BURHAN

Résumé : Le théorème de Thalès

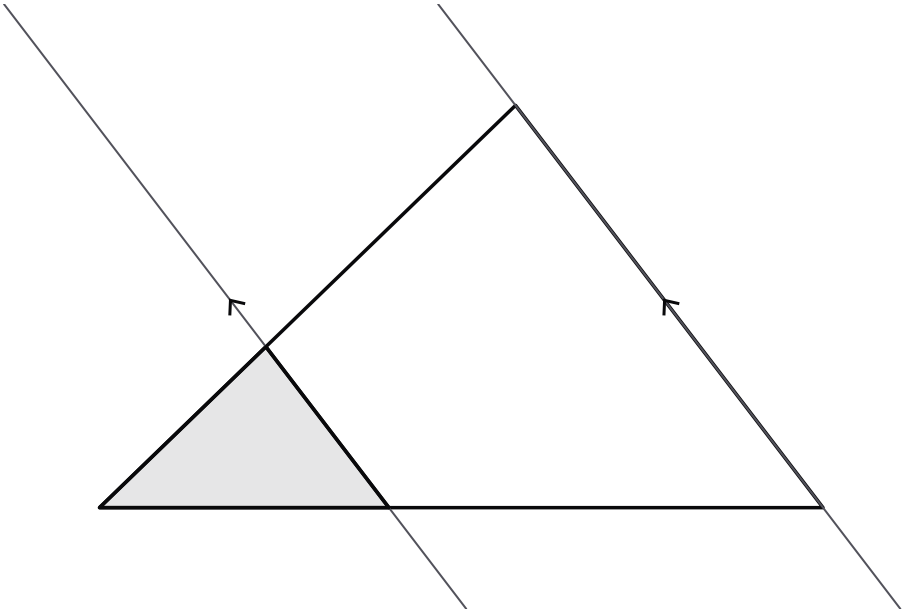
3ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/3ac/mathematiques/theoreme-de-thales/resume

Chapitre	Semestre
Le théorème de Thalès	Semestre 1

Reconnaître une configuration de Thalès

> **À retenir : Une seule idée : des longueurs proportionnelles**
>
> Coupe un triangle par une droite parallèle à l'un de ses côtés. Tu obtiens un petit triangle. Ses côtés sont proportionnels à ceux du grand triangle. Tout le chapitre part de cette idée.



Une droite parallèle à un côté coupe le triangle : il reste un petit triangle, teinté, dont les côtés sont proportionnels à ceux du grand.

Définition : Les mots du chapitre

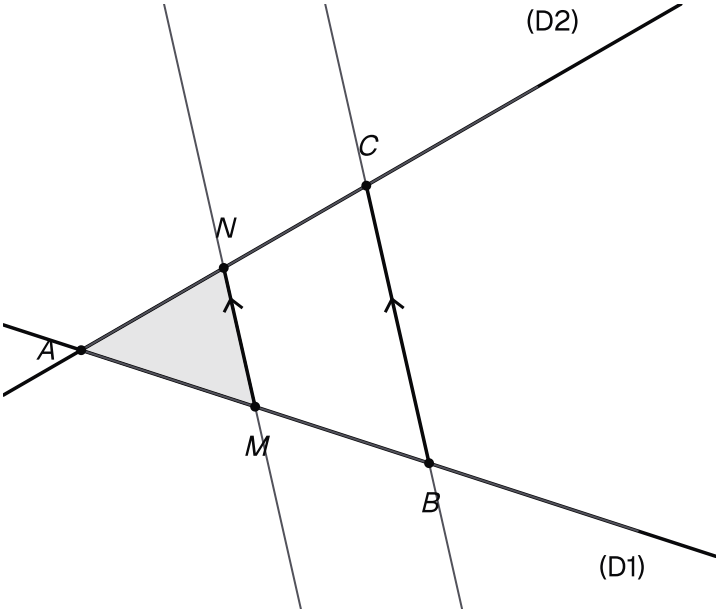
Un **rapport** de deux longueurs est le quotient de l'une par l'autre, par exemple $\frac{AM}{AB}$.

Une **configuration de Thalès** est formée de deux droites sécantes en un point A, coupées par deux droites parallèles qui ne passent pas par A. Le point A s'appelle le **point commun**.

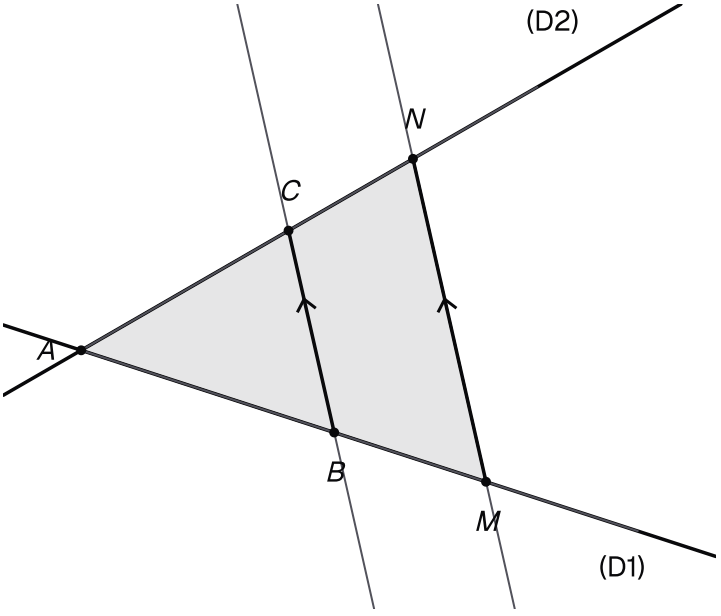
Remarque : Trois positions possibles

Le point commun est A. On note (D_1) la droite qui porte B et M, et (D_2) celle qui porte C et N. Le point M peut occuper trois places.

