BURHAN

Translation et produit d'un vecteur par un réel

3ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/3ac/mathematiques/translation-et-vecteurs/cours

Chapitre	Semestre
Translation et produit d'un vecteur par un réel	Semestre 2

Faire glisser une figure

Fais glisser une porte coulissante, ou regarde la vitre d'une voiture qui descend. La porte avance sans tourner.

Chaque point de la porte fait le même **déplacement**, ou trajet : même direction, même sens, même longueur.

En géométrie, ce mouvement porte un nom. Tu vas l'étudier dans ce chapitre.

Devine : Une prédiction

Une porte coulissante glisse de 80 cm vers la droite. Qu'est-ce qui change pour la porte ?

A. Sa forme et sa taille.

Faux.

La porte ne se déforme pas : elle garde sa hauteur et sa largeur.

B. Sa position seulement.

Juste.

Juste : la porte change de place, rien d'autre.

C. Sa taille seulement.

Faux.

Mesure-la avant et après : tu trouves les mêmes longueurs.

D. Rien du tout.

Faux.

Elle n'est plus au même endroit : sa position a changé.

Correction

La porte ne se déforme pas. Sa hauteur, sa largeur et ses angles restent les mêmes.

Seule sa position change : chaque point de la porte avance de 80 cm vers la droite. C'est l'idée de la translation.

Dans ce chapitre, tu apprends à construire l'image d'un point par une translation. Tu découvres ce qu'une translation ne change pas. Tu traces les images des figures usuelles.

Tu fais connaissance avec le produit d'un vecteur par un **réel** : un nombre, positif ou négatif, comme 3, -2 ou $\frac{1}{2}$.

Pour finir, tu compares les trois transformations du collège.

Rappels de 2AC : les vecteurs

Direction, sens, longueur

Rappel de 2AC : un **vecteur** $\overrightarrow{AB}$ décrit un trajet, ou déplacement, de A vers B.

- Sa **direction** est celle de la droite (AB).
- Son **sens** va de A vers B.
- Sa **longueur** est la distance AB.

Deux vecteurs sont **égaux** quand direction, sens et longueur sont les mêmes pour les deux.

Devine : Des flèches sur un quadrillage

Sur un quadrillage, le vecteur $\overrightarrow{KL}$ va de $K(0;0)$ à $L(3;1)$: 3 carreaux vers la droite, 1 vers le haut. Lequel de ces vecteurs est égal à $\overrightarrow{KL}$?

A. $\overrightarrow{GH}$, avec $G(6;1)$ et $H(3;0)$

Faux.

De G à H, on va vers la gauche : le sens est contraire.

B. $\overrightarrow{UV}$, avec $U(1;4)$ et $V(4;6)$

Faux.

De U à V, on monte de 2 carreaux : la direction change.

C. $\overrightarrow{EF}$, avec $E(2;3)$ et $F(5;4)$

Juste.

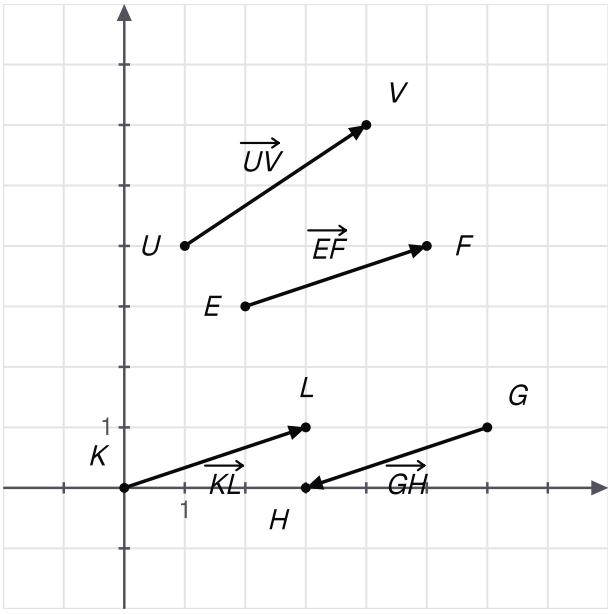
Juste : 3 carreaux vers la droite, 1 vers le haut, comme de K à L.

Correction

De E à F, on fait 3 carreaux vers la droite et 1 vers le haut, comme de K à L. Direction, sens et longueur sont les mêmes :

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{KL}$$

Le vecteur $\overrightarrow{GH}$ a le sens contraire. Le vecteur $\overrightarrow{UV}$ n'a pas la même direction.



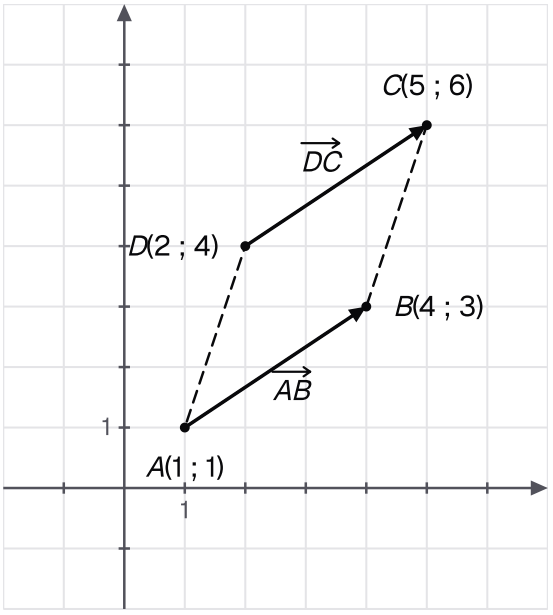
Quatre flèches sur le quadrillage : le vecteur KL et les trois vecteurs proposés, GH, UV et EF.

Égalité et parallélogramme

Rappel de 2AC : pour quatre points non alignés, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ veut dire que $ABCD$ est un **parallélogramme**.

Prends $A(1;1)$, $B(4;3)$, $C(5;6)$ et $D(2;4)$. De A à B : 3 carreaux vers la droite, 2 vers le haut. De D à C : le même trajet. Donc $ABCD$ est un parallélogramme.

Trace-le sur ton cahier : il te servira dans tout le chapitre.



Le parallélogramme ABCD, fil rouge du chapitre : AB et DC décrivent un seul et même déplacement.

Méthode : reconnaître deux vecteurs égaux

1. **Direction** : vérifie que les droites (AB) et (CD) sont parallèles ou confondues.
2. **Sens** : vérifie qu'on va dans le même sens de A vers B et de C vers D.
3. **Longueur** : compare AB et CD. Sur un quadrillage, compte les carreaux.
4. **Conclusion** : si les trois réponses sont oui, alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Attention : l'ordre des lettres

✗ « $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, donc $ABCD$ est un parallélogramme. »

✓ Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, le parallélogramme est $ABDC$: on lit A, B, puis D, C.

Dans notre parallélogramme $ABCD$, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ va vers la droite et $\overrightarrow{CD}$ vers la gauche. Ils ne sont pas égaux.

Écris toujours les lettres dans l'ordre du tour de la figure.

Vérifie : Lire un parallélogramme

On sait que $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$, et que les points E, F, G, H ne sont pas alignés. Quel quadrilatère est un parallélogramme ?

A. Le quadrilatère $EFHG$

Faux.
Tu as suivi l'ordre d'écriture de l'égalité, pas le tour de la figure.

B. Le quadrilatère $EFGH$

Juste.
Juste : l'égalité a la même forme que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ pour $ABCD$.

C. Le quadrilatère $EHFG$

Faux.
Dans cet ordre, $[EF]$ serait une diagonale, et non un côté.

Correction
L'égalité $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$ a la même forme que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

On remplace A par E, B par F, C par G et D par H. Le parallélogramme est donc $EFGH$.

Somme et relation de Chasles

Rappel de 2AC : pour tous points A, B, C, on a la **relation de Chasles** :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Faire le trajet de A à B, puis celui de B à C, revient à aller de A à C.

Dans $ABCD$: 3 carreaux à droite et 2 en haut, puis 1 à droite et 3 en haut. Au total, 4 carreaux à droite et 5 en haut : c'est le trajet de A à C.

Exemple : des vecteurs égaux dans le parallélogramme

Dans le parallélogramme $ABCD$:

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$: 3 carreaux à droite, 2 en haut ;
- $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$: 1 carreau à droite, 3 en haut.

On remplace $\overrightarrow{AD}$ par $\overrightarrow{BC}$, puis on conclut d'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

En revanche, $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$: ces deux vecteurs ont des sens contraires.

À toi : Deux égalités

Dans le parallélogramme $ABCD$, simplifie $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}$. Dis ensuite si $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$.

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Pour la somme, regarde la lettre placée au milieu.
Indice 2
Compte le trajet de B à A, puis celui de C à D.
Indice 3
Point délicat : le sens compte. Lis chaque vecteur de sa première lettre vers sa seconde.

Réponse
La somme. D'après la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB}$$

L'égalité. De B à A, on va 3 carreaux à gauche et 2 en bas. De C à D, on fait le même trajet. Direction, sens et longueur sont les mêmes.

Conclusion. La somme vaut $\overrightarrow{DB}$, et $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$.

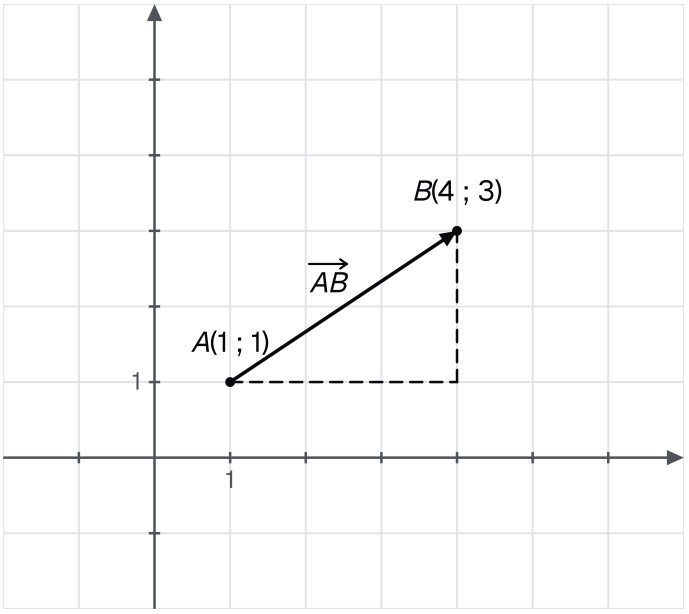
Image d'un point par une translation

Glisser comme A va en B

Reprends le quadrillage avec $A(1;1)$ et $B(4;3)$. Le côté d'un carreau mesure 1 cm.

Pour aller de A à B, on fait 3 carreaux vers la droite et 2 vers le haut.

Imagine que tout le plan glisse, comme la porte coulissante. Chaque point fait alors ce même trajet.



Le trajet de A vers B, décomposé en 3 carreaux vers la droite puis 2 vers le haut.

Devine : Où arrive le point M ?

Le point $M(2;5)$ fait le même trajet que de A à B. Où arrive-t-il ?

A. Au point $(4;8)$

Faux.

Tu as échangé les deux déplacements : 2 vers la droite et 3 vers le haut.

