BURHAN

Le théorème de Thalès : exercices, entraînement

3ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/3ac/mathematiques/theoreme-de-thales/exercices/entrainement

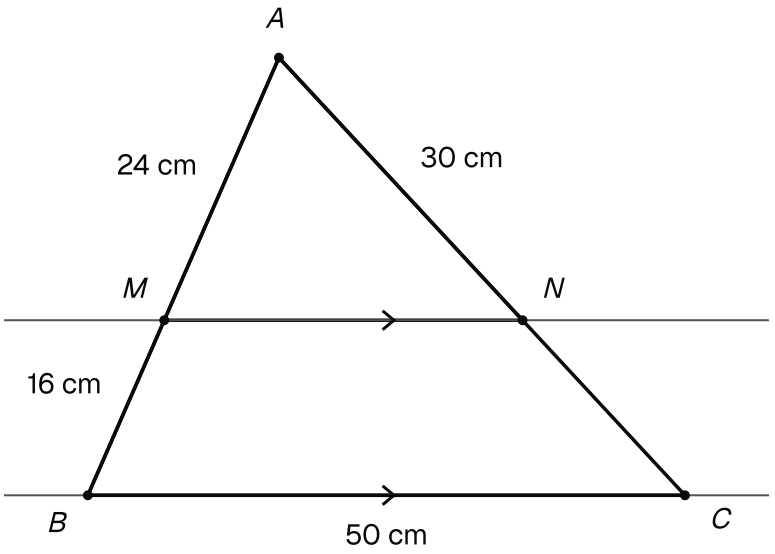
Chapitre	Palier	Exercices
Le théorème de Thalès	Entraînement	7

Exercice 1

Le rebord d'une étagère d'angle

Une étagère d'angle a la forme d'un triangle ABC. Un rebord va du point M, sur $[AB]$, au point N, sur $[AC]$. Les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

On donne $AM = 24$ cm, $MB = 16$ cm, $AN = 30$ cm et $BC = 50$ cm. Trace une figure à main levée et note les longueurs connues.



L'étagère ABC et son rebord [MN], parallèle à [BC] : AM = 24 cm, MB = 16 cm, AN = 30 cm et BC = 50 cm.

1.

Calcule AB.

INDICE

Outil : le point M est sur le segment $[AB]$.

CORRIGÉ

Le point M est sur le segment $[AB]$, donc les longueurs AM et MB s'ajoutent :

$$\begin{aligned} AB &= AM + MB \\ &= 24 + 16 = 40 \end{aligned}$$

Conclusion. Le côté $[AB]$ mesure 40 cm.

2.

Calcule AC, puis NC.

INDICE

Outil : le théorème de Thalès dans le triangle ABC. **Point délicat :** le rapport $\frac{AM}{MB}$ ne convient pas ; utilise $\frac{AM}{AB}$.

CORRIGÉ

Configuration. Dans le triangle ABC, le point M est sur $[AB]$ et le point N sur $[AC]$, avec $(MN) \parallel (BC)$.

Longueur AC. Le théorème de Thalès dans le triangle donne $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$. Avec $AB = 40$ cm, trouvé à la question 1 :

$$\frac{24}{40} = \frac{30}{AC}$$

Le produit en croix donne :

$$AC = \frac{40 \times 30}{24} = 50$$

Longueur NC. Le point N est sur $[AC]$, donc on retire AN à AC :

$$\begin{aligned} NC &= AC - AN \\ &= 50 - 30 = 20 \end{aligned}$$

Conclusion. $AC = 50$ cm et $NC = 20$ cm.

3.

Calcule la longueur MN du rebord.

INDICE

Outil : le troisième rapport $\frac{MN}{BC}$.

