BURHAN

Le théorème de Thalès : exercices, niveau examen

3ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/3ac/mathematiques/theoreme-de-thales/exercices/examen

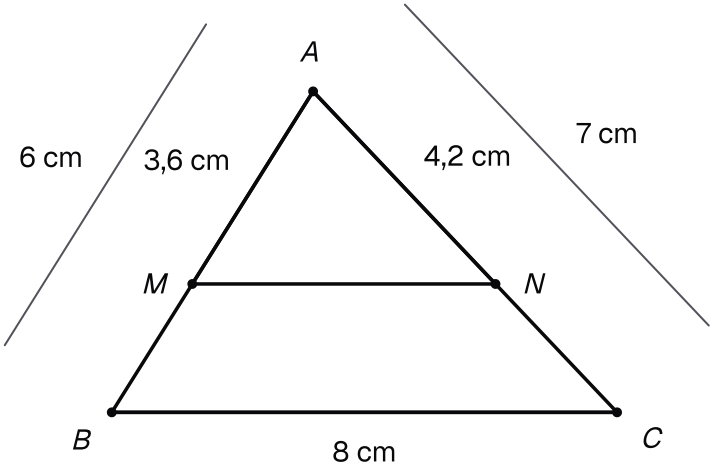
Chapitre	Palier	Exercices
Le théorème de Thalès	Niveau examen	5

Exercice 1 5 pts

Un triangle, trois questions de parallélisme

Soit ABC un triangle tel que $AB = 6$ cm, $AC = 7$ cm et $BC = 8$ cm.

Le point M est sur le segment $[AB]$, avec $AM = 3{,}6$ cm. Le point N est sur le segment $[AC]$, avec $AN = 4{,}2$ cm. Trace la figure.



La figure de départ : le triangle ABC de côtés 6 cm, 7 cm et 8 cm, avec AM = 3,6 cm et AN = 4,2 cm.

1. 1,5 pts

Les droites (MN) et (BC) sont-elles parallèles ? Justifie.

INDICE

Outil : la réciproque du théorème de Thalès. **Point délicat :** n'oublie pas de vérifier l'ordre des points, en une phrase.

CORRIGÉ

Rapports. On a $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{3{,}6}{6}$ et $\dfrac{AN}{AC} = \dfrac{4{,}2}{7}$. Les produits en croix valent :

$$3{,}6 \times 7 = 25{,}2$$
$$6 \times 4{,}2 = 25{,}2$$

Ils sont égaux, donc $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$.

Ordre. Le point M est sur $[AB]$ et le point N sur $[AC]$: les points A, M, B et A, N, C sont alignés dans le même ordre.

Conclusion. Avec ces deux conditions, la réciproque du théorème de Thalès permet d'affirmer que (MN) et (BC) sont parallèles.

2. 1 pts

En déduire la longueur MN.

INDICE

Outil : le théorème de Thalès dans le triangle, avec le parallélisme de la question 1.

CORRIGÉ

D'après la question 1, $(MN) \parallel (BC)$, avec M sur $[AB]$ et N sur $[AC]$. Le théorème de Thalès dans le triangle ABC donne :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$$

On a donc $\frac{3{,}6}{6} = \frac{MN}{8}$, et le produit en croix donne :

$$MN = \frac{3{,}6 \times 8}{6} = 4{,}8$$

Conclusion. La longueur MN vaut $4{,}8$ cm.

3. 1,5 pts

Soit I le milieu de $[AB]$. La parallèle à (BC) qui passe par I coupe $[AC]$ en J. Calcule AJ et IJ.

INDICE

Outil : rappel de 2e année sur la droite des milieux, ou le théorème de Thalès avec $AI = 3$ cm.

CORRIGÉ

Le point J. Rappel de 2e année : dans un triangle, la droite qui passe par le milieu d'un côté et qui est parallèle à un deuxième côté coupe le troisième côté en son milieu.