B. Au point $(-1;3)$

Faux.

Tu es allé vers la gauche et vers le bas : c'est le trajet de B vers A.

C. Au point $(6;8)$

Faux.

Tu as ajouté les nombres qui repèrent B. C'est le trajet qui compte.

D. Au point $(5;7)$

Juste.

Juste : 3 carreaux vers la droite, puis 2 vers le haut.

Correction

On part de $M(2;5)$. On avance de 3 carreaux vers la droite : on arrive en $(5;5)$.

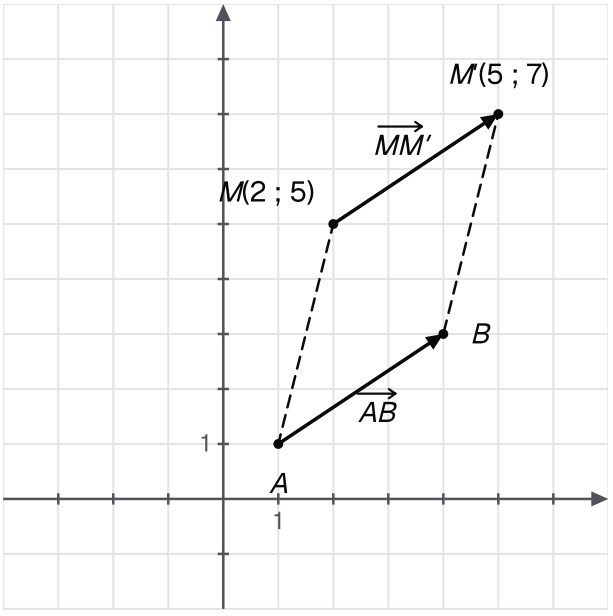
> On monte de 2 carreaux : on arrive en $(5;7)$. On note ce point M'.

Ce glissement de tout le plan s'appelle une **translation**. Le point d'arrivée M' s'appelle l'**image** du point M.

Le trajet de M à M' est celui de A à B. En vecteurs, on écrit :

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$$

Voici la définition exacte.



L'image M' du point M : la flèche de M vers M' reproduit exactement le trajet de A vers B.

La définition

Définition : Translation qui transforme A en B

Soit A et B deux points du plan. La **translation qui transforme A en B** associe à chaque point M du plan le point M' tel que :

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}.$$

Le point M' est l'**image** du point M par cette translation. Si on la nomme t, on écrit $t(M) = M'$. En particulier, $t(A) = B$.

Si le point M n'est pas sur la droite (AB), le quadrilatère $ABM'M$ est un parallélogramme. Si M est sur la droite (AB), le point M' est aussi sur cette droite.

En clair. Pour trouver l'image d'un point, fais-lui faire le trajet de A à B. Le point A a pour image B.

Si M n'est pas sur la droite (AB), les quatre points A, B, M', M forment un parallélogramme, dans cet ordre.

Exemple : des images sur le quadrillage

On note t la translation qui transforme A en B. On a donc $t(A) = B$.

- $P(0;4)$ a pour image $P'(3;6)$: 3 carreaux à droite, 2 en haut.
- $R(5;0)$ a pour image $R'(8;2)$.
- $D(2;4)$ a pour image $C(5;6)$: $t(D) = C$. C'est normal, car $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ dans le parallélogramme $ABCD$.

Contrôle sur ta figure : $ABP'P$ est un parallélogramme. Ses diagonales $[AP']$ et $[BP]$ ont le même milieu.

Construire une image

Méthode : construire l'image d'un point

1. **Sur un quadrillage** : compte le trajet de A à B. Refais-le en partant de M.
2. **Au compas**, si M n'est pas sur (AB) : trace l'arc de centre M et de rayon AB, puis l'arc de centre B et de rayon AM.
3. **Le bon point** : garde le point commun aux arcs qui fait de $ABM'M$ un parallélogramme non croisé. Un quadrilatère est **croisé** quand deux de ses côtés se croisent.
4. **Un point de la droite** : si M est sur (AB), reporte la longueur AB sur cette droite à partir de M, dans le sens de A vers B.
5. **Contrôle** : $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont même direction, même sens et même longueur.

Vérifie : Le second arc

Tu construis au compas l'image de M par la translation qui transforme A en B. Tu as tracé l'arc de centre M et de rayon AB. Quel arc traces-tu ensuite ?

A. L'arc de centre B et de rayon AM

Juste.
Juste : dans $ABM'M$, le côté $[BM']$ est opposé au côté $[AM]$.

B. L'arc de centre A et de rayon AM

Faux.
Cet arc passe par M lui-même : il ne donne pas M'.

C. L'arc de centre B et de rayon AB

Faux.

Le côté opposé à $[BM']$ est $[AM]$: le rayon est donc AM.

Correction

Rappel de 1AC : dans un parallélogramme, les côtés opposés ont la même longueur.

- Dans $ABM'M$, le côté $[MM']$ est opposé à $[AB]$: d'où l'arc de centre M et de rayon AB.
- Le côté $[BM']$ est opposé à $[AM]$: d'où l'arc de centre B et de rayon AM.

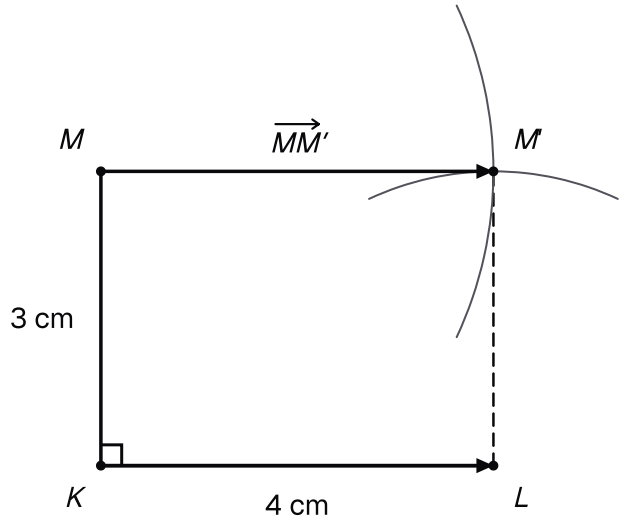
Exemple : une construction au compas

Construis l'image de M par la translation qui transforme K en L. Sur ta feuille, $KL = 4$ cm, $KM = 3$ cm, et l'angle $\widehat{LKM}$ est droit.

1. Trace l'arc de centre M et de rayon 4 cm.
2. Trace l'arc de centre L et de rayon 3 cm.
3. Les arcs se coupent en deux points. Garde celui qui fait de $KLM'M$ un parallélogramme non croisé : c'est M'.

Le quadrilatère $KLM'M$ n'est pas croisé : ses côtés ne se croisent pas. Ses côtés opposés ont deux à deux la même longueur.

C'est donc un parallélogramme (rappel de 1AC). Ici, c'est même un rectangle.



Construction au compas de M' : un arc de centre M et de rayon 4 cm, un arc de centre L et de rayon 3 cm.

Exemple : un point de la droite (AB)

Le point $N(-2;-1)$ est sur la droite (AB) : de N à A, on fait 3 carreaux à droite et 2 en haut. Son image par t est donc A :

$$t(N) = A$$

Les points N, A et B sont alignés. Ici, aucun parallélogramme : tous ces points sont sur une même droite.

La définition le dit : si M est sur (AB), son image M' est aussi sur (AB).

Un piège, puis à toi

Attention : le sens de la translation

✗ « La translation qui transforme B en A envoie $M(2;5)$ en $(5;7)$. »

✓ Cette translation fait le trajet de B vers A : 3 carreaux vers la gauche et 2 vers le bas. L'image de M est donc $(-1;3)$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ ont la même direction et la même longueur, mais des sens contraires.

Avant de compter, repère le point de départ et le point d'arrivée.

À toi : Deux images

Place $E(3;-2)$. Construis son image E' par la translation t qui transforme A en B.

Construis ensuite l'image F de E par la translation qui transforme B en A.

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Compte d'abord le trajet de A à B, en carreaux.
Indice 2
Pour E', fais ce trajet à partir de E.
Indice 3
Point délicat : la seconde translation part de B et arrive en A. Le trajet change de sens.

Réponse
Image par t. De A à B : 3 carreaux vers la droite, 2 vers le haut. En partant de $E(3;-2)$, on arrive en $E'(6;0)$.

Image par l'autre translation. De B à A : 3 carreaux vers la gauche, 2 vers le bas. En partant de E, on arrive en $F(0;-4)$.

Conclusion. On obtient $E'(6;0)$ et $F(0;-4)$. Ces deux points sont différents : le sens de la translation compte.

Reconnaître une image, reconnaître une translation

Deux couples qui bougent pareil

Sur le quadrillage, place $X(2;0)$ et $Y(5;2)$. De X à Y, on fait 3 carreaux à droite et 2 en haut. C'est le trajet de A à B.

Donc $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{AB}$, et Y est l'image de X par la translation t.

Pour reconnaître une image, tu compares deux trajets.

Devine : Une image ou non ?

Le point $V(7;2)$ est-il l'image de $W(4;1)$ par la translation t qui transforme A en B ?

A. Oui, car V est à droite de W et plus haut.

Faux.
Ce n'est pas assez précis : il faut compter les carreaux.

B. Non, car de W à V on ne monte que d'un carreau.

Juste.
Juste : de W à V, 3 carreaux à droite, mais 1 seul en haut.

C. Oui, car de W à V on va 3 carreaux à droite.

Faux.
Le déplacement vers la droite est bon, mais il faut aussi monter de 2 carreaux.

Correction
De $W(4;1)$ à $V(7;2)$: 3 carreaux à droite, 1 en haut. De A à B : 3 carreaux à droite, 2 en haut.

Les trajets diffèrent, donc $\overrightarrow{WV} \neq \overrightarrow{AB}$.

Conclusion. Le point V n'est pas l'image de W. L'image de W est le point $(7;3)$.

La méthode

Méthode : reconnaître une image, nommer une translation

1. **Une image** : pour savoir si M' est l'image de M par la translation qui transforme A en B, vérifie que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$. Sur un quadrillage, compare les deux trajets.
2. **Un autre nom** : si $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{MM'}$, la translation qui transforme M en M' est aussi celle qui transforme P en Q.

3. **L'ordre** : écris d'abord le point de départ, puis le point d'arrivée.

Exemple : dire si un point est l'image d'un autre

Le point $U'(2;2)$ est-il l'image de $U(-1;0)$ par la translation t ?

De U à U' : 3 carreaux à droite, 2 en haut. C'est le trajet de A à B. Donc :

$$\overrightarrow{UU'} = \overrightarrow{AB}$$

D'après la définition de la translation, U' est l'image de U par t : $t(U) = U'$.

