BURHAN

Translation et produit d'un vecteur par un réel : exercices, application

3ème Année Collège · Mathématiques

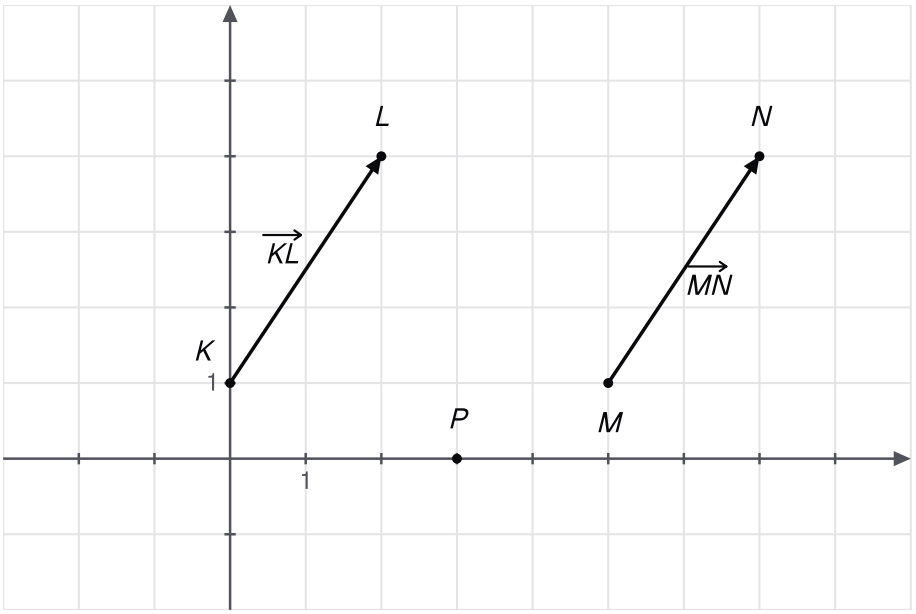
Version en ligne : burhan.ma/3ac/mathematiques/translation-et-vecteurs/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Translation et produit d'un vecteur par un réel	Application	8

Exercice 1

Deux vecteurs égaux sur un quadrillage

Trace un quadrillage sur ton cahier. Place les points $K(0;1)$, $L(2;4)$, $M(5;1)$, $N(7;4)$ et $P(3;0)$.



Les cinq points de l'exercice placés sur le quadrillage, avec les flèches KL et MN.

1.

Décris le déplacement de K vers L, puis celui de M vers N. Les vecteurs $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont-ils égaux ?

INDICE

Outil : compte d'abord les carreaux vers la droite, puis les carreaux vers le haut.

CORRIGÉ

Déplacements. De K à L, on compte 2 carreaux vers la droite et 3 vers le haut. De M à N, on retrouve 2 carreaux vers la droite et 3 vers le haut.

Comparaison. Ces deux déplacements sont identiques : les deux flèches sont parallèles, vont dans le même sens et ont la même longueur.

Conclusion. Oui, les vecteurs $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont égaux :

$$\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{MN}$$

2.

Les vecteurs $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{PM}$ sont-ils égaux ? Justifie.

INDICE

Début : décris le déplacement de P vers M et compare-le à celui de la question 1.

CORRIGÉ

Déplacement. De P à M, on compte 2 carreaux vers la droite, mais 1 seul vers le haut.

Comparaison. De K à L, on montait de 3 carreaux. Les deux déplacements diffèrent : les vecteurs $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{PM}$ n'ont pas la même direction.

Conclusion. Non, les vecteurs $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{PM}$ ne sont pas égaux.

3.

Les points K, L et M ne sont pas alignés. Nomme le parallélogramme obtenu à partir de l'égalité de la question 1, en respectant l'ordre des sommets.

INDICE

Point délicat : avec $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{MN}$, fais le tour K, L, puis l'extrémité du second vecteur.

CORRIGÉ

Parallélogramme. Rappel de 2AC : $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{MN}$, avec K, L, M non alignés, signifie que $KLNM$ est un parallélogramme. On tourne dans l'ordre K, L, N, puis M.