Ici, I est le milieu de $[AB]$ et la droite (IJ) est parallèle à (BC). Donc J est le milieu de $[AC]$:

$$AJ = \frac{7}{2} = 3{,}5$$

Longueur IJ. Le segment qui joint les milieux de deux côtés mesure la moitié du troisième côté :

$$IJ = \frac{8}{2} = 4$$

Contrôle. Avec le théorème de Thalès dans le triangle ABC et $AI = 3$ cm, on a $\frac{AI}{AB} = \frac{3}{6}$. On retrouve $AJ = \frac{7 \times 3}{6} = 3{,}5$ et $IJ = \frac{8 \times 3}{6} = 4$.

Conclusion. $AJ = 3{,}5$ cm et $IJ = 4$ cm.

4. 1 pts

On place L sur $[AB]$ avec $AL = 2$ cm, et K sur $[AC]$ avec $AK = 2{,}4$ cm. Les droites (LK) et (BC) sont-elles parallèles ?

INDICE

Outil : compare les rapports en valeurs exactes. **Point délicat :** compare des valeurs exactes, pas des arrondis.

CORRIGÉ

Rapports. On a $\dfrac{AL}{AB} = \dfrac{2}{6}$ et $\dfrac{AK}{AC} = \dfrac{2{,}4}{7}$. On compare les valeurs exactes par les produits en croix :

$$2 \times 7 = 14$$
$$6 \times 2{,}4 = 14{,}4$$

Les produits sont différents, donc $\dfrac{AL}{AB} \neq \dfrac{AK}{AC}$.

Conclusion. D'après la conséquence du théorème de Thalès, les droites (LK) et (BC) ne sont pas parallèles.

Exercice 2 5 pts

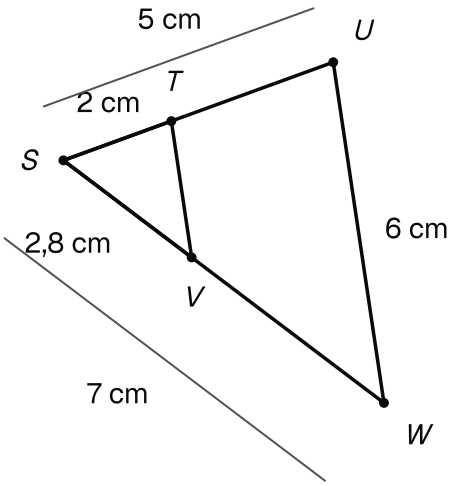
Un circuit de vélo sur une carte

Sur une carte, 1 cm représente 2 km. Deux routes droites partent du village S.

- Sur la première, les villages S, T, U sont alignés dans cet ordre.
- Sur la seconde, les villages S, V, W sont alignés dans cet ordre.

Sur la carte	ST	SU	SV	SW	UW
Longueur (cm)	2	5	$2{,}8$	7	6

Deux autres routes droites relient T à V, et U à W.



La carte : deux routes partent du village S, l'une par T et U, l'autre par V et W, reliées par [TV] et [UW].

1. 1,5 pts

Les droites (TV) et (UW) sont-elles parallèles ? Justifie.

INDICE

Outil : la réciproque du théorème de Thalès, avec le point commun S.

CORRIGÉ

Rapports. On a $\dfrac{ST}{SU} = \dfrac{2}{5}$ et $\dfrac{SV}{SW} = \dfrac{2{,}8}{7}$. Les produits en croix valent :

$$2 \times 7 = 14$$
$$5 \times 2{,}8 = 14$$

Ils sont égaux, donc $\dfrac{ST}{SU} = \dfrac{SV}{SW}$.

Ordre. D'après l'énoncé, les points S, T, U et S, V, W sont alignés dans le même ordre.

Conclusion. La réciproque du théorème de Thalès s'applique donc, et $(TV) \parallel (UW)$: les deux routes sont parallèles.

2. 1 pts

En déduire la longueur TV sur la carte.

INDICE

Outil : le théorème de Thalès. **Début :** $\dfrac{ST}{SU} = \dfrac{TV}{UW}$.