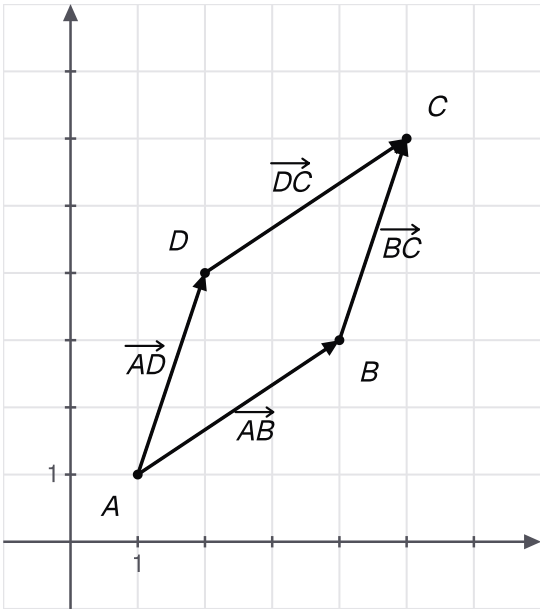
Contrôle : $ABU'U$ est un parallélogramme.

Exemple : nommer une translation dans le parallélogramme

Dans le parallélogramme $ABCD$, on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Donc :

- la translation qui transforme A en B transforme aussi D en C ;
- la translation qui transforme A en D transforme aussi B en C.

Une même translation peut donc se nommer de plusieurs façons : avec A et B, ou avec D et C.



Deux paires de flèches égales dans ABCD : AB et DC d'un côté, AD et BC de l'autre.

Plusieurs points, une seule translation

Exemple : les images de plusieurs points

Prends la translation qui transforme B en C. De $B(4;3)$ à $C(5;6)$: 1 carreau à droite, 3 en haut. Par cette translation :

- l'image de $A(1;1)$ est $(2;4)$, c'est le point D ;
- l'image de $D(2;4)$ est le point $(3;7)$;
- l'image de $C(5;6)$ est le point $(6;9)$.

Chaque point fait le même trajet : 1 carreau à droite, 3 en haut.

Vérifie : Quelle translation ?

Dans le parallélogramme $ABCD$, quelle translation transforme C en D ?

A. La translation qui transforme A en B

Faux.
Elle va vers la droite : elle transforme D en C, pas C en D.

B. La translation qui transforme A en D

Faux.
Le trajet de A à D est celui d'un autre côté : 1 carreau à droite, 3 en haut.

C. La translation qui transforme B en A

Juste.
Juste : $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$, 3 carreaux à gauche et 2 en bas.

D. La translation qui transforme D en C

Faux.
Tu as inversé le départ et l'arrivée.

Correction
De $C(5;6)$ à $D(2;4)$: 3 carreaux à gauche, 2 en bas. De B à A : le même trajet. Donc :

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$$

La translation qui transforme C en D est celle qui transforme B en A.

À toi : Reconnaître une translation

Place $H(0;2)$, $J(2;3)$, $K(6;0)$ et $L(8;1)$. La translation qui transforme H en J transforme-t-elle K en L ? Transforme-t-elle L en K ?

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Compare le trajet de H à J avec celui de K à L.
Indice 2

De H à J : 2 carreaux à droite, 1 en haut. Compte de même de K à L.

Indice 3

Point délicat : de L à K, le trajet a la même longueur, mais il va dans l'autre sens.

Réponse

Le point K. De H à J : 2 carreaux à droite, 1 en haut. De K à L : le même trajet. Donc $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{HJ}$.

Le point L. De L à K, on va 2 carreaux à gauche et 1 en bas. Le sens est contraire. Cette translation transforme L en $(10; 2)$.

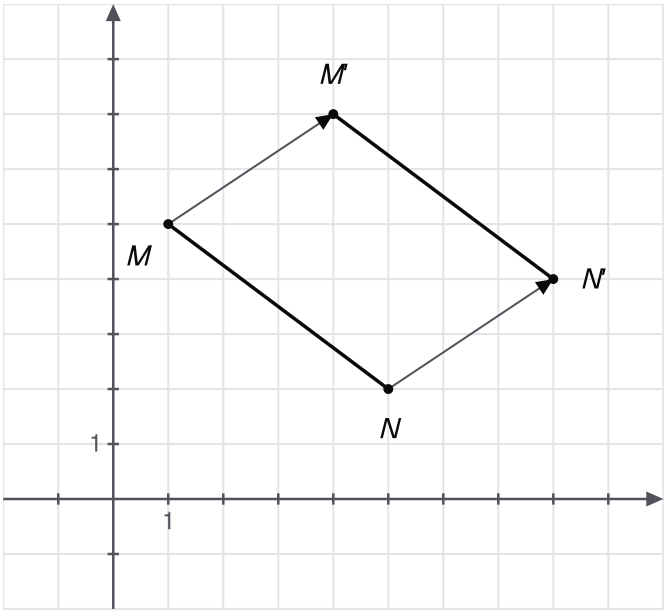
Conclusion. La translation qui transforme H en J transforme K en L. Elle ne transforme pas L en K.

Ce que conserve une translation

Mesurer avant et après

Sur le quadrillage, place $M(1; 5)$ et $N(5; 2)$. Construis leurs images par la translation t qui transforme A en B.

Tu obtiens $M'(4; 7)$ et $N'(8; 4)$. Trace les segments $[MN]$ et $[M'N']$.



Le segment [MN] et son image [M'N'] par la translation t qui transforme A en B.

Devine : Une mesure au compas

Prends l'écartement MN au compas. Reporte-le sur le segment $[M'N']$, en partant de M'. Que constates-tu ?

A. Les deux segments ont la même longueur.

Juste.

Juste : $MN = M'N' = 5$ cm.

B. Le segment $[M'N']$ est plus long.

Faux.

Le compas montre le contraire : l'écartement arrive exactement en N'.

C. Le segment $[M'N']$ est plus court.

Faux.

La translation ne rétrécit pas la figure : elle la fait glisser.

D. Cela dépend de la position de M.

Faux.

Essaie avec d'autres points : tu trouves chaque fois la même longueur.

Correction

L'écartement du compas va exactement de M' à N' : $M'N' = MN$.

On peut aussi calculer. De M à N : 4 carreaux à droite, 3 en bas. Ces deux déplacements forment un angle droit.

Rappel du premier semestre : d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$\begin{aligned} MN^2 &= 4^2 + 3^2 \\ &= 25 \end{aligned}$$

Donc $MN = 5$ cm.

De M' à N', c'est le même trajet : $M'N' = 5$ cm, et même $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$.

Les distances sont conservées

Propriété : Translation et égalité de vecteurs

Soit t une translation. Si t transforme le point M en M' et le point N en N', alors :

$$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}.$$

En particulier, $M'N' = MN$: une translation **conserve les distances**.

Remarque : Un résultat admis

Ce résultat est admis. Tu l'as observé au compas, puis vérifié par un calcul sur un exemple. Tu peux l'utiliser dans une justification, en le nommant : « d'après la conservation des distances ».

Exemple : la longueur d'une image

Une translation transforme P en P' et Q en Q'. On sait que $PQ = 6{,}5$ cm.

D'après la conservation des distances, $P'Q' = 6{,}5$ cm.

On a même $\overrightarrow{P'Q'} = \overrightarrow{PQ}$: ces vecteurs ont une direction commune, un sens commun et une longueur commune.

Angles, alignement, parallélisme

Devine : Un angle et son image

Place $S(2;2)$, $R(5;5)$ et $T(6;2)$. L'angle $\widehat{RST}$ mesure $45°$.

Construis les images R', S' et T' par la translation t. Mesure l'angle $\widehat{R'S'T'}$ au rapporteur. Que trouves-tu ?

A. $90°$

Faux.

L'angle ne s'ouvre pas : la figure glisse sans se déformer.

B. $135°$

Faux.

Vérifie au rapporteur : l'angle image est aigu, comme l'angle de départ.

C. $45°$

Juste.

Juste : la mesure de l'angle ne change pas.

D. Une mesure qui dépend de la translation

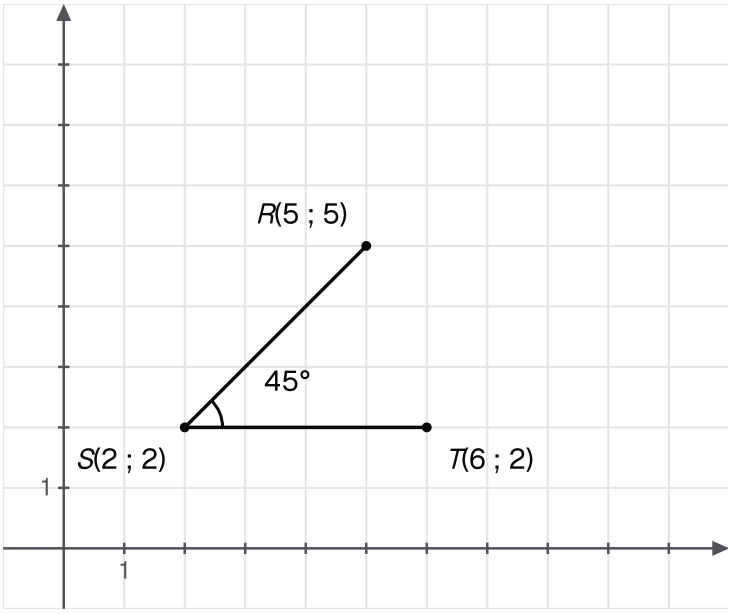
Faux.

Essaie une autre translation : tu retrouves la même mesure.

Correction

Tu obtiens $S'(5;4)$, $R'(8;7)$ et $T'(9;4)$.

Le rapporteur donne $\widehat{R'S'T'} = 45°$, comme $\widehat{RST}$. La figure a glissé sans tourner et sans se déformer.



L'angle de sommet S formé par les côtés [SR) et [ST), qui mesure 45 degrés.

Devine : Trois points alignés

Place $F(0;0)$, $G(3;1)$ et $H(6;2)$: ces trois points sont alignés.

Construis leurs images F', G' et H' par la translation t. Trace les droites (FH) et $(F'H')$. Que constates-tu ?

A. Les images ne sont pas alignées.

Faux.
De F' à G', puis de G' à H', compte les carreaux : c'est le même trajet.

B. Les images sont alignées, et $(F'H')$ coupe (FH).

Faux.
Les deux droites ont la même direction : elles ne se coupent pas.

C. Les images sont alignées, sur la droite (FH).

Faux.
De F à F', on fait 3 carreaux à droite et 2 en haut. Ce n'est pas la direction de (FH).

D. Les images sont alignées, et $(F'H') \parallel (FH)$.

Juste.
Juste : la figure a glissé sans tourner.