Contrôle de $[KN]$. De K à N : 7 carreaux à droite et 3 en haut. La moitié de ce déplacement mène de K au point $(3{,}5\,;\,2{,}5)$.

Contrôle de $[LM]$. De L à M : 3 à droite et 3 en bas. La moitié mène de L au même point. Les diagonales ont bien le même milieu.

Conclusion. Le parallélogramme obtenu se nomme $KLNM$.

Exercice 2

Les pions d'un jeu de plateau

Sur un plateau de jeu quadrillé, tous les pions glissent ensemble, sans tourner. Le pion placé en $R(2;1)$ arrive en $S(5;3)$. Les autres pions sont en $T(1;4)$, $U(6;0)$ et $V(0;2)$.

1.

Décris le déplacement qui envoie R sur S.

INDICE

Outil : compte les carreaux horizontaux, puis les carreaux verticaux.

CORRIGÉ

Comptage. De $R(2;1)$ à $S(5;3)$, la première coordonnée passe de 2 à 5 et la seconde de 1 à 3.

Conclusion. Le déplacement qui envoie R sur S est de 3 carreaux vers la droite et de 2 carreaux vers le haut.

2.

Construis les images T', U' et V' des trois autres pions par la translation qui transforme R en S. Donne leurs coordonnées.

INDICE

Début : à partir de chaque pion, fais le déplacement trouvé à la question 1.

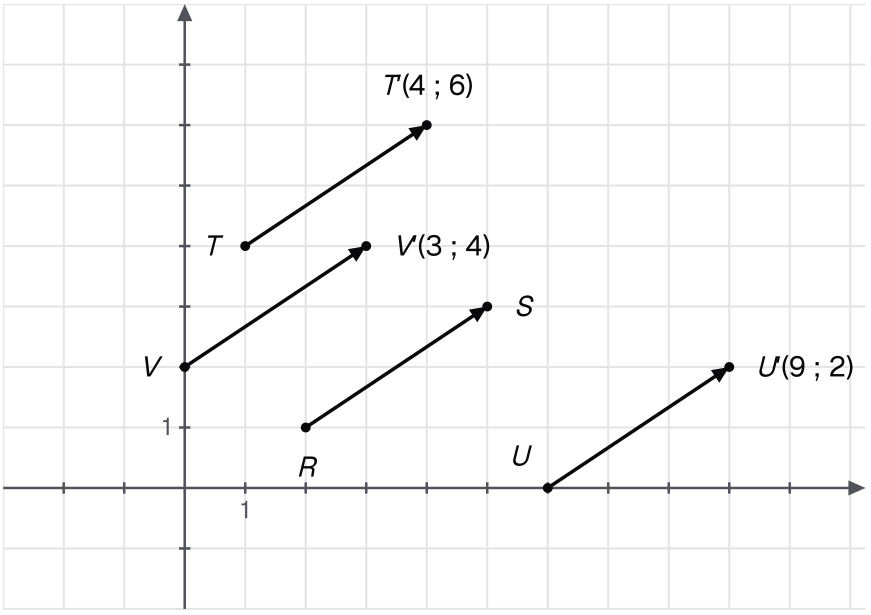
CORRIGÉ

Méthode. Par définition de la translation qui transforme R en S, chaque pion fait le même déplacement que R : 3 carreaux vers la droite et 2 vers le haut.

Images.

- $T'(4;6)$, car $1+3=4$ et $4+2=6$;
- $U'(9;2)$, car $6+3=9$ et $0+2=2$;
- $V'(3;4)$, car $0+3=3$ et $2+2=4$.

Conclusion. Les trois pions arrivent aux points T', U' et V' ci-dessus.



Chaque pion glisse comme le pion R : T, U et V arrivent en T', U' et V'.

3.

Un joueur affirme que l'image de S par cette translation est R. A-t-il raison ? Donne l'image de S.

INDICE

Point délicat : la translation fait toujours aller dans le sens de R vers S.

CORRIGÉ

Sens. La translation qui transforme R en S fait toujours aller dans le sens de R vers S. Le point R est l'image de S par une autre translation : celle qui transforme S en R.

Image de S. On applique à $S(5;3)$ le déplacement de la question 1 : $5+3=8$ et $3+2=5$.

