{UV}$$

Conclusion. Le nombre qui complète l'égalité est 2. D'après la propriété du produit et de l'alignement, les points U, V et X sont alignés.

Exercice 4

Trois points alignés et leurs images

Un carreau du quadrillage mesure 1 cm. On place $R(0;1)$, $S(2;2)$ et $T(6;4)$, puis on considère la translation qui transforme R en $R'(3;5)$.



Les points R, S et T, et la flèche de R vers R' de la translation de l'exercice.

1.

Trouve le réel k tel que $\overrightarrow{RT} = k\overrightarrow{RS}$. Déduis-en que R, S et T sont alignés.

INDICE

Début : compare le déplacement de R vers T à celui de R vers S.

CORRIGÉ

Déplacements. De R à S : 2 carreaux à droite et 1 en haut. De R à T : 6 à droite et 3 en haut, soit le triple.

Produit. Le point T est sur $[RS)$ et $RT = 3 \times RS$. Donc :

$$\overrightarrow{RT} = 3\overrightarrow{RS}$$

Conclusion. Le réel cherché est $k = 3$. D'après la propriété du produit et de l'alignement, R, S et T sont alignés.

2.

Construis les images S' et T' de S et T.

INDICE

Outil : le déplacement de R vers R' est de 3 carreaux à droite et de 4 en haut.

CORRIGÉ

Déplacement. De $R(0;1)$ à $R'(3;5)$: 3 carreaux à droite et 4 en haut.

Conclusion. En faisant ce déplacement à partir de S et de T, on obtient $S'(5;6)$ et $T'(9;8)$.

3.

Sans calcul, justifie que R', S' et T' sont alignés.

INDICE

Outil : cite la propriété de conservation qui convient.

CORRIGÉ

Données. D'après la question 1, les points R, S et T sont alignés. Leurs images par la translation sont R', S' et T'.

Conclusion. D'après la conservation de l'alignement par une translation, les points R', S' et T' sont alignés.

4.

Calcule la valeur exacte de RT, puis donne $R'T'$.

INDICE

Début : place le point $(6;1)$ pour former un triangle rectangle. **Ensuite :** applique le théorème de Pythagore.

CORRIGÉ

Triangle rectangle. Avec le point $(6;1)$, on forme un triangle rectangle d'hypoténuse $[RT]$, dont les deux autres côtés mesurent 6 cm et 3 cm.

Pythagore. Rappel du premier semestre : le théorème de Pythagore. Dans ce triangle :

$$RT^2 = 6^2 + 3^2 = 45$$

Comme $45 = 9 \times 5$, on obtient $RT = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ cm.

Image. D'après la conservation des distances, $R'T' = RT$.

Conclusion. On a $RT = 3\sqrt{5}$ cm et $R'T' = 3\sqrt{5}$ cm, soit environ $6{,}7$ cm.

Exercice 5

Une ligne de bus sur le plan de la ville

Sur le plan quadrillé d'une ville, un carreau représente 100 m. La ligne 1 d'un bus dessert en ligne droite les arrêts $G(1;3)$, $H(5;6)$ et $K(9;9)$. La mairie crée la ligne 2 : ses arrêts sont les images de ceux de la ligne 1 par la translation qui transforme G en $G'(4;1)$.

1.

Compare les vecteurs $\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{HK}$. Que représente l'arrêt H pour le segment $[GK]$?

INDICE

Outil : décris les deux déplacements en carreaux.

CORRIGÉ

Vecteurs. De G à H, comme de H à K : 4 carreaux vers la droite et 3 vers le haut. Donc :

$$\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{HK}$$

Milieu. Rappel de 2AC : cette égalité signifie que H est le milieu de $[GK]$.

Conclusion. Les vecteurs $\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{HK}$ sont égaux, et l'arrêt H est le milieu de $[GK]$: les trois arrêts sont alignés.

2.

Donne les positions H' et K' des arrêts de la ligne 2.

INDICE

Début : de G à G', on va de 3 carreaux vers la droite et de 2 vers le bas.

CORRIGÉ

Déplacement. De $G(1;3)$ à $G'(4;1)$: 3 carreaux vers la droite et 2 vers le bas.

