BURHAN

Le théorème de Thalès : exercices, application

3ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/3ac/mathematiques/theoreme-de-thales/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Le théorème de Thalès	Application	8

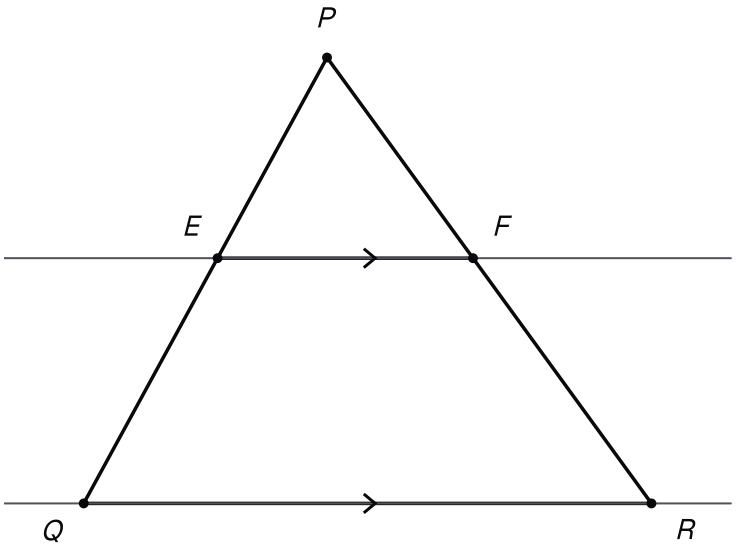
Exercice 1

Une bande peinte sur un panneau

Un panneau a la forme d'un triangle PQR. Une bande de peinture va du point E au point F.

Le point E est sur le segment $[PQ]$, et le point F sur le segment $[PR]$. La bande est parallèle au bord $[QR]$: les droites (EF) et (QR) sont parallèles.

Trace la figure sur ton cahier.



Le panneau triangulaire PQR traversé par la bande [EF], parallèle au bord [QR].

1.

Quel est le point commun aux droites (PQ) et (PR) ? Quels points sont alignés ?

INDICE

Outil : le point commun est le sommet d'où partent les deux côtés coupés par la bande.

CORRIGÉ

Les droites (PQ) et (PR) partent toutes les deux du sommet P : leur point commun est P.

Le point E est sur $[PQ]$, donc les points P, E, Q sont alignés. Le point F est sur $[PR]$, donc les points P, F, R sont alignés.

Conclusion. Le point commun est P. Les points alignés sont P, E, Q d'une part, et P, F, R d'autre part.

2.

Écris l'égalité des trois rapports donnée par le théorème de Thalès.

INDICE

Début : cite d'abord l'hypothèse de parallélisme. **Point délicat :** les deux premiers rapports partent de P.

CORRIGÉ

Dans le triangle PQR, le point E est sur le côté $[PQ]$ et le point F sur le côté $[PR]$.

L'hypothèse de parallélisme est vérifiée : les droites (EF) et (QR) sont parallèles. Le théorème de Thalès dans le triangle s'applique, avec des rapports qui partent de P :

$$\frac{PE}{PQ} = \frac{PF}{PR} = \frac{EF}{QR}.$$

Conclusion. Les trois rapports égaux sont $\frac{PE}{PQ}$, $\frac{PF}{PR}$ et $\frac{EF}{QR}$.

3.

Nadia écrit $\frac{PE}{PQ} = \frac{EF}{PR}$. Explique son erreur.

INDICE

Outil : le troisième rapport compare les deux segments parallèles.

CORRIGÉ

Le troisième rapport met face à face les deux segments parallèles, $[EF]$ et $[QR]$.

Nadia a écrit PR au dénominateur. Or le segment $[PR]$ n'est pas parallèle à $[EF]$: c'est l'un des côtés qui partent de P.

Conclusion. Nadia s'est trompée de dénominateur. L'égalité juste est :

$$\frac{PE}{PQ} = \frac{EF}{QR}$$

Exercice 2

La latte d'une voile de bateau

La voile d'un bateau a la forme d'un triangle ABC, avec $AB = 4$ m, $AC = 5{,}5$ m et $BC = 3$ m.

Une latte rigide va du point M, sur $[AB]$, au point N, sur $[AC]$. Les droites (MN) et (BC) sont parallèles. On mesure $AM = 1{,}6$ m.