CORRIGÉ

La configuration de la question 2 n'a pas changé. On utilise cette fois le troisième rapport :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$$

Avec les longueurs connues, $\frac{24}{40} = \frac{MN}{50}$. Le produit en croix donne :

$$MN = \frac{24 \times 50}{40} = 30$$

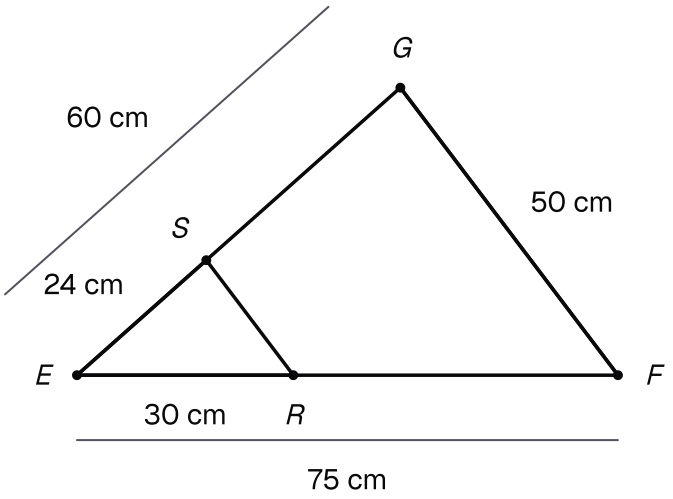
Conclusion. Le rebord $[MN]$ mesure 30 cm.

Exercice 2

Une planche sur le pignon d'une niche

Le pignon d'une niche de chien est un triangle EFG, avec $EF = 75$ cm, $EG = 60$ cm et $FG = 50$ cm.

Une planche relie le point R du segment $[EF]$ au point S du segment $[EG]$. On mesure $ER = 30$ cm et $ES = 24$ cm.



Le pignon EFG et la planche [RS] : ER = 30 cm, ES = 24 cm, avec les trois côtés du pignon.

1.

Justifie que les droites (RS) et (FG) sont parallèles.

INDICE

Outil : la réciproque du théorème de Thalès. **Début :** compare $\dfrac{ER}{EF}$ et $\dfrac{ES}{EG}$. **Point délicat :** n'oublie pas l'ordre des points.

CORRIGÉ

Rapports. On a $\dfrac{ER}{EF} = \dfrac{30}{75}$ et $\dfrac{ES}{EG} = \dfrac{24}{60}$. Leurs produits en croix sont :

$$30 \times 60 = 1800$$
$$75 \times 24 = 1800$$

Ils sont égaux, donc $\dfrac{ER}{EF} = \dfrac{ES}{EG}$.

Ordre. Le point R est sur $[EF]$ et le point S sur $[EG]$. Les points E, R, F et E, S, G sont donc alignés dans le même ordre.

Réciproque. Rapports égaux et points rangés de la même façon : la réciproque du théorème de Thalès s'applique.

Conclusion. Les droites (RS) et (FG) sont parallèles.

2.

En déduire la longueur RS de la planche.

INDICE

Outil : maintenant que le parallélisme est prouvé, le théorème de Thalès s'applique.

CORRIGÉ

D'après la question 1, $(RS) \parallel (FG)$, avec R sur $[EF]$ et S sur $[EG]$. Le théorème de Thalès dans le triangle EFG s'applique :

$$\frac{ER}{EF} = \frac{RS}{FG}$$

En remplaçant, $\frac{30}{75} = \frac{RS}{50}$. Le produit en croix donne :

$$RS = \frac{30 \times 50}{75} = 20$$

Conclusion. La planche $[RS]$ mesure 20 cm.