Conclusion. En appliquant ce déplacement à $H(5;6)$ et à $K(9;9)$, on obtient les arrêts $H'(8;4)$ et $K'(12;7)$.

3.

Calcule la distance GH en mètres, puis la distance $G'H'$.

INDICE

Début : forme un triangle rectangle avec le point $(5;3)$. **Ensuite :** convertis les carreaux en mètres.

CORRIGÉ

Triangle rectangle. Avec le point $(5;3)$, on forme un triangle rectangle d'hypoténuse $[GH]$, dont les deux autres côtés mesurent 4 et 3 carreaux.

Pythagore. Rappel du premier semestre : le théorème de Pythagore. Dans ce triangle :

$$GH^2 = 4^2 + 3^2 = 25$$

Donc $GH = 5$ carreaux. Un carreau représente 100 m, d'où $GH = 5 \times 100 = 500$ m.

Image. D'après la conservation des distances, $G'H' = GH$.

Conclusion. Les distances GH et $G'H'$ valent toutes deux 500 m.

4.

Les arrêts de la ligne 2 sont-ils alignés ? Quelle distance le bus de la ligne 2 parcourt-il de G' à K' ?

INDICE

Outil : une translation conserve l'alignement et les distances. **Point délicat :** $GK = GH + HK$.

CORRIGÉ

Alignement. Les arrêts G, H et K sont alignés. D'après la conservation de l'alignement, les arrêts G', H' et K' le sont aussi.

Distance GK. Le point H est entre G et K, donc $GK = GH + HK$. Or $HK = GH = 500$ m, d'où $GK = 1000$ m.

Image. D'après la conservation des distances, $G'K' = GK$.

Conclusion. Les arrêts de la ligne 2 sont alignés, et le bus parcourt $G'K' = 1000$ m de G' à K'.

Exercice 6

Les trous du montant d'une étagère

Le montant vertical d'une étagère est dessiné sur un quadrillage où un carreau représente 10 cm. Le trou R est en $R(2;1)$, le trou suivant en $S(2;3)$. Les autres trous sont placés à l'aide du vecteur $\overrightarrow{RS}$.

1.

Calcule RS en centimètres. Place le trou T tel que $\overrightarrow{RT} = 3\overrightarrow{RS}$, puis calcule RT.

INDICE

Outil : $3 > 0$: T est au-dessus de R, du côté de S.

CORRIGÉ

Longueur RS. De R à S, on monte de 2 carreaux. Un carreau représente 10 cm, donc $RS = 20$ cm.

Point T. Comme $3 > 0$, le point T est sur la demi-droite $[RS)$, au-dessus de R. On a $RT = 3 \times 20 = 60$ cm, soit 6 carreaux.

Conclusion. On a $RS = 20$ cm, le trou T est en $T(2;7)$, et $RT = 60$ cm.

2.

Place le trou U tel que $\overrightarrow{RU} = \frac{3}{2}\overrightarrow{RS}$.

INDICE

Début : calcule $\frac{3}{2} \times 20$.

CORRIGÉ

Sens. Comme $\frac{3}{2} > 0$, le point U est sur la demi-droite $[RS)$.

Longueur. On a $RU = \frac{3}{2} \times 20 = 30$ cm, soit 3 carreaux au-dessus de R.

Conclusion. Le trou U est en $U(2;4)$.

3.

On note I le milieu de $[RT]$. Donne sa position. Que remarques-tu ?

INDICE

Outil : I est le milieu de $[RT]$ si $\overrightarrow{RI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{RT}$.

CORRIGÉ

Point I. D'après la propriété du milieu, $\overrightarrow{RI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{RT}$. Le point I est donc sur $[RT)$, avec $RI = \frac{1}{2} \times 60 = 30$ cm, soit 3 carreaux. Donc $I(2;4)$.

Conclusion. Le milieu I de $[RT]$ est en $(2;4)$: on remarque qu'il occupe la place du trou U.

4.

Un dernier trou V vérifie $\overrightarrow{RV} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{RS}$. Où est-il ? Calcule RV.

INDICE

Point délicat : le nombre est négatif, mais une longueur ne l'est jamais.

CORRIGÉ

Sens. Comme $-\frac{1}{2} < 0$, le point V est sur la droite (RS), et R est entre S et V. Le trou V est donc sous le trou R.