Conclusion. Le joueur a tort. L'image de S est le point $(8;5)$, et non le point R.

Exercice 3

La marche d'un escalier mécanique

Dans un centre commercial, une marche d'escalier mécanique monte en ligne droite, sans tourner. Sur un schéma quadrillé vu de côté, son coin $K(1;2)$ arrive en $K'(7;5)$. On note t la translation qui transforme K en K'.

1.

Un autre coin de la marche est $L(3;2)$. Le point $L'(9;5)$ est-il l'image de L par t ?

INDICE

Outil : L' est l'image de L si $\overrightarrow{LL'} = \overrightarrow{KK'}$.

CORRIGÉ

Déplacements. De K à K' : 6 carreaux vers la droite et 3 vers le haut. De L à L' : de nouveau 6 vers la droite et 3 vers le haut.

Égalité. Les deux déplacements sont identiques, donc :

$$\overrightarrow{LL'} = \overrightarrow{KK'}$$

Conclusion. D'après la définition de la translation, le point L' est l'image de L par t : $t(L) = L'$.

2.

Un sac posé sur la marche a son coin en $M(2;4)$. Sur le schéma, on a dessiné l'image de ce coin en $(8;6)$. Est-ce correct ? Sinon, donne la bonne position.

INDICE

Début : décris le déplacement de M vers $(8;6)$ et compare-le à celui de K vers K'.

CORRIGÉ

Comparaison. De $M(2;4)$ au point $(8;6)$: 6 carreaux vers la droite, mais 2 seulement vers le haut. La translation t fait monter de 3 carreaux : ce n'est pas son déplacement.

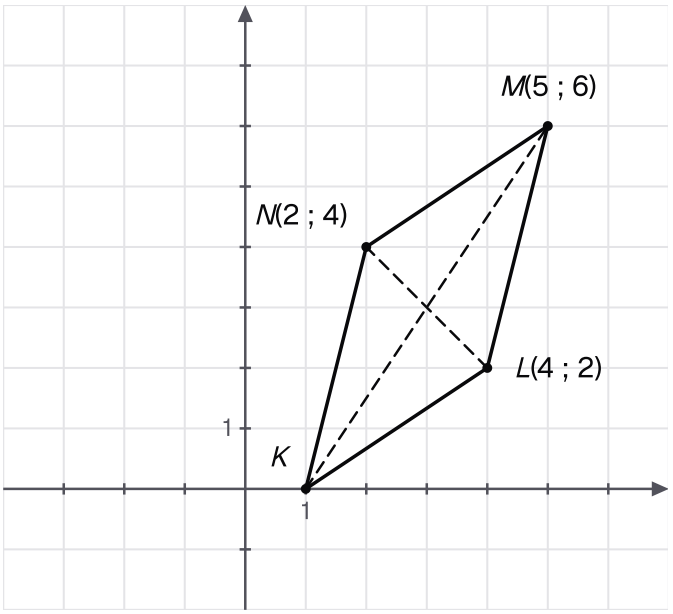
Bonne position. À partir de $M(2;4)$, on fait 6 carreaux à droite et 3 en haut : $2+6=8$ et $4+3=7$.

Conclusion. Le dessin n'est pas correct : l'image de M par t est le point $(8;7)$.

Exercice 4

Nommer une translation dans un parallélogramme

Sur un quadrillage, on place $K(1;0)$, $L(4;2)$, $M(5;6)$ et $N(2;4)$.



Le quadrilatère KLMN et ses deux diagonales [KM] et [LN], tracés sur le quadrillage.

1.

Trouve les milieux de $[KM]$ et de $[LN]$ en comptant les carreaux. Quelle est la nature du quadrilatère $KLMN$?

INDICE

Outil : pour trouver le milieu d'un segment, fais la moitié du déplacement qui va d'une extrémité à l'autre.

CORRIGÉ

Milieu de $[KM]$. De K à M : 4 carreaux à droite et 6 en haut. La moitié, soit 2 à droite et 3 en haut, mène de K au point $(3;3)$.