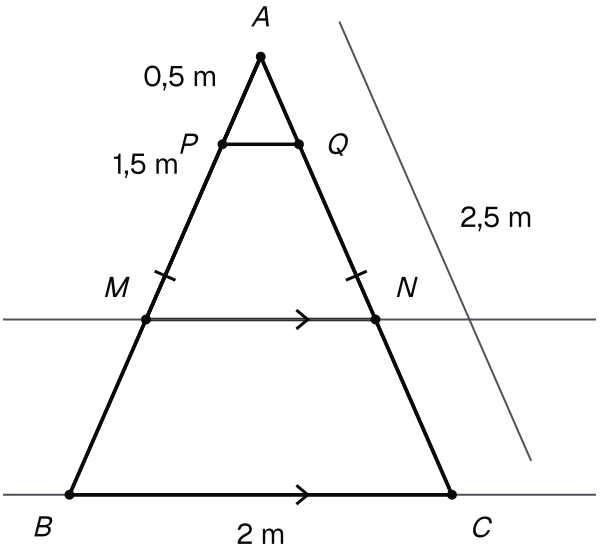
Exercice 3

Deux barres dans la façade d'une tente

La façade d'une tente est un triangle ABC, avec $AB = AC = 2{,}5$ m et $BC = 2$ m. Deux barres horizontales la renforcent.

- La barre $[MN]$: M est sur $[AB]$, N sur $[AC]$, avec $AM = 1{,}5$ m. Les droites (MN) et (BC) sont parallèles.
- La barre $[PQ]$: P est sur $[AM]$, Q sur $[AN]$, avec $AP = 0{,}5$ m. Les droites (PQ) et (MN) sont parallèles.

Trace la figure sur ton cahier, avec 4 cm pour 1 m.



La façade de la tente, isocèle en A, avec les deux barres horizontales [MN] et [PQ].

1.

Calcule la longueur MN.

INDICE

Outil : le théorème de Thalès dans le triangle ABC.

CORRIGÉ

Dans le triangle ABC, le point M est sur $[AB]$ et le point N sur $[AC]$. Comme $(MN) \parallel (BC)$, le théorème de Thalès dans le triangle donne :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$$

Avec les longueurs connues, $\frac{1{,}5}{2{,}5} = \frac{MN}{2}$. Le produit en croix donne :

$$MN = \frac{1{,}5 \times 2}{2{,}5} = 1{,}2$$

Conclusion. La barre $[MN]$ mesure $1{,}2$ m.

2.

Calcule la longueur PQ.

INDICE

Outil : une seconde configuration : le triangle AMN. **Point délicat :** ici, le grand triangle est AMN.

CORRIGÉ

On change de triangle : le grand triangle est maintenant AMN. Le point P est sur $[AM]$ et le point Q sur $[AN]$, avec $(PQ) \parallel (MN)$.

Le théorème de Thalès dans le triangle AMN donne :

$$\frac{AP}{AM} = \frac{PQ}{MN}$$

Avec $MN = 1{,}2$ m, trouvé à la question 1, on a $\frac{0{,}5}{1{,}5} = \frac{PQ}{1{,}2}$. Le produit en croix donne :

$$PQ = \frac{0{,}5 \times 1{,}2}{1{,}5} = 0{,}4$$

Conclusion. La barre $[PQ]$ mesure $0{,}4$ m.

3.

Justifie que les droites (PQ) et (BC) sont parallèles. Retrouve alors PQ dans le triangle ABC.

INDICE

Outil : rappel de 1re année : deux droites parallèles à une même droite sont parallèles entre elles.

CORRIGÉ

Parallélisme. Les droites (PQ) et (BC) sont toutes les deux parallèles à (MN). Or deux droites parallèles à une même droite sont parallèles entre elles. Donc $(PQ) \parallel (BC)$.

Position des points. Le segment $[AM]$ fait partie de $[AB]$, donc P est sur $[AB]$. De même, $[AN]$ fait partie de $[AC]$, donc Q est sur $[AC]$.

Contrôle. Le théorème de Thalès dans le triangle ABC donne $\dfrac{AP}{AB} = \dfrac{PQ}{BC}$, soit $\dfrac{0{,}5}{2{,}5} = \dfrac{PQ}{2}$. Le produit en croix donne :

$$PQ = \frac{0{,}5 \times 2}{2{,}5} = 0{,}4$$

Conclusion. Les droites (PQ) et (BC) sont parallèles, et le calcul dans le triangle ABC redonne bien $PQ = 0{,}4$ m.