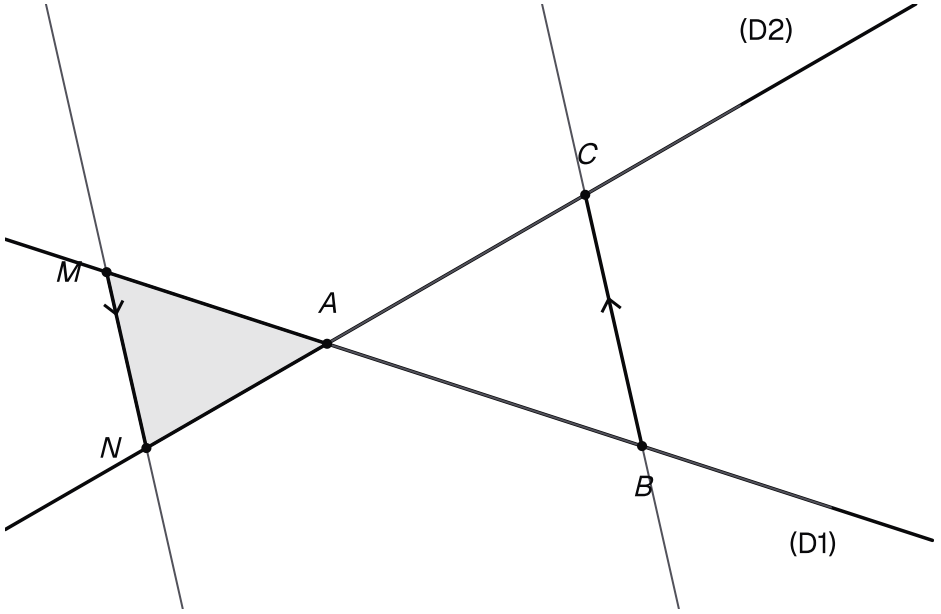
Place de M sur (D_1)	Figure obtenue
entre A et B	le triangle AMN est dans le triangle ABC
au-delà de B	le triangle AMN dépasse le triangle ABC
de l'autre côté de A	configuration papillon



Place 1 : M sur le segment [AB] ; le triangle AMN, teinté, reste à l'intérieur de ABC.



Place 2 : M au-delà de B ; le triangle AMN, teinté, déborde du triangle ABC.



Place 3 : M de l'autre côté de A ; les deux triangles forment un papillon.

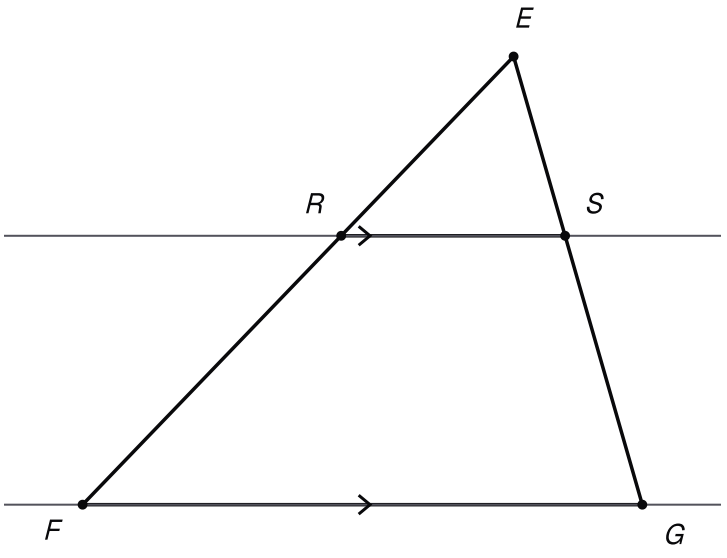
Exemple

Figure. Trace un triangle EFG. Place R sur le segment $[EF]$ et S sur le segment $[EG]$. Les droites (RS) et (FG) sont parallèles.

Point commun. C'est E. Les points E, R, F sont alignés, ainsi que E, S, G.

Rapports. Le théorème de Thalès dans le triangle donne :

$$\frac{ER}{EF} = \frac{ES}{EG} = \frac{RS}{FG}.$$



Le triangle EFG traversé par (RS), parallèle à (FG) : on lit les rapports depuis le sommet E.

Attention : Les deux premiers rapports partent du point commun

Sur la figure précédente, prends $ER = 4$ cm et $RF = 6$ cm. Au dénominateur, il faut $EF = 4 + 6 = 10$ cm.

Le bon rapport est donc $\frac{ER}{EF} = \frac{4}{10}$. Le rapport $\frac{ER}{RF} = \frac{4}{6}$ ne part pas de E : il est faux ici.

Remarque : Rappel : le produit en croix

Rappel de 1re année : si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, alors $a \times d = b \times c$.

Par exemple, $\frac{3}{4} = \frac{x}{10}$ donne $4 \times x = 30$. Donc $x = 7{,}5$.