Milieu de $[LN]$. De L à N : 2 carreaux à gauche et 2 en haut. La moitié, soit 1 à gauche et 1 en haut, mène de L au point $(3;3)$.

Nature. Rappel de 1AC : si les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu, ce quadrilatère est un parallélogramme. C'est le cas ici pour $[KM]$ et $[LN]$.

Conclusion. Les deux milieux sont le point $(3;3)$, et $KLMN$ est un parallélogramme.

2.

Quelle est l'image de N par la translation qui transforme K en L ?

INDICE

Début : dans le parallélogramme $KLMN$, cherche le vecteur égal à $\overrightarrow{KL}$ qui part de N.

CORRIGÉ

Égalité. Dans le parallélogramme $KLMN$, les côtés $[KL]$ et $[NM]$ sont opposés. On a donc :

$$\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{NM}$$

Conclusion. D'après la définition de la translation, la translation qui transforme K en L transforme N en M. L'image de N est le point M.

3.

Nomme d'une autre façon la translation qui transforme L en M, à l'aide des points K et N.

INDICE

Outil : les côtés opposés $[LM]$ et $[KN]$ donnent une égalité de vecteurs.

CORRIGÉ

Déplacements. De L à M : 1 carreau vers la droite et 4 vers le haut. De K à N : le même déplacement. Donc :

$$\overrightarrow{LM} = \overrightarrow{KN}$$

Conclusion. La translation qui transforme L en M est aussi la translation qui transforme K en N.

4.

Quelle est l'image de M par la translation qui transforme L en K ?

INDICE

Point délicat : le déplacement va maintenant de L vers K : 3 carreaux vers la gauche et 2 vers le bas.

CORRIGÉ

Déplacement. De L à K, on fait 3 carreaux vers la gauche et 2 vers le bas.

Calcul. À partir de $M(5;6)$: $5-3=2$ et $6-2=4$. On arrive au point $(2;4)$, c'est-à-dire en N.

Contrôle. On retrouve l'égalité $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{LK}$ du parallélogramme $KLMN$.

Conclusion. L'image de M par la translation qui transforme L en K est le point N.

Exercice 5

La valise sur le tapis roulant

Dans un aéroport, une valise avance sur un tapis roulant droit, sans tourner. Sur un schéma quadrillé où un carreau mesure 1 cm, sa poignée est le segment $[PQ]$, avec $P(1;2)$ et $Q(4;6)$. Le tapis déplace la valise de 8 carreaux vers la droite.



La poignée [PQ] de la valise sur le schéma, avant son passage sur le tapis.

1.

Donne les coordonnées des images P' et Q' de P et Q. Quelle est l'image du segment $[PQ]$?

INDICE

Outil : l'image d'un segment est le segment qui joint les images de ses extrémités.

CORRIGÉ

Images. Le tapis déplace la valise de 8 carreaux vers la droite, sans montée. On ajoute 8 à la première coordonnée : $P'(9;2)$ et $Q'(12;6)$.

Segment. D'après l'image d'un segment par une translation, l'image de $[PQ]$ est le segment qui joint P' et Q'.

Conclusion. Les images sont $P'(9;2)$ et $Q'(12;6)$, et l'image du segment $[PQ]$ est le segment $[P'Q']$.

2.

On place $H(4;2)$. Calcule la longueur PQ.

INDICE

Début : le triangle PHQ est rectangle en H, car $[PH]$ suit une ligne du quadrillage et $[HQ]$ une colonne. **Ensuite :** applique le théorème de Pythagore.

CORRIGÉ

Triangle rectangle. Le segment $[PH]$ suit une ligne du quadrillage et $[HQ]$ une colonne : le triangle PHQ est rectangle en H. On lit $PH = 3$ cm et $HQ = 4$ cm.

Pythagore. Rappel du premier semestre : le théorème de Pythagore. Dans le triangle PHQ rectangle en H :

$$\begin{aligned} PQ^2 &= 3^2 + 4^2 \\ &= 9 + 16 = 25 \end{aligned}$$

Conclusion. La longueur PQ est le nombre positif dont le carré vaut 25 : $PQ = 5$ cm.

3.

Sans nouveau calcul, donne la longueur $P'Q'$. Justifie.