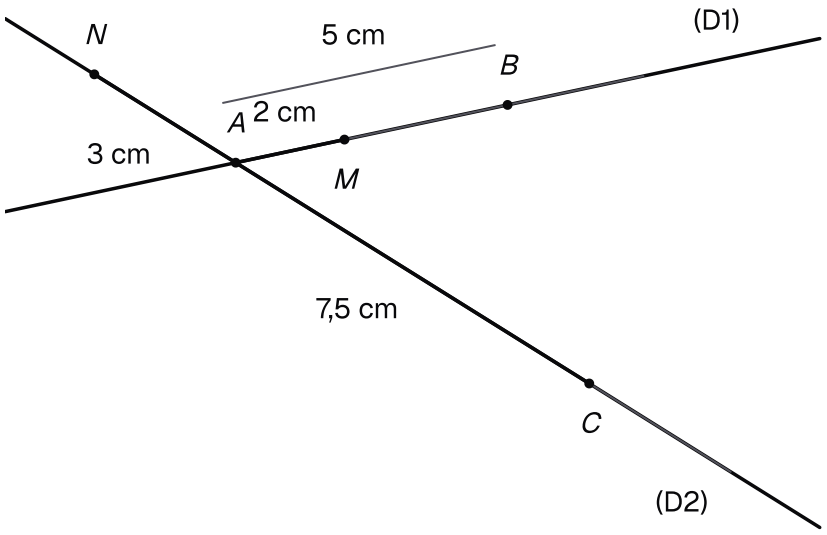
Exercice 4

Des rapports égaux, mais un ordre différent

Les droites (D_1) et (D_2) se coupent en A.

- Sur (D_1) : $AB = 5$ cm, et M est sur le segment $[AB]$ avec $AM = 2$ cm.
- Sur (D_2) : $AC = 7{,}5$ cm. Le point N est tel que A est entre N et C, avec $AN = 3$ cm.

Trace cette figure sur ton cahier.



Les droites (D1) et (D2) sécantes en A : M sur [AB], et N du côté opposé à C par rapport à A.

1.

Compare les rapports $\dfrac{AM}{AB}$ et $\dfrac{AN}{AC}$.

INDICE

Outil : le produit en croix.

CORRIGÉ

On a $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{2}{5}$ et $\dfrac{AN}{AC} = \dfrac{3}{7{,}5}$. Les produits en croix valent :

$$2 \times 7{,}5 = 15$$
$$5 \times 3 = 15$$

Conclusion. Les produits en croix sont égaux, donc $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$.

2.

Les points A, M, B et A, N, C sont-ils alignés dans le même ordre ?

INDICE

Point délicat : regarde de quel côté de A se trouve chaque point.

CORRIGÉ

Sur (D_1), le point M est entre A et B.

Sur (D_2), c'est le point A qui est entre N et C : les points N et C sont situés de chaque côté de A.

Conclusion. Non, les points ne sont pas alignés dans le même ordre. La réciproque du théorème de Thalès ne s'applique pas ici, bien que les rapports soient égaux.

3.

On place le point P sur le segment $[AC]$, avec $AP = 3$ cm. Justifie que les droites (MP) et (BC) sont parallèles.

INDICE

Outil : la réciproque du théorème de Thalès. **Début :** compare $\frac{AP}{AC}$ avec $\frac{AM}{AB}$, déjà calculé à la question 1.

CORRIGÉ

Rapports. On a $\frac{AP}{AC} = \frac{3}{7{,}5}$. Comme $AP = AN = 3$ cm, ce rapport est égal à $\frac{AN}{AC}$, donc à $\frac{AM}{AB}$ d'après la question 1 :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AP}{AC}$$

Ordre. Le point M est sur $[AB]$ et le point P sur $[AC]$. Les points A, M, B et A, P, C sont donc alignés dans le même ordre.