Le théorème de Thalès

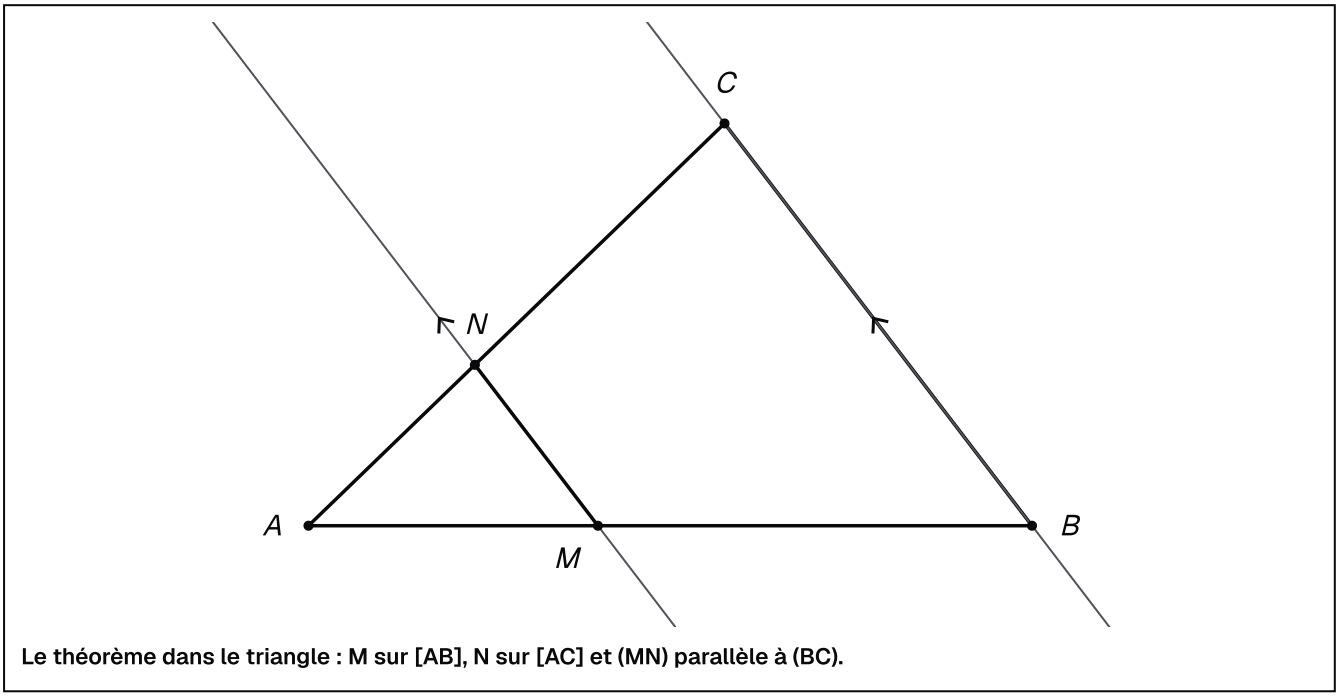
Théorème : Théorème de Thalès dans le triangle

Soit ABC un triangle. Soit M un point du segment $[AB]$ et N un point du segment $[AC]$, distincts de A.

Si les droites (MN) et (BC) sont **parallèles**, alors

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}.$$

Les longueurs des côtés du triangle AMN sont donc proportionnelles aux longueurs des côtés du triangle ABC.



Le théorème dans le triangle : M sur [AB], N sur [AC] et (MN) parallèle à (BC).

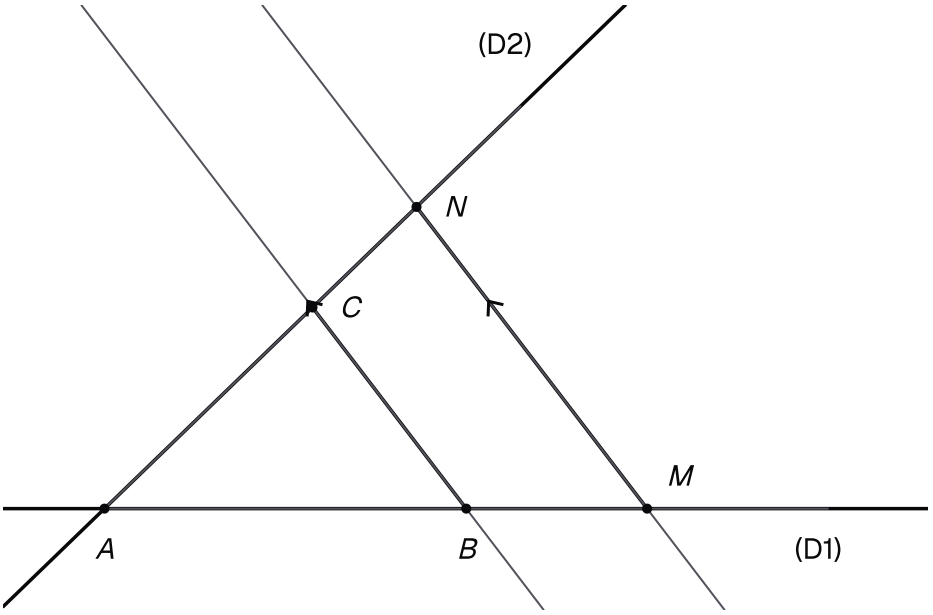
Théorème : Théorème de Thalès pour deux droites sécantes

Soit (D_1) et (D_2) deux droites sécantes en un point A. Soit B et M deux points de (D_1), et C et N deux points de (D_2), tous distincts de A.