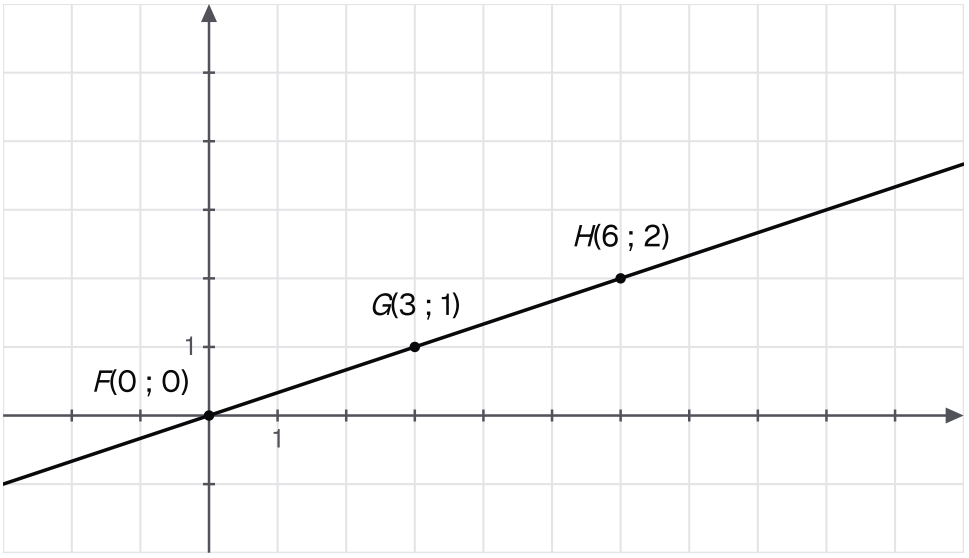
Correction

Alignement. Tu obtiens $F'(3;2)$, $G'(6;3)$ et $H'(9;4)$. De F' à G', puis de G' à H' : 3 carreaux à droite et 1 en haut. Les images sont alignées.

Direction. De F' à H' : 6 à droite et 2 en haut, comme de F à H. Les deux droites ont la même direction.

Droites distinctes. De F à F' : 3 à droite et 2 en haut, une autre direction que de F à G. Donc F' n'est pas sur (FH).

Conclusion. Les images sont alignées, et les droites (FH) et $(F'H')$ sont parallèles.



Trois points alignés F, G et H sur une même droite, avant toute translation.

Propriété : Ce que conserve une translation

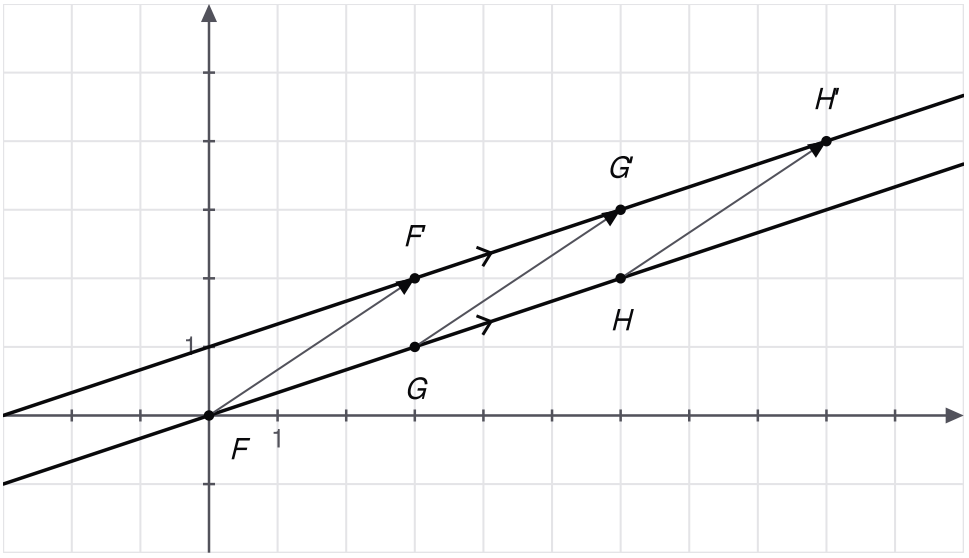
Une translation conserve :

- les **distances** : l'image d'un segment est un segment de même longueur ;
- l'**alignement** : les images de trois points alignés sont trois points alignés ;
- les **mesures des angles** : l'image d'un angle est un angle de même mesure ;
- le **parallélisme** : les images de deux droites parallèles sont deux droites parallèles ;
- les **aires** : l'image d'une figure est une figure de même aire.

Remarque : Un résultat admis

Ce résultat est admis. Tu as observé les distances, un angle, l'alignement et le parallélisme. Les aires sont conservées elles aussi.

Dans une justification, nomme la conservation que tu utilises : distances, alignement, angles, parallélisme ou aires.



Après la translation t, les images F', G' et H' restent alignées, sur une droite parallèle à (FH).

Exemple : l'alignement est conservé

Les points $U(0;3)$, $V(2;4)$ et $W(4;5)$ sont alignés : de U à V, puis de V à W, on fait 2 carreaux à droite et 1 en haut.

Leurs images par t sont $U'(3;5)$, $V'(5;6)$ et $W'(7;7)$.

D'après la conservation de l'alignement, U', V' et W' sont alignés. Vérifie-le à la règle sur ta figure.

Angles et aires, puis à toi

Exemple : un angle et une aire

Une translation transforme le triangle XYZ en $X'Y'Z'$. On mesure $\widehat{XYZ} = 35°$, et l'aire de XYZ vaut 12 cm².

- D'après la conservation des mesures des angles, $\widehat{X'Y'Z'} = 35°$.
- D'après la conservation des aires, l'aire de $X'Y'Z'$ vaut 12 cm².

À toi : Ce qui ne change pas

Une translation transforme K en K', L en L' et J en J'. On sait que $KL = 4$ cm et $\widehat{KLJ} = 62°$. La droite (KJ) est parallèle à une droite (d), dont l'image est (d').

Donne $K'L'$ et $\widehat{K'L'J'}$. Que dire des droites $(K'J')$ et (d') ?

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Traite les questions une par une : la longueur, puis l'angle, puis les droites.

Indice 2

Pour chaque réponse, demande-toi quelle propriété de conservation s'applique.

Indice 3

Point délicat : les droites (KJ) et (d) sont parallèles. Demande-toi ce que devient cette relation par la translation.

Réponse

Longueur. D'après la conservation des distances, $K'L' = KL = 4$ cm.

Angle. D'après la conservation des mesures des angles :

$$\widehat{K'L'J'} = \widehat{KLJ} = 62^\circ$$

Droites. Les droites (KJ) et (d) sont parallèles. D'après la conservation du parallélisme, leurs images $(K'J')$ et (d') sont parallèles.

Conclusion. On a $K'L' = 4$ cm et $\widehat{K'L'J'} = 62^\circ$, et les droites $(K'J')$ et (d') sont parallèles.

Images des figures usuelles

Deux points suffisent

Pour tracer l'image d'une figure, tu n'as pas besoin de déplacer tous ses points.

Une translation conserve l'alignement et les distances. Pour un segment, il suffit donc de construire les images de ses deux extrémités, puis de les relier.

Devine : Une droite et son image

Place $P(0;1)$ et $Q(2;5)$, puis leurs images P' et Q' par la translation t. Trace les droites (PQ) et $(P'Q')$. Comment sont-elles ?

A. Perpendiculaires

Faux.

Une translation ne fait pas tourner la droite.

B. Sécantes en P

Faux.

Les deux droites ont la même direction : elles ne se coupent pas.

C. Confondues

Faux.

De P à $P'(3;3)$: 3 carreaux à droite et 2 en haut. Ce n'est pas la direction de (PQ).

D. Parallèles

Juste.

Juste : de P' à Q', on fait 2 carreaux à droite et 4 en haut, comme de P à Q.

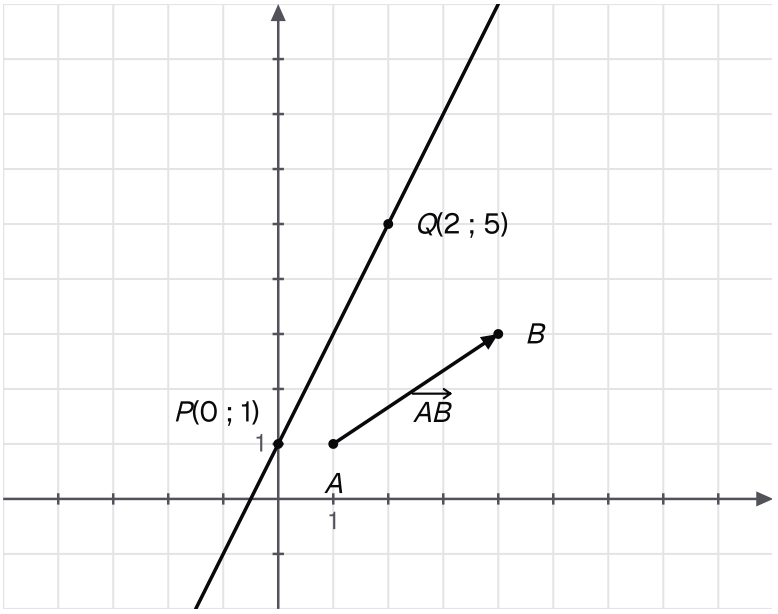
Correction

Les images sont $P'(3;3)$ et $Q'(5;7)$.

Direction. De P' à Q' : 2 carreaux à droite, 4 en haut, comme de P à Q. Donc $\overrightarrow{P'Q'} = \overrightarrow{PQ}$: les droites (PQ) et $(P'Q')$ ont la même direction.

Droites distinctes. De P à P' : 3 carreaux à droite, 2 en haut, une autre direction. Donc P' n'est pas sur (PQ).

Conclusion. Les droites (PQ) et $(P'Q')$ sont parallèles et distinctes.



La droite (PQ) et le vecteur AB de la translation t, avant de construire P' et Q'.

Devine : Un cercle et son image

Trace le cercle de centre $S(1;2)$ et de rayon 3 cm. Le point $V(4;2)$ est sur ce cercle.

Construis les images S' et V' par la translation t. Trace le cercle de centre S' et de rayon 3 cm. Où se trouve V' ?

A. Sur le cercle de centre S

Faux.

Le point V' a glissé avec le cercle : il a quitté le premier cercle.

B. Sur le cercle de centre S'

Juste.

Juste : $S'V' = SV = 3$ cm.

C. À l'intérieur du cercle de centre S'

Faux.

Compte les carreaux de S' à V' : il y en a 3, comme le rayon.

D. À l'extérieur des deux cercles

Faux.

Mesure $S'V'$ au compas : tu trouves le rayon, 3 cm.

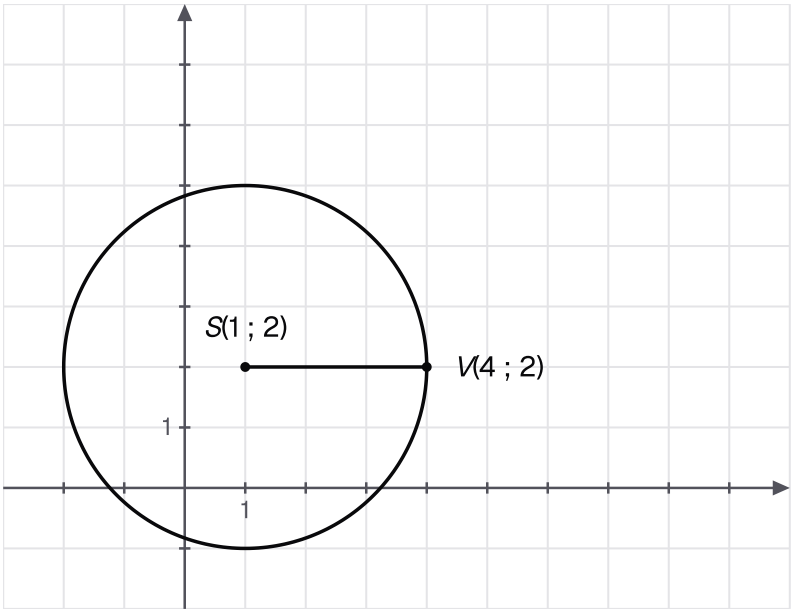
Correction

Tu obtiens $S'(4;4)$ et $V'(7;4)$. De S' à V' : 3 carreaux à droite, donc $S'V' = 3$ cm.