Conclusion. Rapports égaux et ordre respecté : on peut invoquer la réciproque du théorème de Thalès, qui donne $(MP) \parallel (BC)$.

4. a)

On veut montrer que les droites (MN) et (BC) ne sont pas parallèles. Suppose qu'elles le soient. Les droites (MN) et (MP) passent alors par M, et elles sont parallèles à (BC). Que peux-tu dire de ces deux droites ?

INDICE

Outil : rappel de 1re année : par un point, il passe une seule parallèle à une droite.

CORRIGÉ

On suppose que (MN) est parallèle à (BC). D'après la question 3, la droite (MP) est elle aussi parallèle à (BC).

Ces deux droites passent par le point M. Or, par un point, il ne passe qu'une seule parallèle à une droite donnée.

Conclusion. Les droites (MN) et (MP) seraient la même droite. Le point N serait donc sur la droite (MP).

4. b)

Explique pourquoi le point M n'est pas sur la droite (D_2). Combien de points communs ont alors les droites (MP) et (D_2) ?

INDICE

Début : les droites (D_1) et (D_2) n'ont qu'un point commun, le point A. **Point délicat :** deux droites distinctes ont au plus un point commun.

CORRIGÉ

Le point M. Le point M est sur (D_1), et il est différent de A puisque $AM = 2$ cm. Or A est le seul point commun aux droites (D_1) et (D_2). Donc M n'est pas sur (D_2).

Points communs. La droite (MP) passe par M, qui n'est pas sur (D_2) : les droites (MP) et (D_2) sont distinctes. Deux droites distinctes ont au plus un point commun.

Conclusion. Les droites (MP) et (D_2) ont un seul point commun : le point P, qui appartient aux deux.

4. c)

Conclus : les droites (MN) et (BC) sont-elles parallèles ?

INDICE

Début : d'après la question 4. a), N serait sur (MP) ; il est aussi sur (D_2). **Point délicat :** où sont N et P par rapport à A ?

CORRIGÉ

Contradiction. D'après la question 4. a), le point N serait sur (MP). Il est aussi sur (D_2). D'après la question 4. b), il serait donc le point P.

Or N et P sont de part et d'autre de A : ce sont deux points différents.

Conclusion. La supposition faite à la question 4. a) est fausse : les droites (MN) et (BC) ne sont pas parallèles.

Exercice 5

Une baguette partagée en sept parties égales

Une baguette de bois est représentée par un segment $[AB]$ de 10 cm. Tu veux la partager en sept morceaux de même longueur.

1.

Calcule la longueur exacte d'un morceau, puis sa valeur arrondie au dixième. Pourquoi est-il difficile de la reporter à la règle ?

INDICE

Début : divise 10 par 7. **Point délicat :** le quotient n'est pas un nombre décimal.

CORRIGÉ

Un morceau mesure le septième de 10 cm, soit $\frac{10}{7}$ cm. Arrondie au dixième, cette longueur vaut :

$$\frac{10}{7} \approx 1{,}4$$

Le quotient $\frac{10}{7}$ n'est pas un nombre décimal. La règle graduée n'en donne qu'une valeur approchée, et l'écart se répète à chaque report : les erreurs s'ajoutent d'un morceau à l'autre.