Si les droites (BC) et (MN) sont **parallèles**, alors

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}.$$

Le théorème vaut quelle que soit la position de M sur (D_1) : entre A et B, au-delà de B, ou de l'autre côté de A. Le théorème de Thalès dans le triangle en est un cas particulier.



Le théorème pour deux droites sécantes, ici avec M au-delà de B sur (D1) et N au-delà de C sur (D2).

Remarque : Deux théorèmes admis

Ces deux théorèmes sont admis.

- On les utilise sans les démontrer.
- Le premier est un cas particulier du second.
- Leur hypothèse est toujours la même : deux droites parallèles.

Exemple

Figure. Les droites (D_1) et (D_2) se coupent en H. Sur (D_1), le point I est entre H et J. Sur (D_2), le point K est entre H et L. Les droites (IK) et (JL) sont parallèles. On donne $HI = 2$ cm, $HK = 2{,}2$ cm, $IK = 1{,}6$ cm et $HJ = 5$ cm.

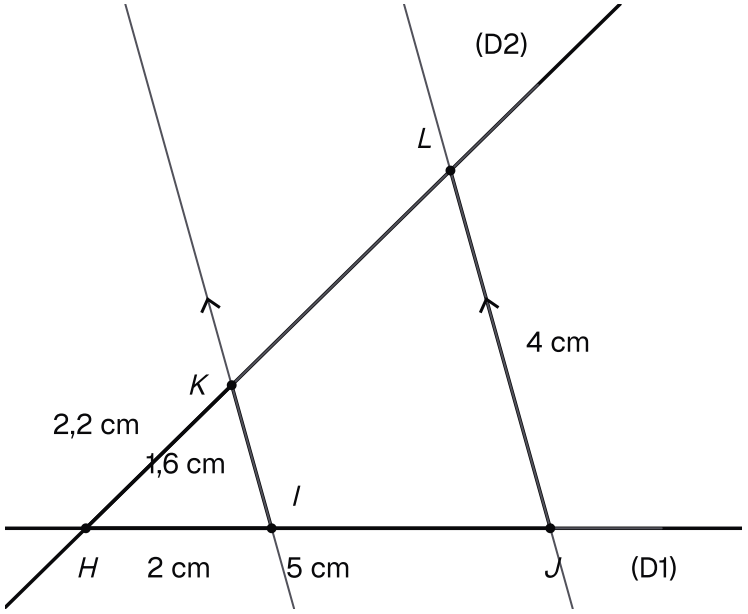
Rapports. Les droites (IK) et (JL) sont parallèles. Le théorème de Thalès pour deux droites sécantes donne :

$$\frac{HJ}{HI} = \frac{HL}{HK} = \frac{JL}{IK}.$$

Calcul. $\frac{5}{2} = \frac{JL}{1{,}6}$, donc :

$$JL = \frac{5 \times 1{,}6}{2} = 4.$$

Ainsi $JL = 4$ cm.



L'exemple du prolongement : HI = 2 cm, HJ = 5 cm, HK = 2,2 cm, IK = 1,6 cm, d'où JL = 4 cm.

Exemple

Figure. Les segments $[DG]$ et $[EH]$ se coupent en K. Le point K est entre D et G, et entre E et H. Les droites (DE) et (GH) sont parallèles. On donne $KD = 2{,}4$ cm, $KE = 2$ cm, $DE = 3$ cm et $KG = 3{,}6$ cm.

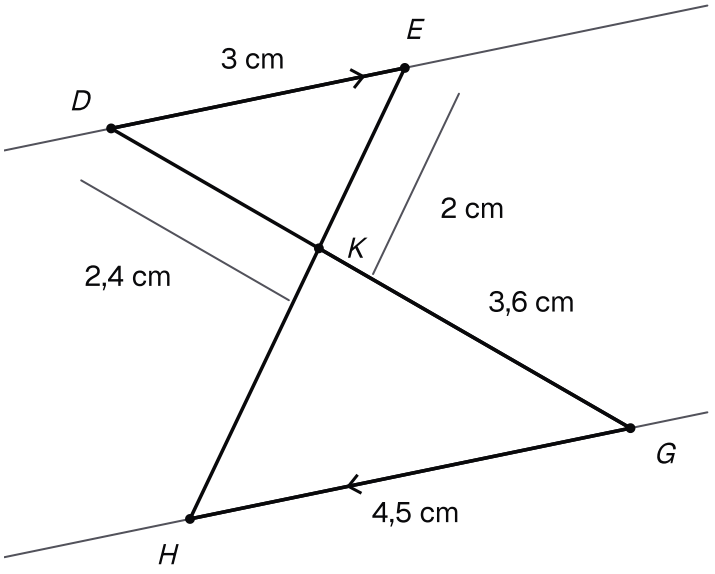
Rapports. C'est une configuration papillon de point commun K. Les droites (DE) et (GH) sont parallèles. Le théorème de Thalès pour deux droites sécantes donne :

$$\frac{KG}{KD} = \frac{KH}{KE} = \frac{GH}{DE}.$$

Calcul. $\frac{3{,}6}{2{,}4} = \frac{GH}{3}$, donc :

$$GH = \frac{3{,}6 \times 3}{2{,}4} = 4{,}5.$$

Ainsi $GH = 4{,}5$ cm.



Le papillon de point commun K : KD = 2,4 cm, KE = 2 cm, DE = 3 cm, KG = 3,6 cm, et la longueur obtenue GH = 4,5 cm.