Le point V' est sur le cercle de centre S' et de rayon 3 cm.

Fais de même avec le point $W(1;5)$ du premier cercle : son image $W'(4;7)$ est aussi à 3 cm de S'.

Le cercle a glissé sans changer de rayon.



Le cercle de centre S et de rayon 3 cm, avec le point V posé sur ce cercle.

Les images des figures usuelles

Propriété : Images des figures usuelles

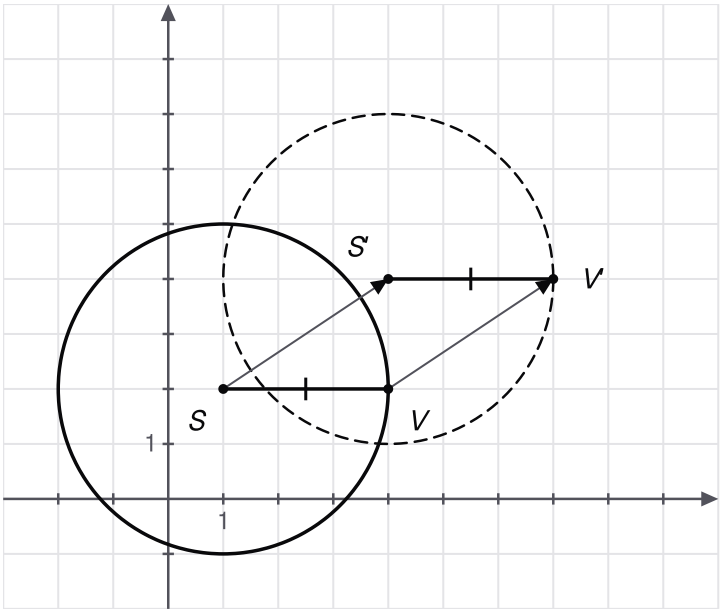
Soit t une translation, et A', B', O' les images respectives des points A, B, O par t, avec $A \neq B$.

- L'image du **segment** $[AB]$ est le segment $[A'B']$, et $A'B' = AB$.
- L'image de la **droite** (AB) est la droite $(A'B')$, parallèle à (AB) ou confondue avec elle.
- L'image de la **demi-droite** $[AB)$ est la demi-droite $[A'B')$.
- L'image d'un **angle** est un angle de même mesure : si C est un point distinct de B et C' son image, alors $\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC}$.
- L'image du **cercle** de centre O et de rayon r est le cercle de centre O' et de même rayon r.

Remarque : Un résultat admis

Ce résultat est admis. Tu as observé l'image d'une droite et celle d'un cercle. Tu as mesuré un angle et son image à la section précédente.

Tu cites ce résultat par son nom : « d'après la propriété des images des figures usuelles ».



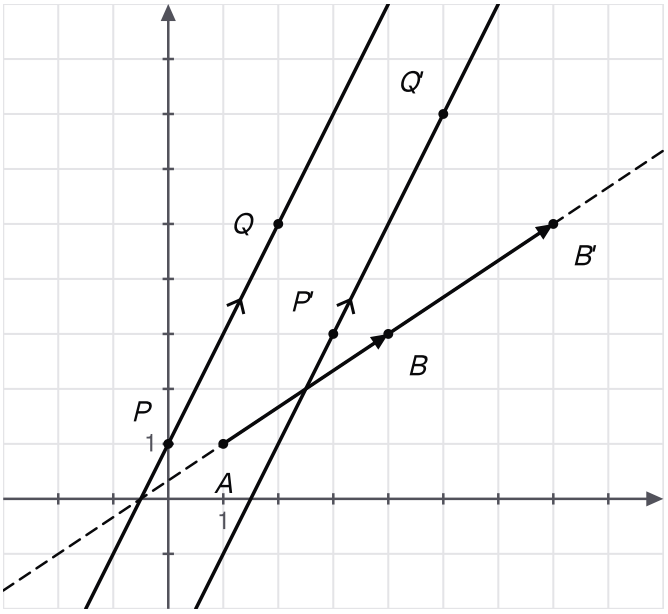
Le cercle glisse sans changer de rayon : son image a pour centre S' et passe par V'.

Exemple : un segment, deux droites

Avec la translation t qui transforme A en B :

- l'image du segment $[PQ]$ est le segment $[P'Q']$, de même longueur ;
- l'image de la droite (PQ) est la droite $(P'Q')$, parallèle à (PQ) ;
- l'image de la droite (AB) est la droite (AB) elle-même. En effet, A a pour image B, et B a pour image $B'(7;5)$, qui est sur (AB). Les deux droites sont confondues.

C'est pourquoi on dit « parallèle ou confondue ».



La droite (PQ) a une image parallèle, alors que la droite (AB) est sa propre image.

Construire l'image d'une figure

Méthode : construire l'image d'une figure

1. **Repère** les points qui suffisent : pour un segment, ses extrémités ; pour une droite, deux de ses points ; pour une demi-droite, son origine et un autre point ; pour un angle, son sommet et un point de chaque côté ; pour un cercle, son centre.
2. **Construis** les images de ces points, une par une.
3. **Relie**-les pour obtenir la figure image. Contrôle avec les propriétés : même longueur, droites parallèles ou confondues, même angle, même rayon.

Exemple : une demi-droite et un angle

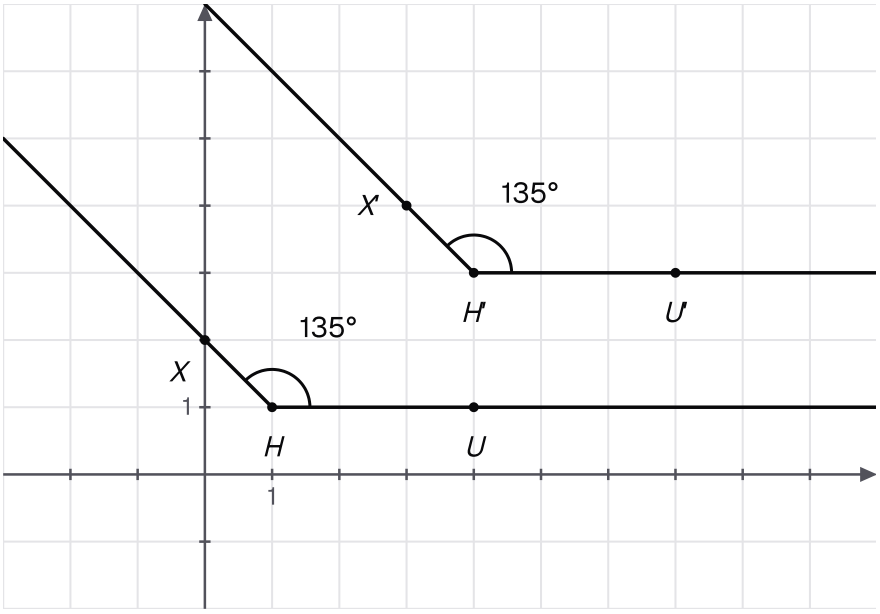
Place $H(1;1)$, $U(4;1)$ et $X(0;2)$, puis trace l'angle $\widehat{UHX}$ sur ton cahier. Au rapporteur, il mesure $135°$.

Les points utiles sont le sommet H, et un point sur chaque côté : U et X. Leurs images par t sont $H'(4;3)$, $U'(7;3)$ et $X'(3;4)$.

On trace les demi-droites $[H'U')$ et $[H'X')$. L'image de la demi-droite $[HU)$ est la demi-droite $[H'U')$.

D'après la propriété des images des figures usuelles :

$$\widehat{U'H'X'} = 135°$$



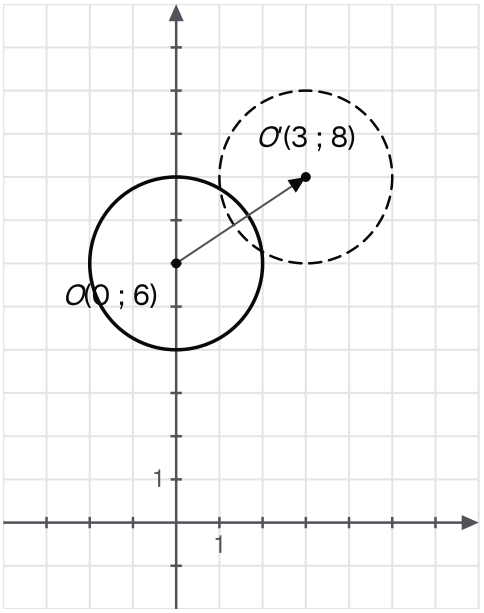
L'angle UHX et son image U'H'X' : même ouverture, 135 degrés, après le glissement.

Exemple : un cercle

Le cercle $\mathcal{C}$ a pour centre $O(0;6)$ et pour rayon 2 cm. Par la translation t, le centre O a pour image $O'(3;8)$.

D'après la propriété des images des figures usuelles, l'image de $\mathcal{C}$ est le cercle de centre O' et de rayon 2 cm.

Pour le tracer, le centre suffit : le rayon ne change pas.



Le cercle de centre O et son image de centre O', tous deux de rayon 2 cm.

Vérifie : L'image d'un cercle

Un cercle a pour centre $Z(6;1)$ et pour rayon 3 cm. Quelle est son image par la translation t ?

A. Le cercle de centre $(9;3)$ et de rayon 3 cm

Juste.

Juste : le centre fait le trajet, le rayon reste le même.

B. Le cercle de centre $(9;3)$ et de rayon 6 cm

Faux.

Une translation conserve les distances : le rayon ne double pas.

C. Le cercle de centre $(6;1)$ et de rayon 3 cm

Faux.

Le centre doit faire le trajet de A à B.

D. Le cercle de centre $(3;-1)$ et de rayon 3 cm

Faux.

Tu as fait le trajet de B vers A.

Correction

Le centre $Z(6;1)$ fait 3 carreaux à droite et 2 en haut : son image est $Z'(9;3)$.

D'après la propriété des images des figures usuelles, l'image du cercle est le cercle de centre Z' et de même rayon, 3 cm.