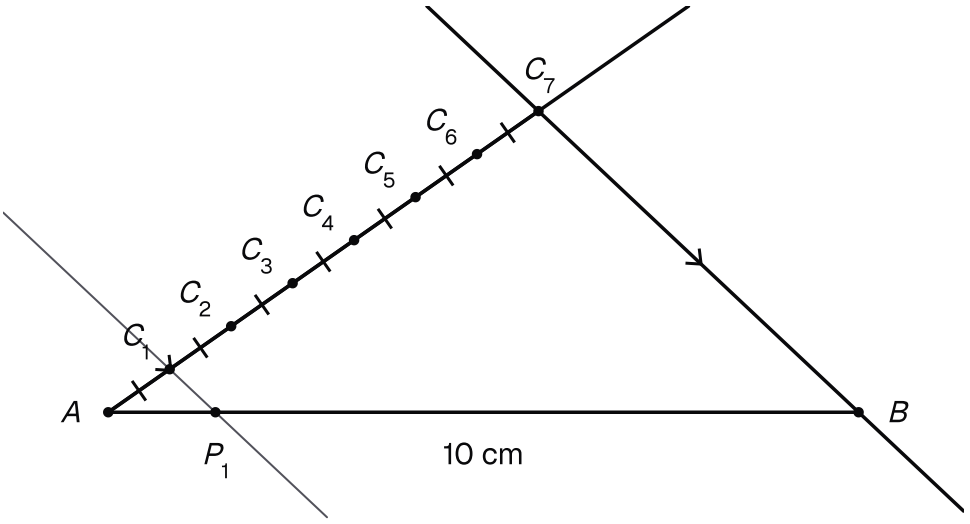
Conclusion. Un morceau mesure exactement $\frac{10}{7}$ cm, soit environ $1{,}4$ cm. Cette longueur n'est pas décimale : on ne peut pas la reporter exactement à la règle.

2.

Voici une construction.

1. Trace une demi-droite d'origine A qui n'est pas portée par la droite (AB).
2. Reporte dessus, à la suite à partir de A, sept segments de 1 cm. Tu obtiens les points C_1, C_2, ..., C_7, avec $AC_7 = 7$ cm.
3. Trace la droite (C_7B).
4. Trace la parallèle à (C_7B) qui passe par C_1. Elle coupe $[AB]$ en P_1.

Calcule AP_1.



La construction décrite : sept segments de 1 cm reportés depuis A, la droite (C7B), puis la parallèle menée par C1, qui coupe [AB] en P1.

INDICE

Outil : le théorème de Thalès dans le triangle AC_7B. **Début :** C_1 est sur $[AC_7]$ et P_1 sur $[AB]$.

CORRIGÉ

Configuration. Dans le triangle AC_7B, le point C_1 est sur $[AC_7]$ et le point P_1 sur $[AB]$. Par construction, $(C_1P_1) \parallel (C_7B)$.

Rapports. Le théorème de Thalès dans le triangle donne :

$$\frac{AC_1}{AC_7} = \frac{AP_1}{AB}$$

Avec $AC_1 = 1$ cm, $AC_7 = 7$ cm et $AB = 10$ cm, on a $\frac{1}{7} = \frac{AP_1}{10}$. Le produit en croix donne :

$$AP_1 = \frac{10}{7}$$

Conclusion. La longueur AP_1 vaut $\frac{10}{7}$ cm : c'est exactement la longueur d'un morceau.

3.

La parallèle à (C_7B) menée par C_3 coupe $[AB]$ en P_3. Calcule AP_3, en valeur exacte puis arrondie au dixième.

INDICE

Outil : la même configuration, avec $AC_3 = 3$ cm.

CORRIGÉ

Par construction, $(C_3P_3) \parallel (C_7B)$, avec C_3 sur $[AC_7]$ et P_3 sur $[AB]$. Le théorème de Thalès dans le triangle AC_7B donne :

$$\frac{AC_3}{AC_7} = \frac{AP_3}{AB}$$

On a donc $\frac{3}{7} = \frac{AP_3}{10}$, et le produit en croix donne :