1.

Trace la figure sur ton cahier, avec 1 cm pour 1 m.

INDICE

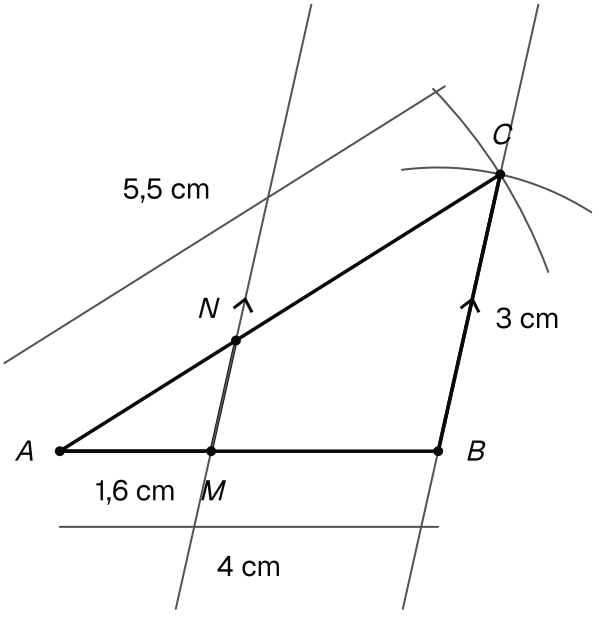
Début : trace d'abord le segment $[AB]$ de 4 cm. **Ensuite :** place C au compas, à $5{,}5$ cm de A et à 3 cm de B.

CORRIGÉ

On travaille avec 1 cm pour 1 m.

1. Trace le segment $[AB]$ de longueur 4 cm.
2. Trace un arc de centre A et de rayon $5{,}5$ cm, puis un arc de centre B et de rayon 3 cm. Ces deux arcs se coupent au point C.
3. Place le point M sur $[AB]$, à $1{,}6$ cm de A.
4. Trace la parallèle à (BC) qui passe par M. Elle coupe $[AC]$ au point N.

Conclusion. La figure représente la voile ABC et sa latte $[MN]$, parallèle au bord $[BC]$.



La voile tracée à l'échelle : [AB] de 4 cm, C au croisement de deux arcs de rayons 5,5 cm et 3 cm, M à 1,6 cm de A, puis la parallèle à (BC) qui donne N.

2.

Calcule la longueur AN.

INDICE

Outil : le théorème de Thalès dans le triangle. **Point délicat :** garde le rapport connu $\frac{AM}{AB}$ et celui qui contient AN.

CORRIGÉ

Configuration. Dans le triangle ABC, le point M est sur $[AB]$ et le point N sur $[AC]$. Les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

Rapports. D'après le théorème de Thalès dans le triangle, $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$. On remplace par les longueurs connues :

$$\frac{1{,}6}{4} = \frac{AN}{5{,}5}$$

Produit en croix. On en tire AN :

$$\begin{aligned} AN &= \frac{1{,}6 \times 5{,}5}{4} \\ &= \frac{8{,}8}{4} \\ &= 2{,}2 \end{aligned}$$

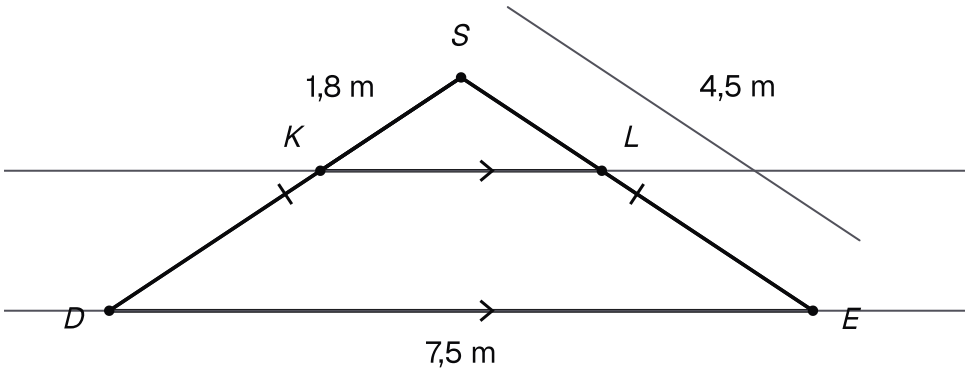
Conclusion. La longueur AN vaut $2{,}2$ m.