Longueur. Une longueur n'est jamais négative : RV est la moitié de RS. Donc $RV = \frac{1}{2} \times 20 = 10$ cm, soit 1 carreau.

Conclusion. Le trou V est en $V(2;0)$, à 10 cm sous le trou R.

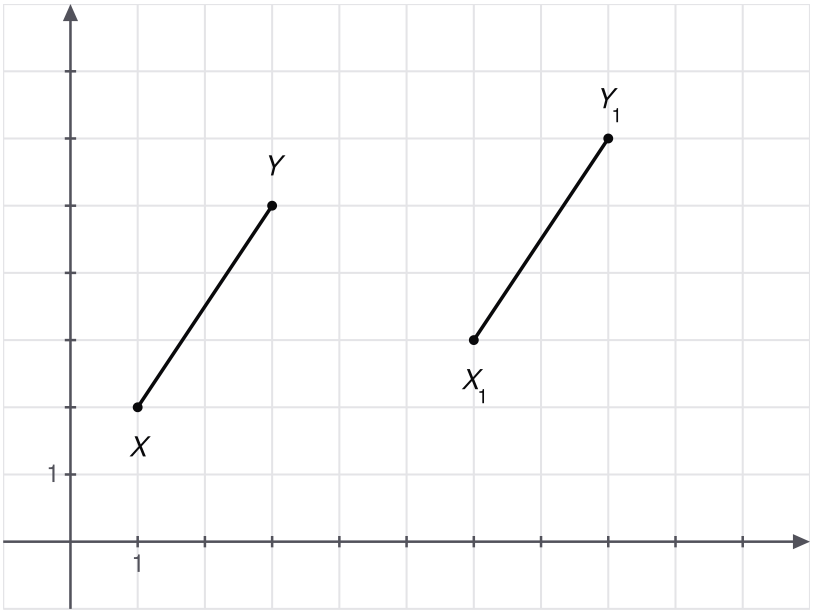
Exercice 7

Quelle transformation ?

Sur un quadrillage, on trace le segment $[XY]$, avec $X(1;2)$ et $Y(3;5)$. Trois transformations différentes l'envoient sur trois segments : $[X_1Y_1]$, $[X_2Y_2]$ et $[X_3Y_3]$. Pour chacune, X a pour image le point d'indice correspondant, et Y aussi.

1.

On donne $X_1(6;3)$ et $Y_1(8;6)$. Quelle est la transformation ?



Le segment [XY] et le segment [X1Y1] donnés par la première transformation.

INDICE

Outil : compare les déplacements de X vers X_1 et de Y vers Y_1.

CORRIGÉ

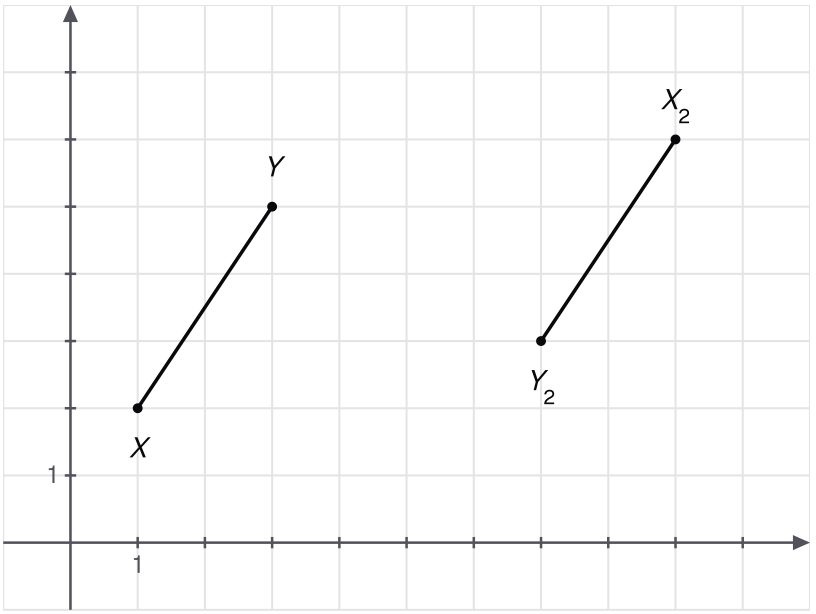
Déplacements. De X à X_1, comme de Y à Y_1 : 5 carreaux à droite et 1 en haut. Donc :

$$\overrightarrow{XX_1} = \overrightarrow{YY_1}$$

Conclusion. Les deux points font le même déplacement : la transformation est la translation qui transforme X en X_1.