$$AP_3 = \frac{30}{7}$$

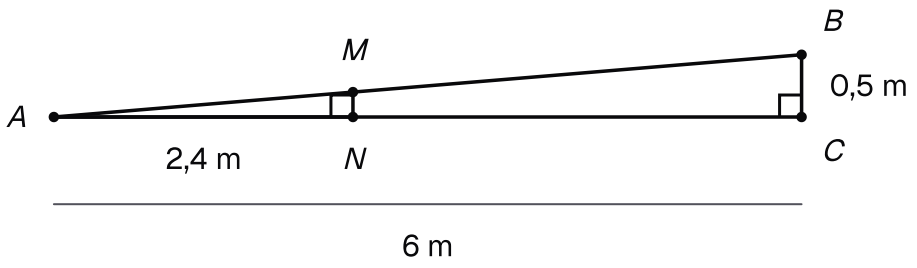
Conclusion. La longueur AP_3 vaut $\frac{30}{7}$ cm, soit $AP_3 \approx 4{,}3$ cm, valeur arrondie au dixième. C'est la longueur de trois morceaux.

Exercice 6

Les poteaux d'une rampe d'accès

Une rampe d'accès monte en ligne droite du point A, au sol, jusqu'au point B, sur le seuil d'une porte. Le point C est au sol, juste sous B : le seuil $[BC]$ est vertical, et $BC = 0{,}5$ m. Le sol est horizontal, avec $AC = 6$ m.

Des poteaux verticaux soutiennent la rampe. Un poteau a son pied N sur $[AC]$ et son sommet M sur $[AB]$, avec $AN = 2{,}4$ m.



La rampe [AB], le seuil vertical [BC] de 0,5 m et un poteau [MN] dont le pied N est à 2,4 m de A.

1.

Explique pourquoi les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

INDICE

Outil : rappel de 1re année : deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles.

CORRIGÉ

Le poteau $[MN]$ est vertical, tout comme le seuil $[BC]$. Le sol (AC) est horizontal : les droites (MN) et (BC) sont donc toutes les deux perpendiculaires à (AC).

Rappel de 1re année : deux droites qui ont une perpendiculaire commune sont parallèles entre elles.

Conclusion. Les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

2.

Calcule la hauteur MN de ce poteau.

INDICE

Outil : le théorème de Thalès dans le triangle ABC. **Début :** le point commun est A.

CORRIGÉ

Dans le triangle ABC, le point N est sur $[AC]$ et le point M sur $[AB]$. D'après la question 1, $(MN) \parallel (BC)$. Le théorème de Thalès dans le triangle donne :

$$\frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

Avec les longueurs connues, $\frac{2{,}4}{6} = \frac{MN}{0{,}5}$. Le produit en croix donne :

$$MN = \frac{2{,}4 \times 0{,}5}{6} = 0{,}2$$

Conclusion. Ce poteau mesure $0{,}2$ m de haut.

3.

Un autre poteau vertical mesure $0{,}35$ m. À quelle distance de A faut-il placer son pied ?

INDICE

Début : appelle N' son pied et M' son sommet. **Point délicat :** cette fois, la longueur cherchée est AN'.

CORRIGÉ

On note N' le pied de ce poteau et M' son sommet, avec $M'N' = 0{,}35$ m. Comme à la question 1, $(M'N') \parallel (BC)$.

Le théorème de Thalès dans le triangle ABC donne :

$$\frac{AN'}{AC} = \frac{M'N'}{BC}$$

On a donc $\frac{AN'}{6} = \frac{0{,}35}{0{,}5}$, et le produit en croix donne :