Calculer une longueur

Méthode : calculer une longueur

1. **Trouve** le point commun et les deux droites qui passent par lui.
2. **Cite** l'hypothèse : deux droites sont parallèles.
3. **Écris** les trois rapports égaux. Les deux premiers partent du point commun.
4. **Choisis** deux rapports : l'un est connu, l'autre contient la longueur cherchée.
5. **Fais** le produit en croix, puis donne le résultat avec son unité.

Exemple

Figure. Dans le triangle RST, U est sur $[RS]$ et V sur $[RT]$. Les droites (UV) et (ST) sont parallèles. On donne $RU = 3$ cm, $RS = 7{,}5$ cm, $RV = 2{,}4$ cm et $ST = 8$ cm.

Égalité. Le point commun est R. D'après le théorème de Thalès dans le triangle :

$$\frac{RU}{RS} = \frac{RV}{RT} = \frac{UV}{ST}.$$

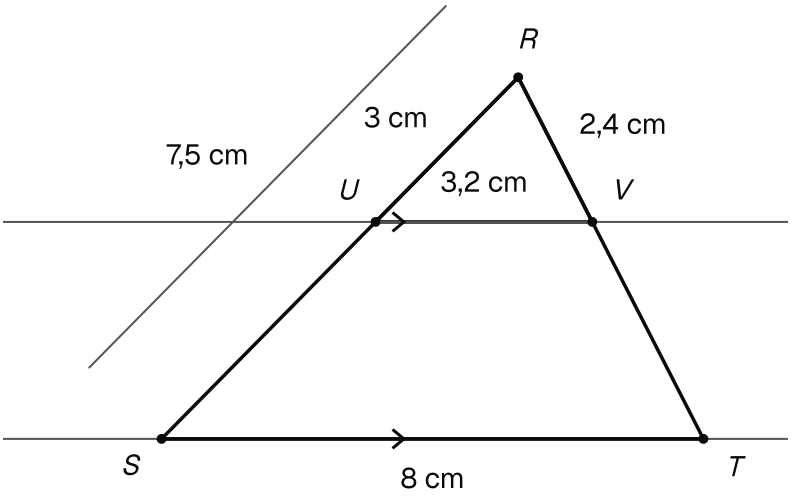
Longueur RT. $\dfrac{3}{7{,}5} = \dfrac{2{,}4}{RT}$, donc :

$$RT = \frac{7{,}5 \times 2{,}4}{3} = 6.$$

Longueur UV. $\dfrac{3}{7{,}5} = \dfrac{UV}{8}$, donc :

$$UV = \frac{3 \times 8}{7{,}5} = 3{,}2.$$

Ainsi $RT = 6$ cm et $UV = 3{,}2$ cm.



Les données de l'exemple RST : RU = 3 cm, RS = 7,5 cm, RV = 2,4 cm, ST = 8 cm, et le résultat UV = 3,2 cm.

Exemple

Figure. Dans le triangle DEF, P est sur $[DE]$ et Q sur $[DF]$. Les droites (PQ) et (EF) sont parallèles. On donne $DP = 2{,}5$ cm, $PE = 3{,}5$ cm et $DQ = 3$ cm. On cherche QF.

Somme. Le point P est sur $[DE]$, donc $DE = DP + PE = 6$ cm.

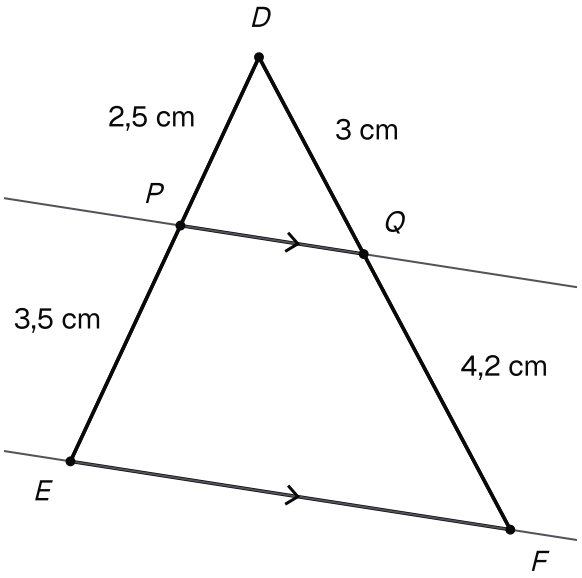
Thalès. D'après le théorème de Thalès dans le triangle, $\dfrac{DP}{DE} = \dfrac{DQ}{DF}$. Donc $\dfrac{2{,}5}{6} = \dfrac{3}{DF}$ et :

$$DF = \frac{6 \times 3}{2{,}5} = 7{,}2.$$

Différence. Le point Q est sur $[DF]$, donc :

$$QF = DF - DQ = 7{,}2 - 3 = 4{,}2.$$

Ainsi $QF = 4{,}2$ cm.



Dans le triangle DEF : DP = 2,5 cm et PE = 3,5 cm sur un côté, DQ = 3 cm et QF = 4,2 cm sur l'autre.

À retenir : Une rédaction modèle

Écris une phrase par étape.

1. Les points : « Les points R, U, S sont alignés, ainsi que R, V, T. »
2. L'hypothèse : « Les droites (UV) et (ST) sont parallèles. »
3. Le nom du théorème, puis les rapports.
4. La longueur et son unité.