INDICE

Outil : cite la propriété de conservation qui convient.

CORRIGÉ

Justification. Les points P' et Q' sont les images de P et Q par la translation du tapis. D'après la conservation des distances, $P'Q' = PQ$.

Conclusion. Sans nouveau calcul, la poignée mesure toujours $P'Q' = 5$ cm.

Exercice 6

Le jeton rond d'un jeu de société

Sur un quadrillage, un carreau mesure 1 cm. Un jeton rond a pour bord le cercle $(\mathcal{C})$ de centre $G(3;2)$ et de rayon 2 cm. On fait glisser le jeton par la translation qui transforme G en $H(8;4)$.

1.

Quelle est l'image du centre G ? Décris le déplacement du jeton.

INDICE

Outil : relis la définition de la translation qui transforme G en H.

CORRIGÉ

Centre. Par définition, la translation qui transforme G en H envoie G sur H. L'image du centre est donc $H(8;4)$.

Déplacement. De $G(3;2)$ à $H(8;4)$, la première coordonnée gagne 5 et la seconde gagne 2.

Conclusion. Le centre G a pour image H. Le jeton glisse de 5 carreaux vers la droite et de 2 vers le haut.

2.

Décris l'image $(\mathcal{C}')$ du cercle $(\mathcal{C})$.

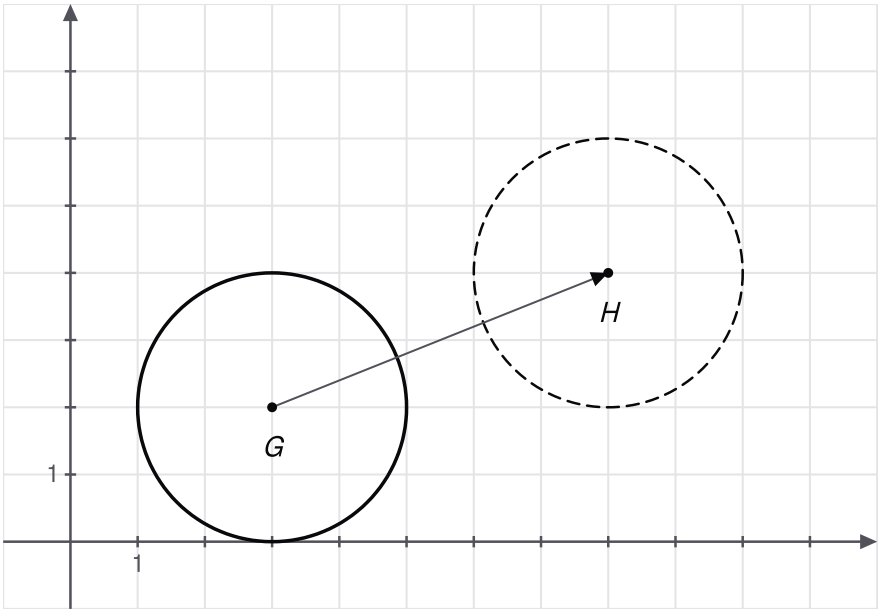
INDICE

Outil : l'image d'un cercle a pour centre l'image du centre.

CORRIGÉ

Image. D'après l'image d'un cercle par une translation, $(\mathcal{C}')$ a pour centre l'image H du centre G, et le même rayon que $(\mathcal{C})$.

Conclusion. Le cercle $(\mathcal{C}')$ a pour centre $H(8;4)$ et pour rayon 2 cm.



Le jeton glisse de G vers H : son bord devient le cercle de centre H, de même rayon 2 cm.

3.

Le point $K(3;4)$ est-il sur $(\mathcal{C})$? Donne son image K' et vérifie qu'elle est sur $(\mathcal{C}')$.

INDICE

Début : K et G sont sur la même colonne du quadrillage. **Ensuite :** fais le déplacement de la question 1.

CORRIGÉ

Point K. Les points $G(3;2)$ et $K(3;4)$ sont sur une même colonne, à 2 carreaux l'un de l'autre : $GK = 2$ cm. C'est le rayon, donc K est sur $(\mathcal{C})$.