$$AN' = \frac{6 \times 0{,}35}{0{,}5} = 4{,}2$$

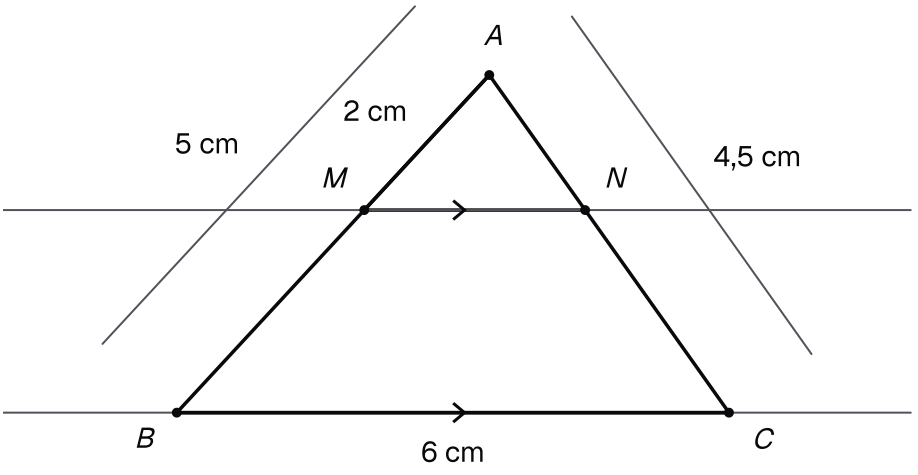
Conclusion. Il faut placer le pied de ce poteau à $4{,}2$ m de A.

Exercice 7

Une clôture sur le plan d'un terrain

Le plan d'un terrain triangulaire ABC est dessiné à l'échelle $\frac{1}{500}$. Sur le plan, $AB = 5$ cm, $AC = 4{,}5$ cm et $BC = 6$ cm.

Une clôture droite va du point M de $[AB]$ au point N de $[AC]$. Elle est parallèle au côté $[BC]$. Sur le plan, $AM = 2$ cm.



Le plan du terrain ABC et la clôture [MN], parallèle à [BC], avec les longueurs mesurées sur le plan.

1.

Calcule les longueurs MN et AN sur le plan.

INDICE

Outil : le théorème de Thalès dans le triangle ABC du plan.

CORRIGÉ

Dans le triangle ABC du plan, le point M est sur $[AB]$ et le point N sur $[AC]$, avec $(MN) \parallel (BC)$. Le théorème de Thalès dans le triangle donne :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

Avec les longueurs du plan :

$$\frac{2}{5} = \frac{AN}{4{,}5} = \frac{MN}{6}$$

Calculs. Les produits en croix donnent :

$$MN = \frac{2 \times 6}{5} = 2{,}4$$
$$AN = \frac{2 \times 4{,}5}{5} = 1{,}8$$

Conclusion. Sur le plan, $MN = 2{,}4$ cm et $AN = 1{,}8$ cm.

2.

Quelle est la longueur réelle de la clôture, en mètres ?

INDICE

Outil : rappel de 1re année : à l'échelle $\frac{1}{500}$, 1 cm sur le plan représente 500 cm en réalité.

CORRIGÉ

À l'échelle $\frac{1}{500}$, une longueur réelle vaut 500 fois la longueur mesurée sur le plan. En centimètres :

$$2{,}4 \times 500 = 1200$$

La clôture mesure donc 1200 cm. Comme 100 cm font 1 m, cela fait 12 m.

Conclusion. La longueur réelle de la clôture est 12 m.

3.

Calcule la longueur réelle du côté $[BC]$. Vérifie que le rapport $\dfrac{MN}{BC}$ est le même sur le plan et sur le terrain.

INDICE

Début : à l'échelle $\dfrac{1}{500}$, multiplie la longueur du plan par 500.

CORRIGÉ

Longueur réelle. On multiplie la longueur du plan par 500. En réalité, en centimètres :

$$BC = 6 \times 500 = 3000$$

Le côté $[BC]$ mesure 3000 cm, soit 30 m.

Rapports. Sur le plan, $\dfrac{MN}{BC} = \dfrac{2{,}4}{6}$. Sur le terrain, en mètres, $\dfrac{MN}{BC} = \dfrac{12}{30}$. On compare ces deux fractions par les produits en croix :

$$2{,}4 \times 30 = 72$$
$$6 \times 12 = 72$$

Conclusion. Le côté $[BC]$ mesure 30 m en réalité. Les produits en croix sont égaux : le rapport $\dfrac{MN}{BC}$ est le même sur le plan et sur le terrain.