CORRIGÉ

D'après la question 1, $(TV) \parallel (UW)$, avec T sur $[SU]$ et V sur $[SW]$. Le théorème de Thalès dans le triangle SUW donne :

$$\frac{ST}{SU} = \frac{TV}{UW}$$

On a donc $\dfrac{2}{5} = \dfrac{TV}{6}$, et le produit en croix donne :

$$TV = \frac{2 \times 6}{5} = 2{,}4$$

Conclusion. Sur la carte, $TV = 2{,}4$ cm.

3. 1 pts

Quelle est la distance réelle entre les villages T et V ?

INDICE

Outil : 1 cm sur la carte représente 2 km.

CORRIGÉ

Sur la carte, 1 cm représente 2 km. On multiplie donc par 2 la longueur lue sur la carte :

$$2{,}4 \times 2 = 4{,}8$$

Conclusion. En réalité, les villages T et V sont distants de $4{,}8$ km.

4. 1,5 pts

Un cycliste part de T. Il suit les routes tracées sur la carte, en quatre tronçons : de T vers U, de U vers W, de W vers V, puis de V vers T. Calcule la longueur réelle de son circuit.

INDICE

Début : calcule d'abord TU et VW sur la carte. **Point délicat :** T est entre S et U, et V entre S et W.

CORRIGÉ

Longueurs des tronçons. Le point T est entre S et U, donc :

$$\begin{aligned} TU &= SU - ST \\ &= 5 - 2 = 3 \end{aligned}$$

De même, le point V est entre S et W, donc :

$$\begin{aligned} WV &= SW - SV \\ &= 7 - 2{,}8 = 4{,}2 \end{aligned}$$

On connaît aussi $UW = 6$ cm et, d'après la question 2, $VT = 2{,}4$ cm.

Longueur sur la carte. On ajoute les quatre tronçons :

$$\begin{aligned} &TU + UW + WV + VT \\ &= 3 + 6 + 4{,}2 + 2{,}4 \\ &= 15{,}6 \end{aligned}$$

Sur la carte, le circuit mesure $15{,}6$ cm.

Longueur réelle. On multiplie par 2 :

$$15{,}6 \times 2 = 31{,}2$$

Conclusion. Le circuit du cycliste mesure $31{,}2$ km en réalité.

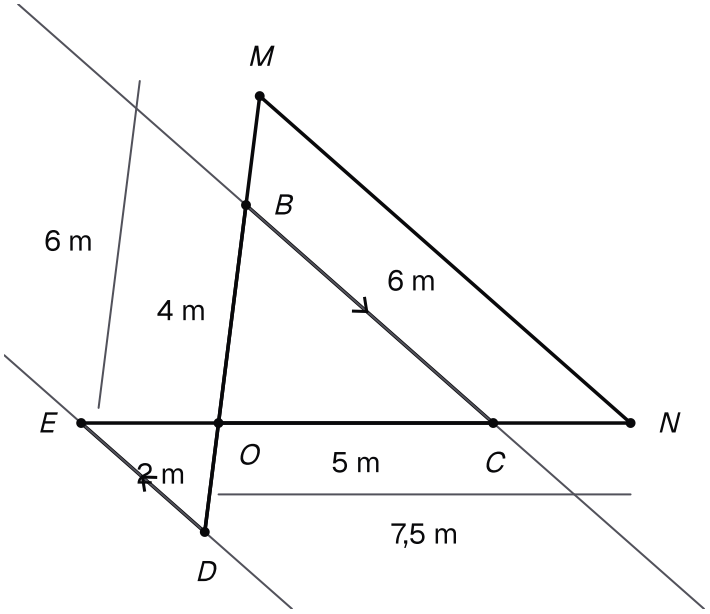
Exercice 3 5 pts

Les traverses d'un pont métallique

Dans la structure d'un pont, deux poutres droites se croisent en O.

- Sur la première poutre, les points D, O, B, M sont alignés dans cet ordre.
- Sur la seconde poutre, les points E, O, C, N sont alignés dans cet ordre.

Les traverses $[DE]$ et $[BC]$ sont parallèles. On donne $OB = 4$ m, $OC = 5$ m, $BC = 6$ m, $OD = 2$ m, $OM = 6$ m et $ON = 7{,}5$ m. Trace la figure, avec 1 cm pour 1 m.