Démontrer que deux droites sont parallèles

Théorème : Réciproque du théorème de Thalès

Soit (D_1) et (D_2) deux droites sécantes en un point A. Soit B et M deux points de (D_1), et C et N deux points de (D_2), tous distincts de A.

Si

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$

et si les points A, B, M et les points A, C, N sont alignés **dans le même ordre**, alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

Remarque : Une réciproque admise

La réciproque est admise. Elle sert dans l'autre sens : les longueurs sont connues, et tu prouves un parallélisme.

Définition : « Dans le même ordre »

Regarde la place de M par rapport à A et B, puis celle de N par rapport à A et C. Si ces places se correspondent, les points sont **alignés dans le même ordre**.

Sur (D_1)	Sur (D_2)	Même ordre ?
M entre A et B	N entre A et C	oui
B entre A et M	C entre A et N	oui
M entre A et B	A entre N et C	non

Méthode : prouver que deux droites sont parallèles

1. **Calcule** chacun des deux rapports $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN}{AC}$, en valeur exacte.
2. **Compare-les** avec le produit en croix.
3. **Contrôle** l'ordre des points sur chaque droite.
4. **Conclus** : d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

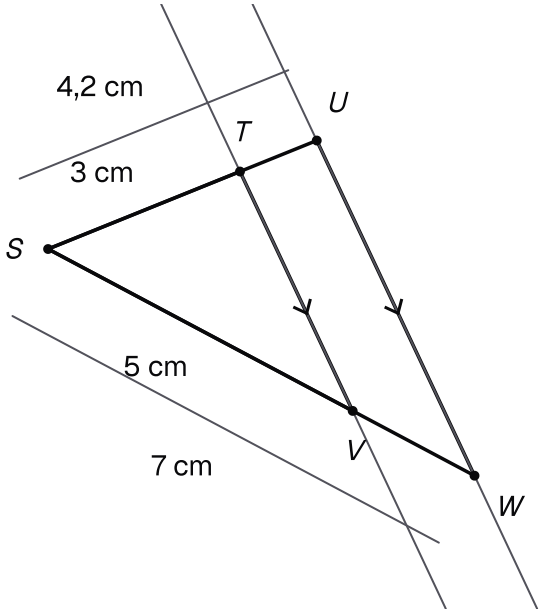
Exemple

Figure. Deux droites se coupent en S. Sur la première, les points S, T, U sont alignés dans cet ordre, avec $ST = 3$ cm et $SU = 4{,}2$ cm. Sur la seconde, les points S, V, W sont alignés dans cet ordre, avec $SV = 5$ cm et $SW = 7$ cm.

Rapports. On compare $\frac{ST}{SU} = \frac{3}{4{,}2}$ et $\frac{SV}{SW} = \frac{5}{7}$. Les produits en croix valent $3 \times 7 = 21$ et $4{,}2 \times 5 = 21$. Les rapports sont égaux.

Ordre. T est entre S et U, et V est entre S et W : c'est le même ordre.

Conclusion. Les rapports sont égaux et l'ordre des points est respecté. Avec la réciproque du théorème de Thalès, on conclut que (TV) et (UW) sont parallèles.



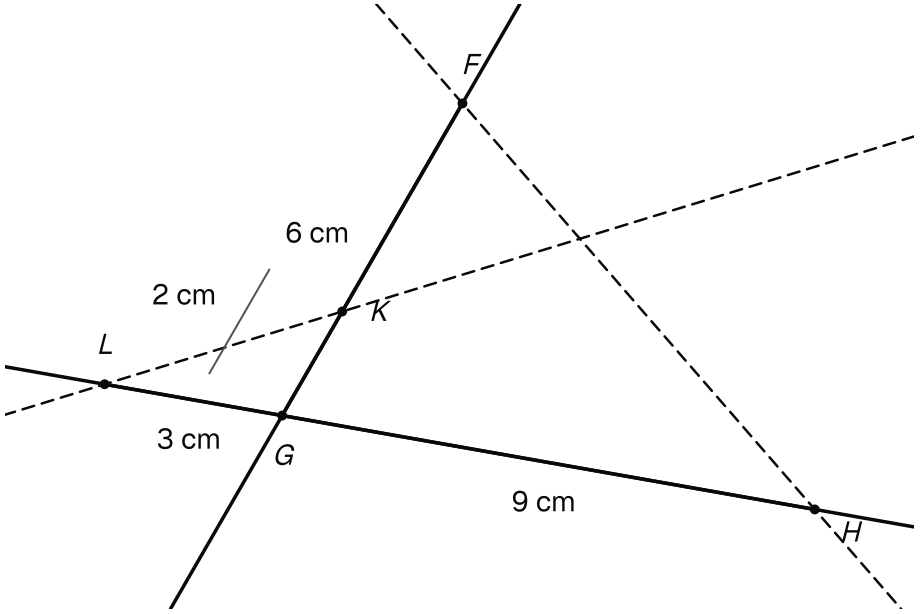
Les droites issues de S : ST = 3 cm, SU = 4,2 cm, SV = 5 cm, SW = 7 cm ; la conclusion est (TV) parallèle à (UW).

Attention : Des rapports égaux ne suffisent pas

Deux droites se coupent en G. Trace cette figure.

1. Sur la première, place F avec $GF = 6$ cm, puis K sur $[GF]$ avec $GK = 2$ cm.
2. Sur la seconde, place H avec $GH = 9$ cm.
3. Place L sur la seconde droite, de façon que G soit entre H et L, avec $GL = 3$ cm.