Exercice 3

L'entrait d'une charpente

La charpente d'un toit forme un triangle SDE. Le sommet du toit est S, et $[DE]$ est la poutre du bas. On a $SD = SE = 4{,}5$ m et $DE = 7{,}5$ m.

Une poutre horizontale, l'entrait, va de K à L. Le point K est sur $[SD]$, le point L sur $[SE]$, et les droites (KL) et (DE) sont parallèles. On donne $SK = 1{,}8$ m.



La charpente SDE, isocèle en S, avec l'entrait [KL] parallèle à la poutre du bas [DE].

1.

Calcule la longueur KL de l'entrait.

INDICE

Outil : le théorème de Thalès dans le triangle SDE. **Point délicat :** le troisième rapport est $\frac{KL}{DE}$.

CORRIGÉ

Configuration. Dans le triangle SDE, le point K est sur $[SD]$ et le point L sur $[SE]$. Les droites (KL) et (DE) sont parallèles.

Rapports. Le théorème de Thalès dans le triangle donne, à partir du sommet S :

$$\frac{SK}{SD} = \frac{SL}{SE} = \frac{KL}{DE}$$

On garde le premier et le troisième rapport, avec les longueurs connues :

$$\frac{1{,}8}{4{,}5} = \frac{KL}{7{,}5}$$

Produit en croix. On en tire KL :

$$\begin{aligned} KL &= \frac{1{,}8 \times 7{,}5}{4{,}5} \\ &= \frac{13{,}5}{4{,}5} \\ &= 3 \end{aligned}$$

Conclusion. L'entrait $[KL]$ mesure 3 m.

2.

Calcule SL. Compare avec SK : que remarques-tu ?

INDICE

Outil : les rapports $\frac{SK}{SD}$ et $\frac{SL}{SE}$ sont égaux. **Début :** ici, $SD = SE$.

CORRIGÉ

D'après la question 1, les deux premiers rapports sont égaux :

$$\frac{SL}{SE} = \frac{SK}{SD}$$

Ces deux fractions ont le même dénominateur, car $SE = SD = 4{,}5$ m. Leurs numérateurs sont donc égaux aussi : $SL = SK = 1{,}8$ m.

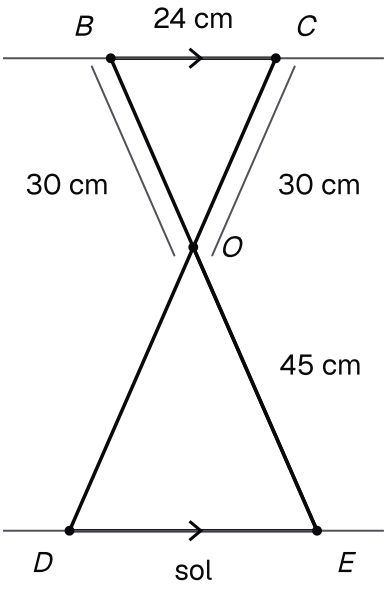
Conclusion. On trouve $SL = 1{,}8$ m, la même longueur que SK. Le petit triangle SKL est donc isocèle en S, comme le grand triangle SDE.

Exercice 4

Les pieds croisés d'une table de camping

On regarde une table de camping de côté. Ses deux pieds $[BE]$ et $[CD]$ se croisent en O. Le point O est entre B et E, et entre C et D. Le plateau $[BC]$ et le sol $[DE]$ sont horizontaux : les droites (BC) et (DE) sont parallèles.

Longueur	OB	OC	BC	OE
Mesure (cm)	30	30	24	45



La table vue de côté : les pieds [BE] et [CD] se croisent en O, entre le plateau [BC] et le sol [DE].

1.

Nomme le point commun et la configuration.

INDICE

Outil : regarde où se trouve O sur chaque pied.

CORRIGÉ

Les deux pieds $[BE]$ et $[CD]$ se croisent en O : le point commun est O.

Les points B, O, E sont alignés, avec O entre B et E. Les points C, O, D sont alignés, avec O entre C et D.

Conclusion. Le point commun est O, placé entre les deux autres points sur chaque pied : c'est une configuration papillon.

2.

Calcule la longueur DE.