Les deux poutres du pont se croisent en O ; les traverses [DE], [BC] et [MN] les relient.

1. 1,5 pts

Calcule OE et la longueur DE de la traverse.

INDICE

Outil : le théorème de Thalès. **Point délicat :** regarde l'ordre des points sur chaque poutre.

CORRIGÉ

Configuration. Les droites (DB) et (EC) se coupent en O. Le point O est entre D et B, et entre E et C : c'est une configuration papillon. De plus, $(DE) \parallel (BC)$.

Rapports. D'après le théorème de Thalès pour deux droites sécantes :

$$\frac{OD}{OB} = \frac{OE}{OC} = \frac{DE}{BC}$$

Avec les longueurs connues :

$$\frac{2}{4} = \frac{OE}{5} = \frac{DE}{6}$$

Calculs. Les produits en croix donnent :

$$OE = \frac{2 \times 5}{4} = 2{,}5$$
$$DE = \frac{2 \times 6}{4} = 3$$

Conclusion. $OE = 2{,}5$ m, et la traverse $[DE]$ mesure 3 m.

2. 1,5 pts

Les droites (BC) et (MN) sont-elles parallèles ? Justifie.

INDICE

Outil : la réciproque du théorème de Thalès. **Début :** compare $\frac{OB}{OM}$ et $\frac{OC}{ON}$.

CORRIGÉ

Rapports. On a $\frac{OB}{OM} = \frac{4}{6}$ et $\frac{OC}{ON} = \frac{5}{7{,}5}$. Les produits en croix valent :

$$4 \times 7{,}5 = 30$$
$$6 \times 5 = 30$$

Ils sont égaux, donc $\frac{OB}{OM} = \frac{OC}{ON}$.

Ordre. D'après l'énoncé, B est entre O et M, et C est entre O et N. Les points O, B, M et O, C, N sont donc alignés dans le même ordre.

Conclusion. On invoque alors la réciproque du théorème de Thalès, avec le point commun O : (BC) et (MN) sont parallèles.

3. 0,5 pts

En déduire que les droites (DE) et (MN) sont parallèles.

INDICE

Outil : rappel de 1re année sur deux droites parallèles à une même droite.

CORRIGÉ

D'après l'énoncé, $(DE) \parallel (BC)$. D'après la question 2, $(MN) \parallel (BC)$.

Les droites (DE) et (MN) sont donc parallèles à une même droite, (BC). Or deux droites parallèles à une même droite sont parallèles entre elles.

Conclusion. Les droites (DE) et (MN) sont parallèles.

4. 1,5 pts

Calcule la longueur MN, puis la longueur DM de poutre entre les traverses $[DE]$ et $[MN]$.

INDICE

Outil : le théorème de Thalès avec $(BC) \parallel (MN)$. **Ensuite :** O est entre D et M.

CORRIGÉ

Longueur MN. Les droites (BM) et (CN) se coupent en O, et $(BC) \parallel (MN)$ d'après la question 2. Le théorème de Thalès pour deux droites sécantes donne :

$$\frac{OM}{OB} = \frac{MN}{BC}$$

On a donc $\frac{6}{4} = \frac{MN}{6}$, et le produit en croix donne :

$$MN = \frac{6 \times 6}{4} = 9$$

Longueur DM. Le point O est entre D et M, donc les longueurs DO et OM s'ajoutent :

$$\begin{aligned} DM &= DO + OM \\ &= 2 + 6 = 8 \end{aligned}$$

Conclusion. La traverse $[MN]$ mesure 9 m, et la longueur de poutre DM vaut 8 m.

Exercice 4 5 pts

La hauteur d'un château d'eau, à la règle

Yasmine veut estimer la hauteur d'un château d'eau. Elle tient devant son œil une règle graduée, bien verticale. Elle vise le pied et le sommet du château d'eau. On représente la situation dans un plan vertical.

- O est l'œil de Yasmine.
- Le pied B du château d'eau est vu juste derrière le point P de la règle : les points O, P, B sont alignés dans cet ordre.
- Le sommet S est vu juste derrière le point Q de la règle : les points O, Q, S sont alignés dans cet ordre.
- La règle $[PQ]$ et le château d'eau $[BS]$ sont verticaux. Le sol est horizontal.