L'image d'un triangle

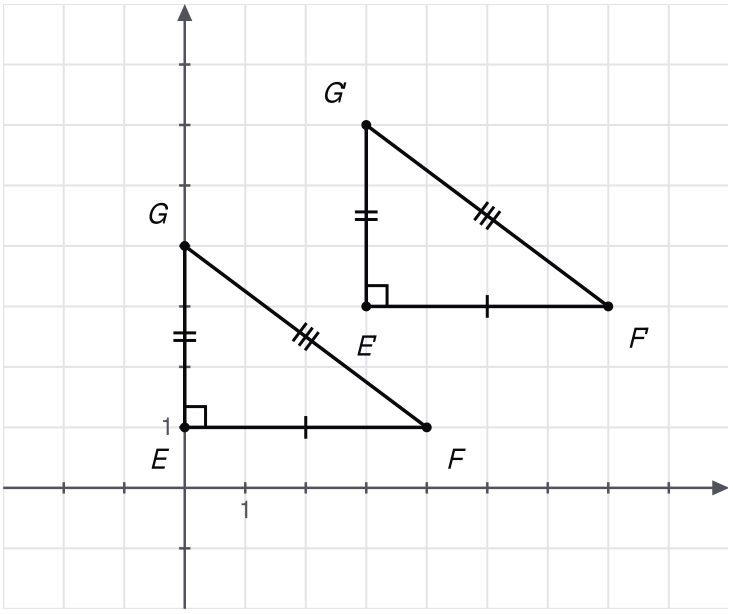
Exemple : un triangle et son image

Place $E(0;1)$, $F(4;1)$ et $G(0;4)$. Le triangle EFG est rectangle en E, avec $EF = 4$ cm et $EG = 3$ cm.

D'après le théorème de Pythagore (rappel du premier semestre), $FG = 5$ cm.

Ses images par t sont $E'(3;3)$, $F'(7;3)$ et $G'(3;6)$.

- D'après la conservation des distances, $E'F' = 4$ cm, $E'G' = 3$ cm et $F'G' = 5$ cm.
- D'après la conservation des mesures des angles, $E'F'G'$ est rectangle en E'.



Le triangle rectangle EFG et son image E'F'G' : côtés de même longueur, angle droit conservé.

Vérifie : L'aire du triangle image

Que vaut l'aire du triangle $E'F'G'$?

A. 12 cm²

Faux.

C'est l'aire du rectangle de côtés 4 cm et 3 cm : il faut diviser par 2.

B. 7 cm²

Faux.

Tu as ajouté 4 et 3 : une somme de longueurs n'est pas une aire.

C. 6 cm²

Juste.

Juste : la translation conserve les aires.

Correction

Le triangle EFG est rectangle en E. Son aire, en cm², vaut :

$$\frac{4 \times 3}{2} = 6$$

D'après la conservation des aires, l'aire de $E'F'G'$ vaut aussi 6 cm².

À toi, puis le coin examen régional

À toi : Un cercle et une droite

Le cercle $\mathcal{C}$ a pour centre $J(1;6)$ et pour rayon 2 cm. La droite (d) passe par J et par $L(1;2)$. On utilise la translation qui transforme J en $K(5;3)$.

Décris l'image de $\mathcal{C}$, puis celle de (d).

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Pour le cercle, le centre suffit. Pour la droite, deux points suffisent.
Indice 2
Le centre J a pour image K. De J à K : 4 carreaux à droite, 3 en bas. Fais le même trajet depuis L.
Indice 3
Point délicat : l'image d'une droite est parallèle ou confondue. Regarde si K est sur (d).

Réponse
Le cercle. Le centre J a pour image $K(5;3)$. D'après la propriété des images des figures usuelles, l'image de $\mathcal{C}$ est le cercle de centre K et de rayon 2 cm.

La droite. L'image de $L(1;2)$ est $L'(5;-1)$. L'image de (d) est donc la droite (KL'). Elle est parallèle à (d) : ce sont deux droites verticales.

Elles ne sont pas confondues : le point $K(5;3)$ est à 4 carreaux à droite de la droite verticale (d), donc il n'est pas sur (d).

Conclusion. L'image de $\mathcal{C}$ est le cercle de centre K et de rayon 2 cm. L'image de (d) est la droite (KL'), parallèle à (d) et distincte d'elle.

Remarque **: Coin examen régional : rédiger l'image d'un cercle**

Au niveau de l'examen régional, chaque construction se justifie par une propriété nommée.

Exemple de rédaction : « La translation t transforme O en O'. D'après la propriété des images des figures usuelles, l'image du cercle de centre O est le cercle de centre O'. Les deux cercles ont le même rayon, 2 cm. »

Écris l'image du point utile, puis la propriété, puis la conclusion.

Utiliser une translation pour résoudre un problème

Chercher la translation

Quand une figure glisse, ses longueurs, ses angles et ses directions ne changent pas.

Pour un problème, cherche deux points et leurs images : tu as une translation. Dis ensuite quelle propriété tu utilises.

Vérifie : Deux droites

Une translation t transforme M en M' et N en N', avec $M \neq N$. Que peux-tu affirmer sur les droites (MN) et $(M'N')$?

A. Elles sont parallèles ou confondues.

Juste.

Juste : c'est l'image d'une droite par une translation.

B. Elles sont toujours parallèles et distinctes.

Faux.

Pas toujours : si (MN) a la direction de la translation, les droites sont confondues.

C. Elles sont perpendiculaires.

Faux.

Une translation ne fait pas tourner les droites.

Correction

L'image de la droite (MN) est la droite $(M'N')$. D'après la propriété des images des figures usuelles, elle est parallèle à (MN) ou confondue avec elle.

Elles sont confondues quand (MN) a la direction de la translation, comme la droite (AB) pour t.

La méthode

Méthode : utiliser une translation

1. **Repère** la translation et écris les images utiles : $t(K) = K'$, $t(L) = L'$.
2. **Choisis** la propriété qui transporte l'information : distances, angles, alignement, parallélisme, ou image d'une droite.
3. **Nomme-la** dans ta phrase : « d'après la conservation des distances ».
4. **Conclus** par une phrase complète.

Exemple : justifier un parallélisme

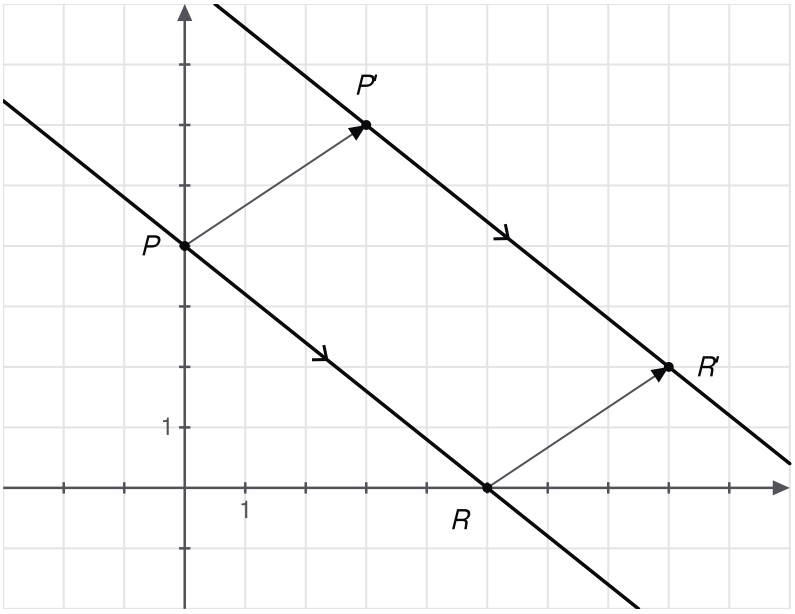
La translation t transforme $P(0;4)$ en $P'(3;6)$, et $R(5;0)$ en $R'(8;2)$. Montrons que :

$$(PR) \parallel (P'R')$$

Image de la droite. On a $t(P) = P'$ et $t(R) = R'$. D'après la propriété des images des figures usuelles, l'image de la droite (PR) est la droite $(P'R')$. Elle est parallèle à (PR) ou confondue avec elle.

Droites distinctes. Or, de P à R, on fait 5 carreaux à droite et 4 en bas. De P à P', on fait 3 carreaux à droite et 2 en haut. Les directions diffèrent : P' n'est pas sur (PR).

Conclusion. Les droites (PR) et $(P'R')$ sont parallèles et distinctes.



Les droites (PR) et (P'R'), parallèles et distinctes, reliées par deux flèches égales.

Exemple : calculer une longueur et un angle

Une translation transforme le triangle KLM en $K'L'M'$. Le triangle KLM est rectangle en K, avec $KL = 6$ cm et $KM = 8$ cm. Calculons $L'M'$.

Dans le triangle KLM. D'après le théorème de Pythagore (rappel du premier semestre) :

$$\begin{aligned} LM^2 &= 6^2 + 8^2 \\ &= 100 \end{aligned}$$

Donc $LM = 10$ cm.

Dans le triangle image. D'après la conservation des distances, $L'M' = LM = 10$ cm. D'après la conservation des mesures des angles, $\widehat{L'K'M'} = 90^\circ$: le triangle $K'L'M'$ est rectangle en K'.

Conclusion. Le segment $[L'M']$ mesure 10 cm.

Un parallélogramme caché

Exemple : deux points et leurs images

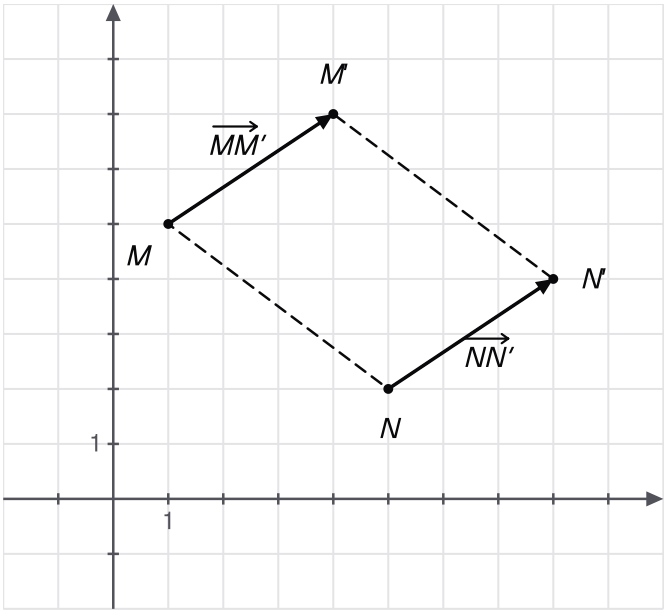
La translation t transforme $M(1;5)$ en $M'(4;7)$, et $N(5;2)$ en $N'(8;4)$.

Vecteurs égaux. D'après la définition de la translation, $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{NN'} = \overrightarrow{AB}$. Donc :

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'}$$

Points non alignés. De M à M' : 3 carreaux à droite, 2 en haut ; de M à N : 4 à droite, 3 en bas. Les directions diffèrent : M, M', N ne sont pas alignés.

Conclusion. D'après le lien entre vecteurs égaux et parallélogramme (rappel de 2AC), $MM'N'N$ est un parallélogramme.



Le parallélogramme MM'N'N, dont deux côtés sont les flèches égales de M vers M' et de N vers N'.

Vérifie : Un côté de même longueur

Dans la figure de l'exemple, quel segment a toujours la même longueur que $[MN]$?

A. Le segment $[MM']$

Faux.

Le segment $[MM']$ est opposé à $[NN']$, et non à $[MN]$.

B. Le segment $[MN']$

Faux.

C'est une diagonale du parallélogramme, pas un côté.

C. Le segment $[M'N']$

Juste.