INDICE

Outil : le théorème de Thalès pour deux droites sécantes. **Début :** les deux premiers rapports partent de O : $\frac{OE}{OB}$ et $\frac{OD}{OC}$.

CORRIGÉ

Configuration. Les droites (BE) et (CD) sont sécantes en O, et les droites (BC) et (DE) sont parallèles.

Rapports. D'après le théorème de Thalès pour deux droites sécantes, avec des rapports qui partent de O :

$$\frac{OE}{OB} = \frac{OD}{OC} = \frac{DE}{BC}$$

Avec les mesures du tableau, le premier et le troisième rapport donnent :

$$\frac{45}{30} = \frac{DE}{24}$$

Produit en croix. On en tire DE :

$$DE = \frac{45 \times 24}{30} = 36$$

Conclusion. La longueur DE vaut 36 cm.

3.

Calcule la longueur OD, puis la longueur CD du pied. Compare-la avec la longueur BE de l'autre pied.

INDICE

Outil : les mêmes rapports égaux. **Ensuite :** O est entre C et D, et entre B et E.

CORRIGÉ

Longueur OD. Les rapports de la question 2 donnent aussi $\frac{OD}{OC} = \frac{OE}{OB}$, soit :

$$\frac{OD}{30} = \frac{45}{30}$$

Le produit en croix donne :

$$OD = \frac{30 \times 45}{30} = 45$$

Longueur CD. Le point O est entre C et D, donc les longueurs CO et OD s'ajoutent :

$$\begin{aligned} CD &= CO + OD \\ &= 30 + 45 \\ &= 75 \end{aligned}$$

Comparaison. De même, le point O est entre B et E :

$$\begin{aligned} BE &= BO + OE \\ &= 30 + 45 \\ &= 75 \end{aligned}$$

Conclusion. $OD = 45$ cm et le pied $[CD]$ mesure 75 cm. Le pied $[BE]$ mesure aussi 75 cm : les deux pieds ont la même longueur.

Exercice 5

Comparer deux rapports sans arrondir

1.

Les rapports $\frac{2,8}{4}$ et $\frac{4,2}{6}$ sont-ils égaux ?

INDICE

Outil : le produit en croix. **Début :** calcule $2,8 \times 6$, puis $4 \times 4,2$.

CORRIGÉ

Deux rapports sont égaux lorsque leurs produits en croix sont égaux. Calculons ces produits :

$$2,8 \times 6 = 16,8$$
$$4 \times 4,2 = 16,8$$

Les deux produits ont la même valeur.

Conclusion. Oui, les rapports sont égaux : $\frac{2,8}{4} = \frac{4,2}{6}$.

2.

Les rapports $\frac{3,5}{6}$ et $\frac{4,2}{7,5}$ sont-ils égaux ?

INDICE

Outil : le même calcul. **Point délicat :** ne compare pas des valeurs arrondies.

CORRIGÉ

On calcule les deux produits en croix, sans rien arrondir :

$$3,5 \times 7,5 = 26,25$$
$$6 \times 4,2 = 25,2$$

Les deux produits sont différents, car $26,25 \neq 25,2$.

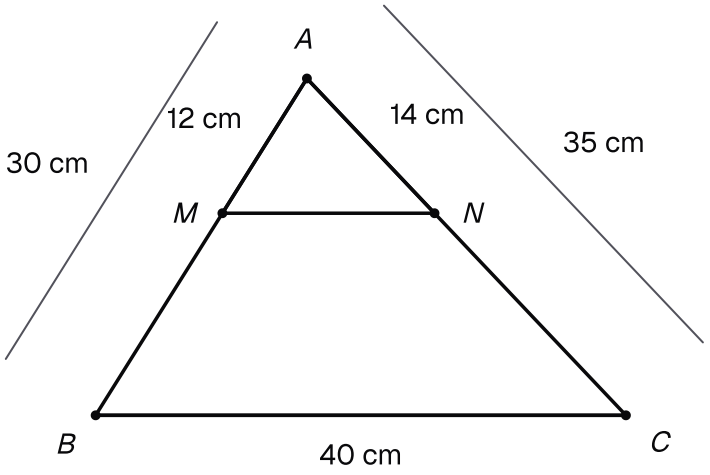
Conclusion. Non, les rapports ne sont pas égaux : $\frac{3,5}{6} \neq \frac{4,2}{7,5}$.