Longueur	OP	PQ	OB
Mesure	$0{,}5$ m	20 cm	40 m

OB est la distance de l'œil au pied du château d'eau. Dessine la situation à main levée, en y reportant ces mesures.

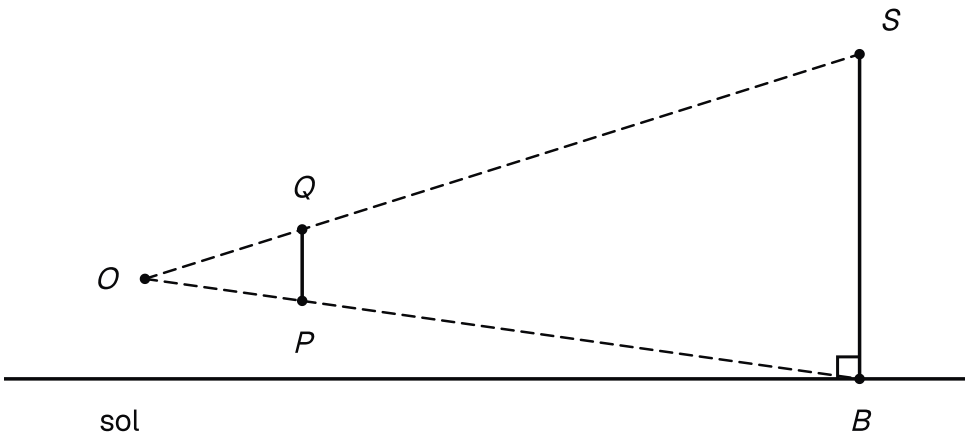


Schéma de la visée, sans échelle : l'œil O, la règle verticale [PQ] et le château d'eau [BS].

1. 1,5 pts

Nomme le point commun et les points alignés de cette configuration. Explique pourquoi les droites (PQ) et (BS) sont parallèles.

INDICE

Début : cherche le point par lequel passent les deux visées. **Outil :** rappel de 1re année : deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles.

CORRIGÉ

Configuration. Les deux visées (OB) et (OS) partent de l'œil de Yasmine : le point commun est O. Les points O, P, B sont alignés, ainsi que les points O, Q, S.

Comme P est sur $[OB]$ et Q sur $[OS]$, le petit triangle OPQ se trouve dans le triangle OBS.

Parallélisme. La règle $[PQ]$ et le château d'eau $[BS]$ sont verticaux. Ils sont donc perpendiculaires à la droite du sol qui passe par B. Or deux droites perpendiculaires à la même droite sont parallèles.

Conclusion. Le point commun est O, les points alignés sont O, P, B et O, Q, S, et $(PQ) \parallel (BS)$.

2. 1 pts

Dans le triangle OBS, quelle égalité de trois rapports le théorème de Thalès permet-il d'écrire ?

INDICE

Point délicat : les deux premiers rapports partent du point commun O, et les longueurs du petit triangle OPQ sont au numérateur.

CORRIGÉ

Dans le triangle OBS, le point P est sur $[OB]$ et le point Q sur $[OS]$. D'après la question 1, $(PQ) \parallel (BS)$.

Le théorème de Thalès dans le triangle OBS s'applique. Les deux premiers rapports partent de O, avec les longueurs du petit triangle OPQ au numérateur :

$$\frac{OP}{OB} = \frac{OQ}{OS} = \frac{PQ}{BS}.$$

Conclusion. C'est l'égalité des trois rapports que le théorème de Thalès permet d'écrire dans le triangle OBS.

3. 1 pts

En déduire la hauteur BS du château d'eau.

INDICE

Outil : garde les deux rapports où figurent trois longueurs connues. **Point délicat :** écris toutes les longueurs dans la même unité.

CORRIGÉ

Unités. On écrit toutes les longueurs en mètres : $PQ = 20$ cm, soit $0{,}2$ m.