Image. On fait le déplacement de la question 1 à partir de $K(3;4)$: on obtient $K'(8;6)$.

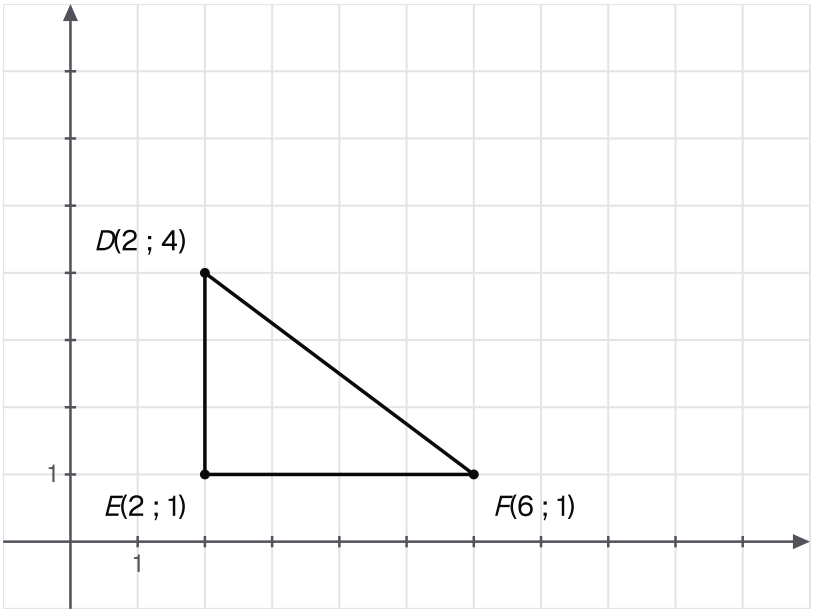
Vérification. Les points $H(8;4)$ et $K'(8;6)$ sont eux aussi sur une même colonne : $HK' = 2$ cm. Ce résultat est celui qu'annonce la conservation des distances.

Conclusion. Le point K est sur $(\mathcal{C})$, et son image $K'(8;6)$ est bien sur $(\mathcal{C}')$.

Exercice 7

L'image d'un angle

Sur un quadrillage, on place $E(2;1)$, $D(2;4)$ et $F(6;1)$. On considère la translation qui déplace chaque point de 3 carreaux vers la droite et de 2 vers le haut.



Le triangle DEF de l'exercice : [ED] suit une colonne du quadrillage, [EF] une ligne.

1.

Donne les coordonnées des images E', D' et F' des points E, D et F.

INDICE

Outil : ajoute 3 à la première coordonnée et 2 à la seconde.

CORRIGÉ

Calcul. On ajoute 3 à la première coordonnée et 2 à la seconde :

- pour E : $2+3=5$ et $1+2=3$;
- pour D : $2+3=5$ et $4+2=6$;
- pour F : $6+3=9$ et $1+2=3$.

Conclusion. Les images sont $E'(5;3)$, $D'(5;6)$ et $F'(9;3)$.

2.

Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{DEF}$? Déduis-en celle de $\widehat{D'E'F'}$.

INDICE

Début : $[ED]$ suit une colonne et $[EF]$ une ligne du quadrillage. **Ensuite :** cite la conservation qui convient.

CORRIGÉ

Angle de départ. Le côté $[ED)$ suit une colonne du quadrillage et le côté $[EF)$ une ligne. Ces deux côtés sont perpendiculaires : $\widehat{DEF} = 90°$.

Image. Les points D', E' et F' sont les images de D, E et F. D'après la conservation des mesures des angles :

$$\widehat{D'E'F'} = \widehat{DEF} = 90°$$

Conclusion. L'angle $\widehat{DEF}$ est droit, et l'angle $\widehat{D'E'F'}$ l'est aussi.

3.

Au rapporteur, on mesure $\widehat{EFD}$: environ $37°$. Donne la mesure de $\widehat{E'F'D'}$, puis l'image de la demi-droite $[ED)$.

INDICE

Outil : l'image de la demi-droite $[ED)$ a pour origine l'image de E.