Juste : c'est l'image de $[MN]$, et le côté opposé.

Correction

L'image du segment $[MN]$ par t est le segment $[M'N']$. D'après la conservation des distances, $M'N' = MN$.

C'est aussi le côté opposé à $[MN]$ dans le parallélogramme $MM'N'N$.

À toi : Un parallélogramme et une longueur

La translation qui transforme R en S transforme U en V. Les points R, S et U ne sont pas alignés, et $RU = 4$ cm.

Que vaut SV ? Quelle est la nature du quadrilatère $RSVU$?

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Écris les images : R a pour image S, et U a pour image V.
Indice 2
L'image du segment $[RU]$ est le segment $[SV]$. Pour la nature, compare $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{UV}$.
Indice 3
Point délicat : lis le quadrilatère dans l'ordre du tour : R, S, V, puis U.

Réponse
Longueur. La translation transforme R en S et U en V. L'image du segment $[RU]$ est donc $[SV]$. D'après la conservation des distances, $SV = RU = 4$ cm.

Nature. D'après la définition de la translation, $\overrightarrow{UV} = \overrightarrow{RS}$. L'énoncé dit que R, S et U ne sont pas alignés : $RSVU$ est un parallélogramme (rappel de 2AC).

Conclusion. La longueur SV vaut 4 cm, et le quadrilatère $RSVU$ est un parallélogramme.

Remarque : Coin examen régional : justifier un parallélisme

Au niveau de l'examen régional, la justification tient en trois phrases.

Exemple : « La translation t transforme E en E' et F en F'. D'après la propriété des images des figures usuelles, l'image de la droite (EF) est la droite $(E'F')$. Donc les droites (EF) et $(E'F')$ sont parallèles ou confondues. »

Pour conclure « parallèles et distinctes », vérifie en plus que E' n'est pas sur (EF).

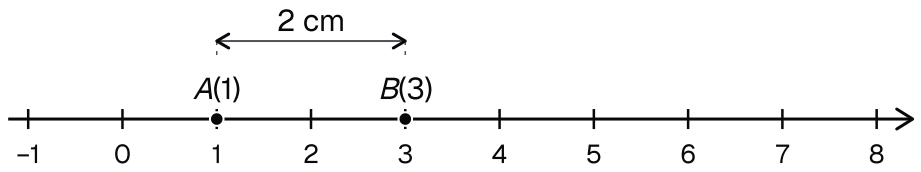
Produit d'un vecteur par un réel

Répéter un vecteur

Rappel de 1AC : sur une droite graduée, chaque point a une abscisse.

L'unité est 1 cm. Place A d'abscisse 1 et B d'abscisse 3 : $AB = 2$ cm. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ avance de 2 unités vers la droite.

Faire deux fois ce trajet, c'est $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$: on avance de 4 unités.



La droite graduée en centimètres, avec A d'abscisse 1, B d'abscisse 3 et la distance AB.

Devine : Trois fois le même trajet

Sur la même droite graduée, on part de A et on fait trois fois le trajet de A à B. Quelle est l'abscisse du point d'arrivée ?

A. L'abscisse 6

Faux.
Tu as oublié de partir de A, d'abscisse 1.

B. L'abscisse 9

Faux.
Tu as multiplié l'abscisse de B par 3.

C. L'abscisse 5

Faux.
Tu as fait le trajet deux fois seulement.

D. L'abscisse 7

Juste.
Juste : on part de 1 et on avance de $3 \times 2 = 6$ unités.

Correction
On part de A, d'abscisse 1. Chaque trajet avance de 2 unités.

Trois trajets avancent de $3 \times 2 = 6$ unités. On arrive à l'abscisse $1 + 6 = 7$.

On note ce trajet $3\overrightarrow{AB}$: c'est le **produit** du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par le réel 3.

Il a la même direction et le même sens que $\overrightarrow{AB}$. Sa longueur est trois fois plus grande.

Avec un réel négatif, comme -2, on part dans l'autre sens. Voici la définition.

La définition

Définition : Produit d'un vecteur par un nombre réel

Soit A et B deux points distincts et k un nombre réel. Le vecteur $k\overrightarrow{AB}$ est le vecteur $\overrightarrow{AM}$, où M est le point de la droite (AB) tel que :

- si $k > 0$: M est sur la demi-droite $[AB)$ et $AM = k \times AB$;

- si $k < 0$: M est sur la droite (AB), et A est entre B et M ; $AM = (-k) \times AB$;
- si $k = 0$: $M = A$, et $0\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$.

Ainsi, $k\overrightarrow{AB}$ a la même **direction** que $\overrightarrow{AB}$. Il a le même **sens** si $k > 0$, le sens contraire si $k < 0$.

Exemple : sur la droite graduée

Toujours avec A d'abscisse 1 et B d'abscisse 3, donc $AB = 2$ cm :

- $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$: $k = 2 > 0$, donc M est du côté de B et $AM = 2 \times 2 = 4$ cm. Abscisse de M : 5.
- $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$: $AN = \frac{3}{2} \times 2 = 3$ cm, du côté de B. Abscisse : 4.
- $\overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{AB}$: $k = -1 < 0$, donc A est entre B et P, et $AP = 2$ cm. Abscisse : -1.
- $\overrightarrow{AQ} = -2\overrightarrow{AB}$: $AQ = 2 \times 2 = 4$ cm, et A est entre B et Q. Abscisse : -3.

Méthode : placer M tel que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$

1. **La droite** : trace la droite (AB). Le point M est sur cette droite, comme dans l'exemple précédent.
2. **Le côté** : si $k > 0$, M est du côté de B par rapport à A. Si $k < 0$, place M de façon que A soit entre B et M. Si $k = 0$, $M = A$.
3. **La longueur** : $AM = k \times AB$ si $k > 0$, et $AM = (-k) \times AB$ si $k < 0$.
4. **Le report** : reporte cette longueur au compas, en partant de A.

Le signe du réel

Attention : une longueur n'est jamais négative

✗ « $\overrightarrow{AM} = -3\overrightarrow{AB}$, donc $AM = -3 \times AB$. »

✓ Une longueur est toujours positive. Ici $k = -3 < 0$, donc $AM = 3 \times AB$.

Le signe de k indique le sens ; la longueur se calcule avec $-k$, qui est positif. Le point A est entre B et M.

Vérifie : Un réel négatif

Sur la droite graduée, A a pour abscisse 1 et B pour abscisse 3. Quelle est l'abscisse du point E tel que $\overrightarrow{AE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$?

A. L'abscisse 2

Faux.

C'est le point de $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$: tu as oublié le signe moins.

B. L'abscisse -1

Faux.

Tu as calculé $-\frac{1}{2} \times 2$ sans partir de A.

C. L'abscisse 0

Juste.

Juste : on part de A et on recule d'une unité.

Correction

Ici $k = -\frac{1}{2} < 0$: A est entre B et E.

La longueur vaut $AE = \frac{1}{2} \times 2 = 1$ cm.

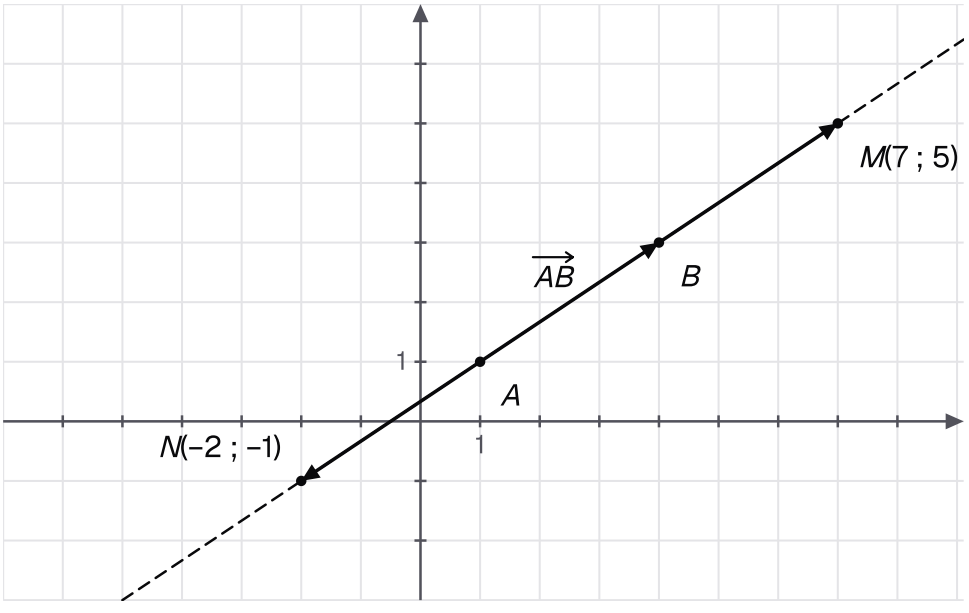
On part de l'abscisse 1 et on recule d'une unité : l'abscisse de E est 0.

Exemple : sur le quadrillage

Reprends $A(1;1)$ et $B(4;3)$. Le trajet de A à B : 3 carreaux à droite, 2 en haut.

- Le point M tel que $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$: on fait deux fois ce trajet depuis A. On arrive en $M(7;5)$.
- Le point N tel que $\overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AB}$: on fait le trajet en sens contraire. On arrive en $N(-2;-1)$.

Les points N, A, B et M sont tous sur la droite (AB).



Sur la droite (AB) : deux trajets de A vers B mènent en M, un trajet à rebours mène en N.

Alignement et milieu

Devine : Un demi-trajet

Sur une droite graduée, A a pour abscisse -3 et B pour abscisse 5. Où se trouve le point I tel que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$?

A. Hors de la droite (AB)

Faux.
Le produit garde la direction : I est sur la droite (AB).

B. Au milieu du segment $[AB]$

Juste.
Juste : $AI = 4$ cm, la moitié de $AB = 8$ cm.

C. De l'autre côté de A

Faux.
Ici $k = \frac{1}{2} > 0$: I est du côté de B.

D. Au point B

Faux.
Ce serait $1\overrightarrow{AB}$, et non $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Correction

On a $AB = 8$ cm et $k = \frac{1}{2} > 0$. Donc I est du côté de B et $AI = \frac{1}{2} \times 8 = 4$ cm.

Son abscisse est $-3 + 4 = 1$. Alors $IB = 4$ cm aussi : I est le milieu de $[AB]$.

Dans tous ces exemples, le point obtenu est sur la droite (AB).

Propriété : Produit d'un vecteur par un réel et alignement

Soit A et B deux points distincts.

- Si $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ pour un réel k, alors les points A, B et M sont **alignés**.
- Réciproquement, pour tout point M de la droite (AB), il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$.
- Le point I est le **milieu** du segment $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Remarque : Un résultat admis

Ce résultat est admis. Tu l'as observé sur la droite graduée et sur le quadrillage : le point obtenu reste sur la droite (AB).

Exemple : un milieu sur le quadrillage

Avec $M(7;5)$, on a $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$. Le trajet de A à B est la moitié de celui de A à M :

$$\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$$

D'après la propriété du produit et de l'alignement, A, B et M sont alignés, et B est le milieu de $[AM]$.