Exercice 6

La barre de renfort d'un pupitre

Vu de côté, le pied d'un pupitre forme un triangle ABC, avec $AB = 30$ cm, $AC = 35$ cm et $BC = 40$ cm.

Une barre de renfort relie le point M du segment $[AB]$ au point N du segment $[AC]$. On mesure $AM = 12$ cm et $AN = 14$ cm.



Le pied du pupitre : le triangle ABC et la barre de renfort [MN], avec les cinq longueurs mesurées.

1.

Compare les rapports $\dfrac{AM}{AB}$ et $\dfrac{AN}{AC}$.

INDICE

Outil : le produit en croix, avec les longueurs exactes.

CORRIGÉ

Avec les mesures de l'énoncé, $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{12}{30}$ et $\dfrac{AN}{AC} = \dfrac{14}{35}$.

On compare ces deux fractions par les produits en croix :

$$12 \times 35 = 420$$
$$30 \times 14 = 420$$

Conclusion. Les produits en croix sont égaux, donc $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$.

2.

La barre est-elle parallèle au côté $[BC]$? Justifie.

INDICE

Outil : la réciproque du théorème de Thalès. **Point délicat :** vérifie l'ordre des points.

CORRIGÉ

Rapports. D'après la question 1, $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$.

Ordre. Le point M est sur $[AB]$ et le point N sur $[AC]$. Les points A, M, B et A, N, C sont donc alignés dans le même ordre.

Réciproque. Les deux conditions sont remplies. D'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

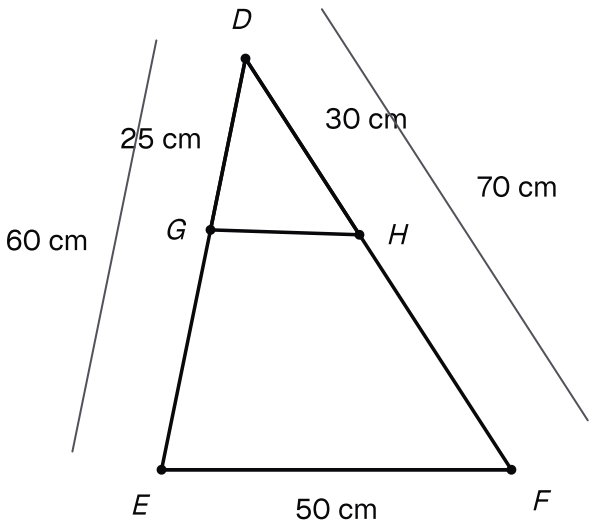
Conclusion. Oui, la barre de renfort $[MN]$ est parallèle au côté $[BC]$.

Exercice 7

La baguette d'un cerf-volant

Une partie de la toile d'un cerf-volant forme un triangle DEF, avec $DE = 60$ cm, $DF = 70$ cm et $EF = 50$ cm.

Une baguette va du point G, sur $[DE]$, au point H, sur $[DF]$. On mesure $DG = 25$ cm et $DH = 30$ cm.



La toile DEF du cerf-volant et la baguette [GH], avec DG = 25 cm et DH = 30 cm.

1.

La baguette $[GH]$ est-elle parallèle au bord $[EF]$? Justifie.

INDICE

Outil : compare $\dfrac{DG}{DE}$ et $\dfrac{DH}{DF}$ par le produit en croix. **Ensuite :** si les rapports diffèrent, cite la conséquence du théorème de Thalès.

CORRIGÉ

Rapports. On a $\dfrac{DG}{DE} = \dfrac{25}{60}$ et $\dfrac{DH}{DF} = \dfrac{30}{70}$.

Produits en croix. On les calcule avec les valeurs exactes :

$$25 \times 70 = 1750$$
$$60 \times 30 = 1800$$

Ils sont différents, donc $\dfrac{DG}{DE} \neq \dfrac{DH}{DF}$.

Parallélisme. Si les droites (GH) et (EF) étaient parallèles, ces deux rapports seraient égaux. D'après la conséquence du théorème de Thalès, les droites (GH) et (EF) ne sont donc pas parallèles.

Conclusion. Non, la baguette $[GH]$ n'est pas parallèle au bord $[EF]$.

2.

On garde G. On déplace H sur $[DF]$ pour que la baguette soit parallèle au bord $[EF]$. Calcule la nouvelle longueur DH.