Les rapports $\frac{GK}{GF}$ et $\frac{GL}{GH}$ valent tous deux $\frac{1}{3}$. Mais l'ordre n'est pas le même. Les droites (KL) et (FH) se coupent.



Le contre-exemple : GK sur GF et GL sur GH valent tous deux un tiers, mais G est entre H et L, et (KL) coupe (FH).

Attention : Le bon théorème pour la bonne question

- Le théorème de Thalès part de droites parallèles : il ne prouve pas qu'elles le sont.
- Pour prouver un parallélisme, cite la réciproque.
- La réciproque compare seulement les deux rapports qui partent du point commun : le rapport $\frac{MN}{BC}$ n'y sert pas.

Démontrer que deux droites ne sont pas parallèles

Propriété : Conséquence du théorème de Thalès

Soit (D_1) et (D_2) deux droites sécantes en un point A. Soit B et M deux points de (D_1), et C et N deux points de (D_2), tous distincts de A.

Si

$$\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC},$$

alors les droites (BC) et (MN) ne sont **pas** parallèles.

Méthode : prouver que deux droites ne sont pas parallèles

1. **Calcule** les deux rapports qui partent du point commun, en valeur exacte.
2. **Montre** qu'ils sont différents : les produits en croix ne sont pas égaux.
3. **Conclus** : d'après la conséquence du théorème de Thalès, les droites ne sont pas parallèles.

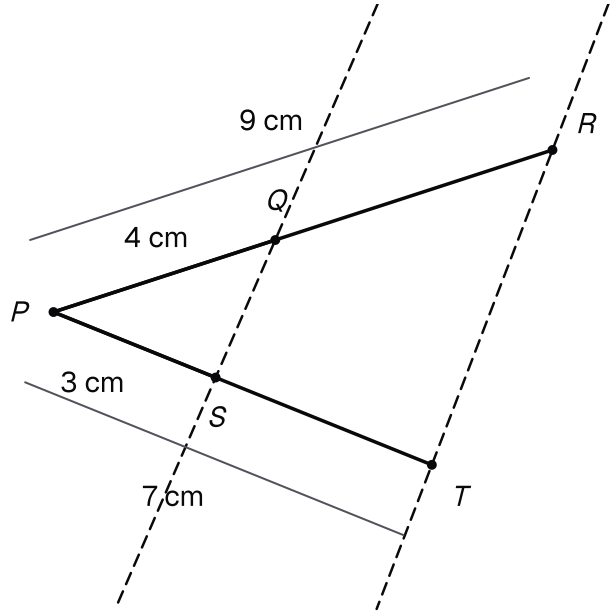
Pas besoin ici de regarder l'ordre des points.

Exemple

Figure. Deux droites se coupent en P. Les points P, Q, R sont alignés dans cet ordre, avec $PQ = 4$ cm et $PR = 9$ cm. Les points P, S, T sont alignés dans cet ordre, avec $PS = 3$ cm et $PT = 7$ cm.

Produits en croix. On compare $\frac{PQ}{PR} = \frac{4}{9}$ et $\frac{PS}{PT} = \frac{3}{7}$. On trouve $4 \times 7 = 28$ et $9 \times 3 = 27$.

Conclusion. Ainsi $\frac{4}{9} \neq \frac{3}{7}$. D'après la conséquence du théorème de Thalès, les droites (QS) et (RT) ne sont pas parallèles.



Les points P, Q, R d'un côté et P, S, T de l'autre : 4 sur 9 et 3 sur 7 diffèrent, donc (QS) et (RT) ne sont pas parallèles.

Attention : Jamais de valeurs arrondies pour comparer

Les rapports $\frac{8}{11}$ et $\frac{5{,}1}{7}$ ont la même valeur arrondie au centième : $0{,}73$.

Pourtant, $8 \times 7 = 56$ et $11 \times 5{,}1 = 56{,}1$. Les produits en croix diffèrent, donc les rapports aussi. Compare toujours des valeurs exactes.

Construire une quatrième proportionnelle

Définition : Quatrième proportionnelle

On donne trois longueurs a, b et c. Leur **quatrième proportionnelle** est la longueur x telle que $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$.
Le produit en croix donne :

$$x = \frac{b \times c}{a}.$$

Méthode : construire la quatrième proportionnelle

1. **Trace** deux demi-droites de même origine A, ni confondues ni dans le prolongement l'une de l'autre.
2. **Reporte** sur la première $AB = a$ et $AM = c$.
3. **Reporte** sur la seconde $AC = b$.
4. **Trace** la parallèle à (BC) qui passe par M. Elle coupe la seconde demi-droite en N.
5. **Justifie** : les droites (MN) et (BC) sont parallèles, donc le théorème de Thalès pour deux droites sécantes donne $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$. Ainsi $AN = \frac{b \times c}{a} = x$.