Rapports. On garde le premier et le troisième rapport, qui contiennent trois longueurs connues : $\dfrac{OP}{OB} = \dfrac{PQ}{BS}$, soit :

$$\frac{0{,}5}{40} = \frac{0{,}2}{BS}$$

Calcul. Le produit en croix donne :

$$\begin{aligned} 0{,}5 \times BS &= 40 \times 0{,}2 \\ &= 8 \end{aligned}$$

On divise les deux membres par $0{,}5$:

$$BS = \frac{8}{0{,}5} = 16$$

Conclusion. Selon ce modèle, le château d'eau mesure 16 m de haut.

4. 1,5 pts

Yasmine s'approche du château d'eau. Elle tient toujours la règle verticale, avec $OP = 0{,}5$ m. Elle veut maintenant voir le château d'eau entier entre deux points P et Q de la règle distants de 25 cm. Quelle doit être la nouvelle distance OB ? De combien de mètres la distance OB diminue-t-elle ?

INDICE

Outil : la même égalité de rapports, avec la hauteur trouvée à la question 3. **Point délicat :** cette fois, la longueur inconnue est OB.

CORRIGÉ

Données. La configuration ne change pas, et on a toujours $(PQ) \parallel (BS)$. Cette fois, $PQ = 25$ cm, soit $0{,}25$ m, et $BS = 16$ m d'après la question 3. La longueur inconnue est OB.

Rapports. Le théorème de Thalès dans le triangle OBS donne $\dfrac{OP}{OB} = \dfrac{PQ}{BS}$, soit :

$$\frac{0{,}5}{OB} = \frac{0{,}25}{16}$$

Calcul. Le produit en croix donne :

$$\begin{aligned} 0{,}25 \times OB &= 0{,}5 \times 16 \\ &= 8 \end{aligned}$$

On divise les deux membres par $0{,}25$:

$$OB = \frac{8}{0{,}25} = 32$$

Différence. La distance OB passe de 40 m à 32 m. Elle diminue de :

$$40 - 32 = 8$$

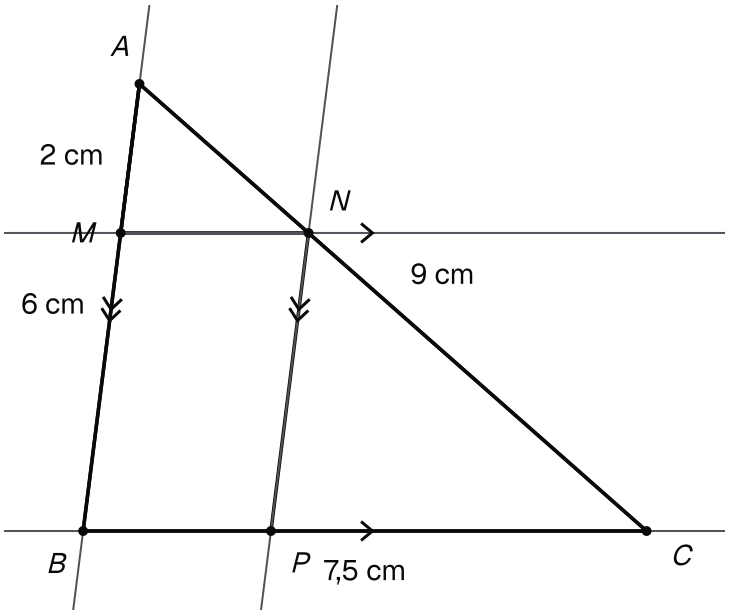
Conclusion. La nouvelle distance est $OB = 32$ m : elle diminue de 8 m.

Exercice 5 5 pts

Deux parallèles menées dans un même triangle

Soit ABC un triangle tel que $AB = 6$ cm, $AC = 9$ cm et $BC = 7{,}5$ cm. Le point M est sur le segment $[AB]$, avec $AM = 2$ cm.

La parallèle à (BC) qui passe par M coupe $[AC]$ en N. La parallèle à (AB) qui passe par N coupe $[BC]$ en P. Trace la figure.



Le triangle ABC avec ses deux parallèles : (MN) à (BC) et (NP) à (AB).