CORRIGÉ

Angle. L'angle $\widehat{E'F'D'}$ est l'image de l'angle $\widehat{EFD}$. D'après la conservation des mesures des angles, il mesure lui aussi environ $37°$.

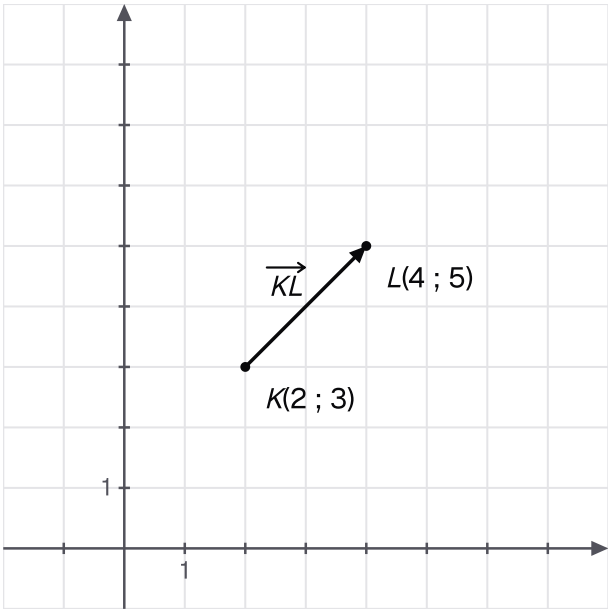
Demi-droite. D'après l'image d'une demi-droite, l'image de $[ED)$ a pour origine l'image E' de E, et elle passe par D'.

Conclusion. L'angle $\widehat{E'F'D'}$ mesure environ $37°$, et l'image de $[ED)$ est la demi-droite $[E'D')$.

Exercice 8

Placer des points avec un produit

Sur un quadrillage, on place $K(2;3)$ et $L(4;5)$. De K à L, on avance de 2 carreaux vers la droite et de 2 vers le haut.



Les points K et L et la flèche de K vers L, 2 carreaux à droite et 2 en haut.

1.

Place le point M tel que $\overrightarrow{KM} = 2\overrightarrow{KL}$. Donne ses coordonnées et compare KM à KL.

INDICE

Outil : $2 > 0$: le point M est sur la demi-droite $[KL)$, et le déplacement est doublé.

CORRIGÉ

Placement. Le nombre 2 est positif : M est sur la demi-droite $[KL)$. Le déplacement de K vers M est le double de celui de K vers L, soit 4 carreaux à droite et 4 en haut. Donc $M(6;7)$.

Longueur. D'après la définition du produit, la longueur KM est le double de KL : $KM = 2 \times KL$.

Conclusion. Le point M a pour coordonnées $(6;7)$, et KM vaut deux fois KL.

2.

Place le point N tel que $\overrightarrow{KN} = -\overrightarrow{KL}$. Donne ses coordonnées.

INDICE

Point délicat : le nombre -1 est négatif : le point K doit se trouver entre L et N.

CORRIGÉ

Position. Le nombre -1 est négatif : N est sur la droite (KL), et K est entre L et N.

Longueur. On a $KN = 1 \times KL$. Le déplacement de K vers N a la longueur de celui de K vers L, en sens contraire : 2 carreaux à gauche et 2 en bas.

Conclusion. À partir de $K(2;3)$, on obtient le point $N(0;1)$.

3.

Place P tel que $\overrightarrow{KP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{KL}$, puis Q tel que $\overrightarrow{KQ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{KL}$. Que représente P pour le segment $[KL]$?

INDICE

Début : la moitié du déplacement de K vers L est 1 carreau à droite et 1 en haut. **Ensuite :** pour Q, ajoute encore cette moitié à L.

CORRIGÉ

Point P. On fait la moitié du déplacement de K vers L : 1 carreau à droite et 1 en haut. Donc $P(3;4)$.

Point Q. Trois moitiés de ce déplacement font 3 carreaux à droite et 3 en haut. Donc $Q(5;6)$, et les points K, L, Q sont alignés.

Rôle de P. D'après la propriété du milieu, l'égalité $\overrightarrow{KP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{KL}$ signifie que P est le milieu de $[KL]$.

Conclusion. Le point P est le milieu de $[KL]$.