Exemple

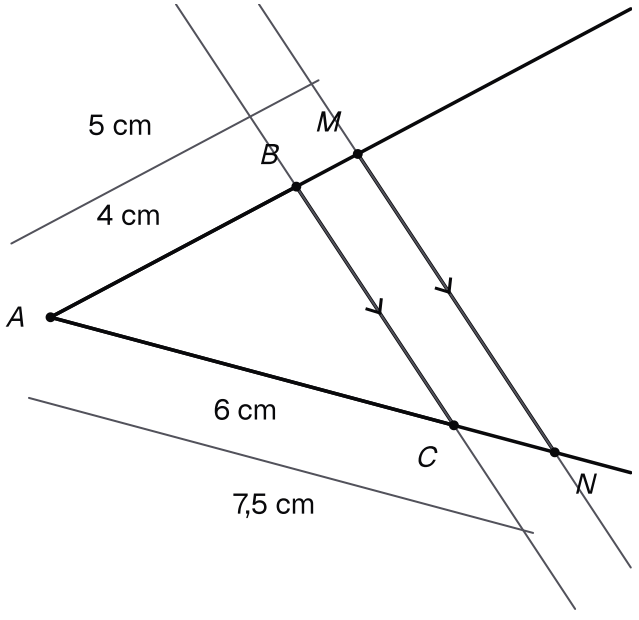
Données. $a = 4$ cm, $b = 6$ cm et $c = 5$ cm.

Calcul. La longueur cherchée vaut :

$$x = \frac{6 \times 5}{4} = 7{,}5.$$

Donc $x = 7{,}5$ cm.

Construction. Place $AB = 4$ cm et $AM = 5$ cm sur la première demi-droite, puis $AC = 6$ cm sur la seconde. La parallèle à (BC) passant par M coupe la seconde demi-droite en N. Tu dois mesurer $AN = 7{,}5$ cm.

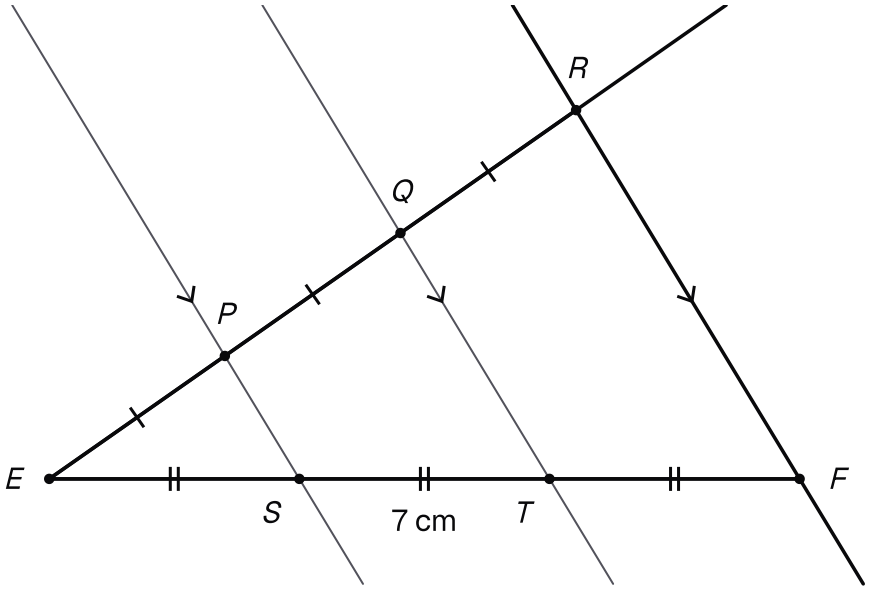


La quatrième proportionnelle de 4, 6 et 5 : la parallèle à (BC) menée par M marque N, avec AN = 7,5 cm.

Remarque : Partager un segment

La même idée partage un segment en parties égales, sans mesurer chaque part.

1. Trace une demi-droite qui part d'une extrémité du segment et qui n'est pas sur la droite de ce segment.
2. Reporte dessus, à la suite, des longueurs égales.
3. Relie le dernier point reporté à l'autre extrémité du segment.
4. Mène par les autres points les parallèles à cette droite : elles découpent le segment en parties égales.



Exemple de partage en trois : sur la demi-droite d'origine E, trois longueurs égales, puis des parallèles à (RF) jusqu'au segment [EF].

Théorème de Thalès dans le triangle et sa réciproque

À retenir : Ce que tu sais maintenant

Dans un triangle, une parallèle à un côté donne des rapports égaux. C'est le théorème de Thalès dans le triangle. Inversement, des rapports égaux et des points dans le même ordre donnent des droites parallèles. C'est sa réciproque.

Remarque : Rappel : la droite des milieux

Rappel de 2e année : la droite qui passe par les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté. C'est le cas où les deux rapports valent $\frac{1}{2}$.

Le segment qui joint ces milieux mesure la moitié du troisième côté : le troisième rapport vaut aussi $\frac{1}{2}$.

Méthode : Quelle question, quel énoncé ?

Question posée	Énoncé à citer	Ce que tu compares
calculer une longueur	le théorème de Thalès	deux des trois rapports égaux $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$
prouver un parallélisme	la réciproque du théorème de Thalès	$\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN}{AC}$, puis l'ordre
prouver un non-parallélisme	la conséquence du théorème de Thalès	$\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN}{AC}$
construire une quatrième proportionnelle	le théorème de Thalès, après une parallèle tracée	$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$

Théorème de Thalès, si les droites (MN) et (BC) sont parallèles

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

Réciproque : rapports égaux et points dans le même ordre

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$

Conséquence : rapports différents, droites non parallèles

$$\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}$$

Produit en croix

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ donne } a \times d = b \times c$$

Quatrième proportionnelle

$$x = \frac{b \times c}{a}$$

À retenir : Rédiger en devoir

1. Cite les points alignés, puis l'hypothèse.
2. Nomme toujours l'énoncé utilisé.
3. Compare les rapports avec des valeurs exactes.
4. Pour la réciproque, écris une phrase sur l'ordre des points.
5. Finis par une phrase qui répond à la question.