Contrôle avec la 2AC : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BM}$.

Un piège, puis à toi

Attention : une longueur ne suffit pas

✗ « $AM = 2 \times AB$, donc $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$. »

✓ Une égalité de longueurs ne donne ni la direction ni le sens.

Sur la droite graduée, prends A d'abscisse 1 et B d'abscisse 3. Appelle M le point d'abscisse -3 : il est à 4 cm de A, soit $2 \times AB$. Pourtant :

$$\overrightarrow{AM} = -2\overrightarrow{AB}$$

Hors de la droite, tout le cercle de centre A et de rayon 4 cm convient aussi.

À toi : Placer deux points

Sur une droite graduée, A a pour abscisse 2 et B pour abscisse 5. Place les points M et N tels que $\overrightarrow{AM} = -2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.

Donne leurs abscisses, puis les longueurs AM et AN.

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Calcule d'abord la longueur AB.
Indice 2
Pour N, multiplie la longueur AB par $\frac{3}{2}$.
Indice 3
Point délicat : pour M, le réel -2 est négatif. Demande-toi où placer M par rapport à A et à B, et rappelle-toi qu'une longueur est positive.

Réponse
On a $AB = 5 - 2 = 3$ cm.

Le point M. Ici $k = -2 < 0$, donc A est entre B et M, et $AM = 2 \times 3 = 6$ cm. Son abscisse est $2 - 6 = -4$.

Le point N. Ici $k = \dfrac{3}{2} > 0$, donc N est du côté de B et $AN = \dfrac{3}{2} \times 3 = 4{,}5$ cm. Son abscisse est $2 + 4{,}5 = 6{,}5$.

Conclusion. Le point M a pour abscisse -4, avec $AM = 6$ cm. Le point N a pour abscisse $6{,}5$, avec $AN = 4{,}5$ cm.

Synthèse : les transformations du collège

Trois façons de déplacer un motif

Regarde un carrelage à motif, par exemple dans une cuisine. Le même dessin revient d'un carreau à l'autre.

On passe d'un carreau à un autre de trois façons :

- faire glisser le motif ;
- lui faire faire un demi-tour ;
- le retourner, comme dans un miroir.

Devine : Deux carreaux voisins

Deux carreaux voisins portent le même motif, tourné de la même façon. Aucun des deux n'est retourné. Quelle transformation fait passer de l'un à l'autre ?

A. Une translation

Juste.

Juste : le motif glisse sans tourner ni se retourner.

B. Une symétrie axiale

Faux.

Une symétrie axiale retourne le motif, comme un miroir.

C. Une symétrie centrale

Faux.

Une symétrie centrale fait faire un demi-tour au motif.

Correction

Le motif n'est ni tourné ni retourné : il a seulement glissé. C'est une translation.

Chaque point du motif fait le même trajet : même direction, même sens, même longueur.

Rappel de 1AC : le symétrique M' de M par rapport à un point O est tel que O est le milieu de $[MM']$.

Rappel de 2AC : si M n'est pas sur la droite (d), son symétrique M' par rapport à (d) est tel que (d) est la médiatrice de $[MM']$.

Ces deux symétries, comme la translation, conservent les distances, l'alignement, les mesures des angles et les aires.

Comparer les trois transformations

Le tableau des trois transformations.

	Translation qui transforme A en B	**Symétrie de centre O**	**Symétrie d'axe (d)**
Image M' de M	$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$	O est le milieu de $[MM']$	(d) est la médiatrice de $[MM']$, si M n'est pas sur (d)
Ce qui est conservé	les distances, l'alignement, les mesures des angles et les aires	les mêmes	les mêmes

Méthode : reconnaître la transformation

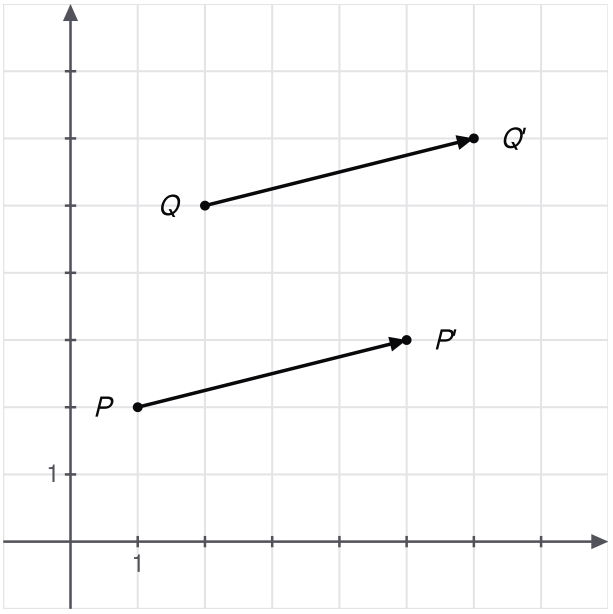
1. **Compare les trajets** : si les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ sont tous égaux (même direction, même sens, même longueur), c'est une translation.
2. **Cherche un milieu commun** : si O est le milieu de chaque segment $[MM']$, c'est la symétrie de centre O.
3. **Cherche une médiatrice commune** : si (d) est la médiatrice de chaque segment $[MM']$, pour M hors de (d), c'est la symétrie d'axe (d).

Un exemple, puis à toi

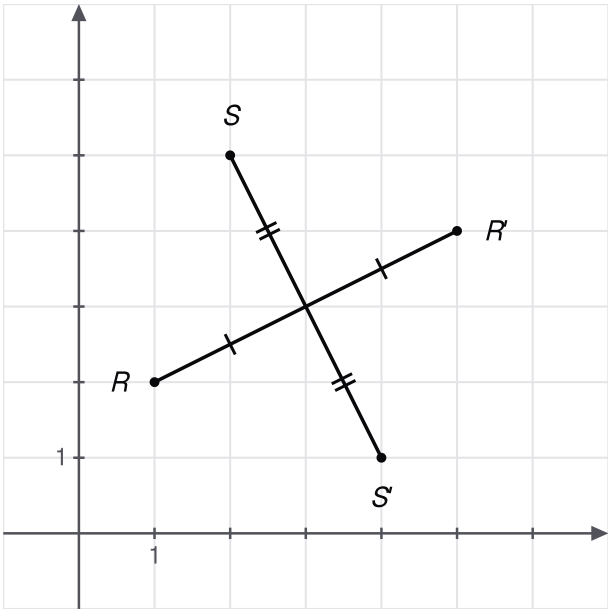
Exemple : trois transformations sur un quadrillage

Sur un quadrillage, on observe trois transformations, chacune sur deux points.

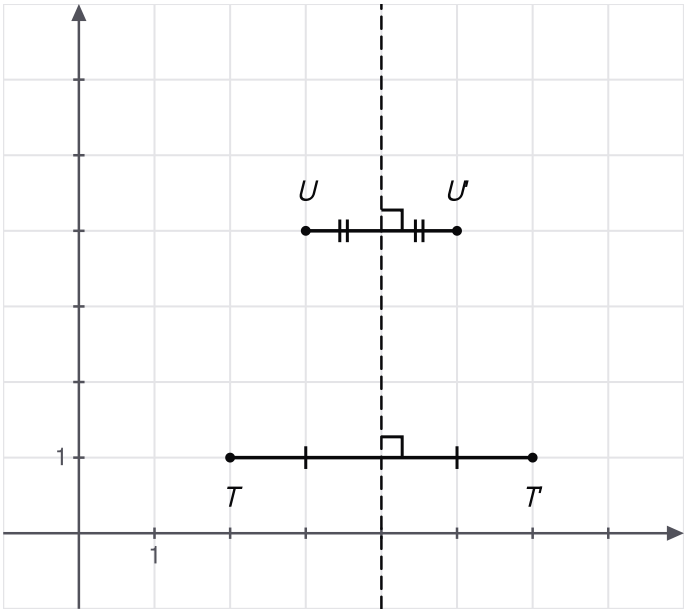
- $P(1;2)$ va en $P'(5;3)$, et $Q(2;5)$ va en $Q'(6;6)$. Les deux trajets sont les mêmes : 4 carreaux à droite, 1 en haut. C'est une translation.
- $R(1;2)$ va en $R'(5;4)$, et $S(2;5)$ va en $S'(4;1)$. Les segments $[RR']$ et $[SS']$ ont le même milieu $(3;3)$. C'est une symétrie centrale.
- $T(2;1)$ va en $T'(6;1)$, et $U(3;4)$ va en $U'(5;4)$. La droite verticale qui passe par $(4;0)$ est la médiatrice des deux segments. C'est une symétrie axiale.



Première transformation : P et Q font le même trajet, 4 carreaux à droite et 1 en haut.



Deuxième transformation : les segments [RR'] et [SS'] se coupent en leur milieu commun.



Troisième transformation : la droite verticale passant par (4 ; 0) coupe [TT'] et [UU'] en leur milieu, à angle droit.

À toi : Quelle transformation ?

Une transformation envoie $K(1;1)$ en $K'(5;5)$, et $L(2;4)$ en $L'(4;2)$. Est-ce une translation, une symétrie centrale ou une symétrie axiale ?

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Compare d'abord les deux trajets. S'ils sont différents, regarde les milieux de $[KK']$ et de $[LL']$.
Indice 2
De K à K' : 4 carreaux à droite, 4 en haut. De L à L' : 2 à droite, 2 en bas.
Indice 3
Point délicat : trouve le milieu de $[KK']$ et celui de $[LL']$ en comptant les carreaux.

Réponse
Translation ? De K à K' : 4 carreaux à droite, 4 en haut. De L à L' : 2 à droite, 2 en bas. Les trajets ne sont pas les mêmes : ce n'est pas une translation.

Symétrie centrale ? Le milieu de $[KK']$ est $(3;3)$, à 2 carreaux de K vers la droite et 2 vers le haut. Le milieu de $[LL']$ est aussi $(3;3)$, à 1 carreau de L vers la droite et 1 vers le bas. Ce point commun est donc le centre.

Symétrie axiale ? Les segments $[KK']$ et $[LL']$ n'ont pas la même direction : leurs médiatrices sont différentes. Ce n'est pas une symétrie axiale.

Conclusion. La transformation est la symétrie de centre $(3;3)$.

Ce qu'il faut savoir faire

À retenir : quelle méthode pour quelle question

- **Construire une image** : fais le trajet de A à B en partant du point, sur le quadrillage ou au compas.
- **Reconnaître une image** : compare les trajets, ou cherche un parallélogramme.
- **Calculer une longueur, un angle, une aire** : nomme la conservation utilisée.
- **Tracer l'image d'une figure** : construis les images des points utiles.
- **Justifier un parallélisme** : image d'une droite, parallèle ou confondue.
- **Placer M tel que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$** : la droite (AB), le côté selon le signe de k, puis la longueur.
- **Reconnaître une transformation** : même trajet, milieu commun, ou médiatrice commune.

Le mot du prof. Tu sais maintenant faire glisser une figure et dire ce qui ne change pas.

Chaque fois, nomme la propriété que tu utilises. Tu retrouveras bientôt les vecteurs et la translation en géométrie analytique.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Translation et produit d'un vecteur par un réel » (3ac · general · mathematiques)