INDICE

Outil : le théorème de Thalès dans le triangle DEF. **Début :** la nouvelle baguette est sur la parallèle à (EF) menée par G.

CORRIGÉ

Parallèle. La parallèle à (EF) menée par G coupe $[DF]$ au nouveau point H. Les droites (GH) et (EF) sont donc parallèles.

Rapports. Dans le triangle DEF, le point G est sur $[DE]$ et le point H sur $[DF]$. Le théorème de Thalès dans le triangle donne $\dfrac{DH}{DF} = \dfrac{DG}{DE}$, soit :

$$\frac{DH}{70} = \frac{25}{60}$$

Calcul. Le produit en croix donne :

$$\begin{aligned} DH &= \frac{70 \times 25}{60} \\ &= \frac{1750}{60} \\ &= \frac{175}{6} \end{aligned}$$

Conclusion. La nouvelle longueur est $\dfrac{175}{6}$ cm, soit $DH \approx 29{,}2$ cm, valeur arrondie au dixième.

Exercice 8

Construire une longueur sans la mesurer

On donne trois longueurs : $a = 3$ cm, $b = 4$ cm et $c = 4{,}5$ cm. On cherche la longueur x telle que $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{x}$.

1.

Calcule x.

INDICE

Outil : le produit en croix : $a \times x = b \times c$.

CORRIGÉ

La longueur x vérifie $\dfrac{3}{4} = \dfrac{4{,}5}{x}$. Le produit en croix donne :

$$3 \times x = 4 \times 4{,}5 = 18$$

On divise les deux membres par 3 :

$$x = \frac{18}{3} = 6$$

Conclusion. La longueur cherchée est $x = 6$ cm.

2.

Construis cette longueur sur ton cahier, sans calcul, puis justifie ta construction.

INDICE

Outil : la méthode de construction du cours, avec deux demi-droites d'origine A. **Début :** place B et M sur la première. **Point délicat :** sur quelle demi-droite places-tu C, et avec quelle longueur ?

CORRIGÉ

Construction.

1. Trace deux demi-droites d'origine A, qui ne sont ni confondues, ni dans le prolongement l'une de l'autre.
2. Sur la première, place B et M avec $AB = 3$ cm et $AM = 4{,}5$ cm.
3. Sur la seconde, place C avec $AC = 4$ cm.
4. Trace la droite (BC), puis la parallèle à (BC) menée par M. Elle coupe la seconde demi-droite en N.

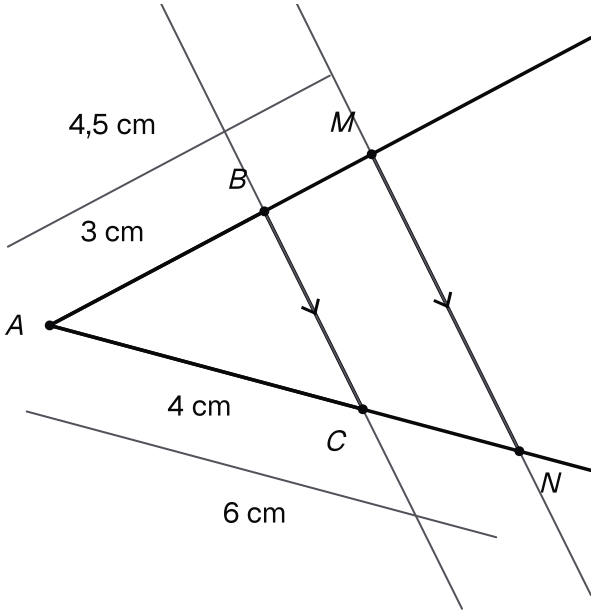
Justification. Les droites (BM) et (CN) se coupent en A, et le point B est entre A et M. Comme $(BC) \parallel (MN)$, le théorème de Thalès pour deux droites sécantes donne :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$

Avec les longueurs placées, $\frac{4{,}5}{3} = \frac{AN}{4}$. Le produit en croix donne :

$$AN = \frac{4 \times 4{,}5}{3} = 6$$

Conclusion. Le segment $[AN]$ mesure 6 cm : c'est la longueur x cherchée, construite sans la mesurer.



La construction corrigée : AB = 3 cm et AM = 4,5 cm sur une demi-droite, AC = 4 cm sur l'autre, et la parallèle à (BC) par M, qui donne AN = 6 cm.