2.

On donne $X_2(9;6)$ et $Y_2(7;3)$. Quelle est la transformation ?



Le segment [XY] et le segment [X2Y2] donnés par la deuxième transformation.

INDICE

Outil : compare les milieux des segments $[XX_2]$ et $[YY_2]$, trouvés en comptant les carreaux.

CORRIGÉ

Déplacements. De X à X_2 : 8 carreaux à droite et 4 en haut. De Y à Y_2 : 4 à droite et 2 en bas. Ils diffèrent : ce n'est pas une translation.

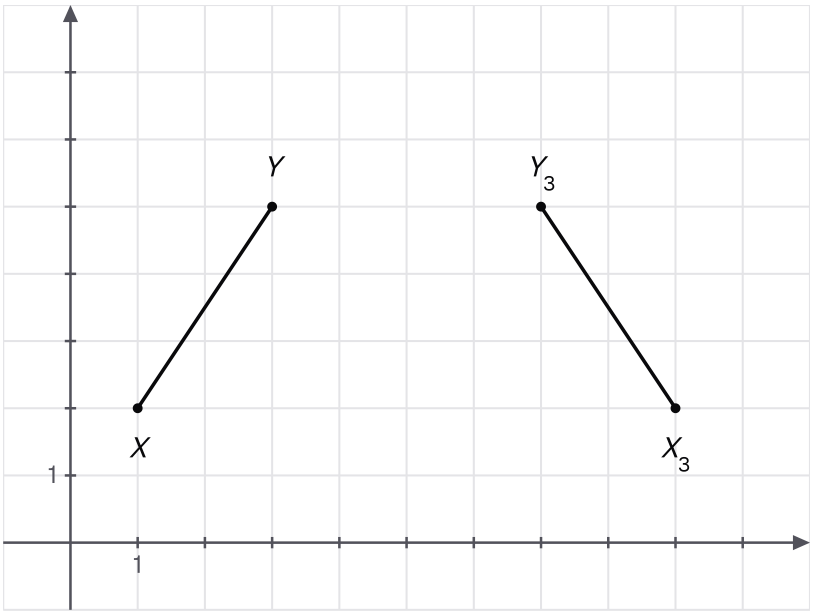
Milieux. La moitié du premier déplacement, 4 à droite et 2 en haut, mène de X au point $(5;4)$. La moitié du second, 2 à droite et 1 en bas, mène de Y au même point $(5;4)$.

Symétrie centrale. Rappel de 1AC : le symétrique d'un point M par rapport à un point O est le point M' tel que O soit le milieu de $[MM']$. Ici, le point $(5;4)$ est le milieu de $[XX_2]$ et de $[YY_2]$.

Conclusion. Les points X_2 et Y_2 sont les symétriques de X et Y : la transformation est la symétrie centrale de centre le point $(5;4)$.

3.

On donne $X_3(9;2)$ et $Y_3(7;5)$. Quelle est la transformation ?



Le segment [XY] et le segment [X3Y3] donnés par la troisième transformation.

INDICE

Outil : regarde si une même droite passe par le milieu de $[XX_3]$ et par celui de $[YY_3]$, à angle droit de ces deux segments.

CORRIGÉ

Milieux. Les segments $[XX_3]$ et $[YY_3]$ suivent des lignes du quadrillage. De X à X_3 : 8 carreaux à droite ; la moitié mène au milieu $(5;2)$. De Y à Y_3 : 4 carreaux à droite ; la moitié mène au milieu $(5;5)$.

Médiatrice. La droite verticale qui passe par $(5;2)$ et $(5;5)$ coupe ces deux segments en leur milieu, à angle droit. Rappel de 2AC : c'est leur médiatrice commune.

Conclusion. Les points X_3 et Y_3 sont les symétriques de X et Y par rapport à cette droite : la transformation est la symétrie axiale d'axe cette droite verticale.