1. 1,5 pts

Calcule AN et MN.

INDICE

Outil : le théorème de Thalès dans le triangle ABC, avec le point commun A.

CORRIGÉ

Parallèle. Par construction, $(MN) \parallel (BC)$, avec M sur $[AB]$ et N sur $[AC]$.

Rapports. Le théorème de Thalès dans le triangle ABC, à partir du point commun A, donne :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

Avec les longueurs connues :

$$\frac{2}{6} = \frac{AN}{9} = \frac{MN}{7{,}5}$$

Calculs. Les produits en croix donnent :

$$AN = \frac{2 \times 9}{6} = 3$$
$$MN = \frac{2 \times 7{,}5}{6} = 2{,}5$$

Conclusion. $AN = 3$ cm et $MN = 2{,}5$ cm.

2. 1 pts

En déduire CN. Écris ensuite l'égalité des trois rapports du théorème de Thalès qui utilise $(NP) \parallel (AB)$.

INDICE

Point délicat : le point commun n'est plus A. Cherche le sommet par lequel passent les droites (CA) et (CB).

CORRIGÉ

Longueur CN. Le point N est entre A et C, donc :

$$\begin{aligned} CN &= AC - AN \\ &= 9 - 3 = 6 \end{aligned}$$

Nouvelle configuration. Les droites (CA) et (CB) se coupent en C : c'est le nouveau point commun. Le point N est sur $[CA]$, le point P sur $[CB]$, et $(NP) \parallel (AB)$.

Rapports. Le théorème de Thalès dans le triangle CAB donne :

$$\frac{CN}{CA} = \frac{CP}{CB} = \frac{NP}{AB}.$$

Conclusion. $CN = 6$ cm, et l'égalité des trois rapports, écrite à partir de C, est celle ci-dessus.

3. 1,5 pts

Calcule CP et NP, puis BP. Compare BP et MN.

INDICE

Début : remplace les longueurs connues dans l'égalité de la question 2. **Ensuite :** P est entre B et C.

CORRIGÉ

Rapports. On remplace dans l'égalité de la question 2, en centimètres : $CN = 6$, $CA = 9$, $CB = 7{,}5$ et $AB = 6$.

$$\frac{6}{9} = \frac{CP}{7{,}5} = \frac{NP}{6}$$

Calculs. Les produits en croix donnent :

$$CP = \frac{6 \times 7{,}5}{9} = 5$$
$$NP = \frac{6 \times 6}{9} = 4$$

Longueur BP. Le point P est entre B et C, donc :

$$\begin{aligned} BP &= BC - CP \\ &= 7{,}5 - 5 = 2{,}5 \end{aligned}$$

Conclusion. $CP = 5$ cm, $NP = 4$ cm et $BP = 2{,}5$ cm. On remarque que $BP = MN = 2{,}5$ cm.

4. 1 pts

Le point Q est sur $[BC]$, avec $BQ = 3$ cm. Les droites (NQ) et (AB) sont-elles parallèles ? Justifie.

INDICE

Début : calcule CQ. **Outil :** compare $\frac{CN}{CA}$ et $\frac{CQ}{CB}$ par le produit en croix, en valeurs exactes.

CORRIGÉ

Longueur CQ. Le point Q est entre B et C, donc :

$$\begin{aligned} CQ &= BC - BQ \\ &= 7{,}5 - 3 = 4{,}5 \end{aligned}$$

Rapports. On a $\frac{CN}{CA} = \frac{6}{9}$ et $\frac{CQ}{CB} = \frac{4{,}5}{7{,}5}$. Les produits en croix valent :

$$6 \times 7{,}5 = 45$$
$$9 \times 4{,}5 = 40{,}5$$

Ils sont différents, donc $\frac{CN}{CA} \neq \frac{CQ}{CB}$.

Conclusion. D'après la conséquence du théorème de Thalès, les droites (NQ) et (AB) ne sont pas parallèles.

Ce résultat s'accorde avec la question 3 : la parallèle à (AB) menée par N coupe $[BC]$ en P, avec $BP = 2{,}5$ cm, et non en Q, où $BQ = 3$ cm.