BURHAN

Le théorème de Thalès

3ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/3ac/mathematiques/theoreme-de-thales/cours

Chapitre	Semestre
Le théorème de Thalès	Semestre 1

Mesurer sans grimper

Karim veut connaître la hauteur d'un arbre. Il ne peut pas grimper jusqu'en haut. Il a un bâton de $1{,}5$ m et un mètre ruban.

Le soleil brille. Sur le sol plat, l'arbre et le bâton ont chacun une ombre. Karim plante le bâton verticalement.

Il le déplace jusqu'à ce que le bout de son ombre tombe au bout de l'ombre de l'arbre. L'ombre du bâton mesure alors 2 m. L'ombre de l'arbre mesure 12 m.

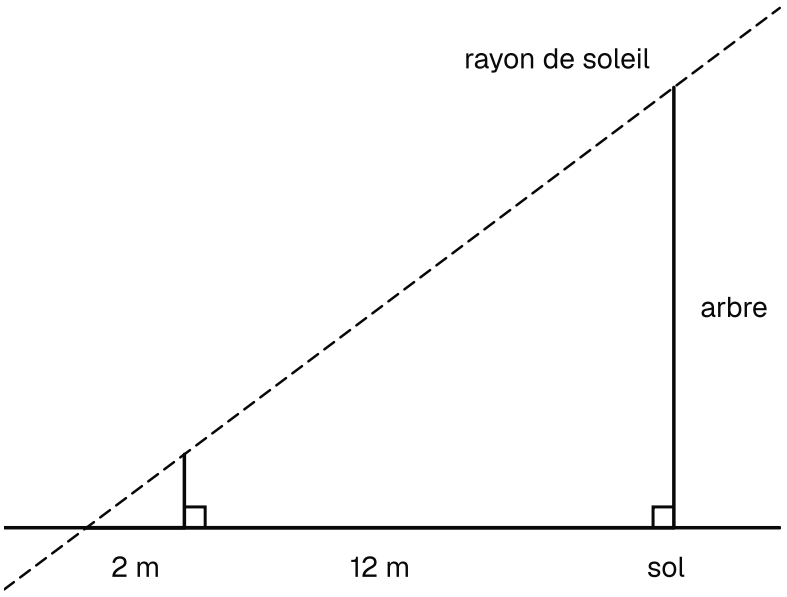


Schéma de la situation de Karim : le bâton et l'arbre se dressent sur le sol plat, et un même rayon de soleil frôle leurs deux sommets.

Devine : Une prédiction

Sans calculer longtemps, quelle hauteur prévois-tu pour l'arbre ?

A. $13{,}5$ m

Faux.

Tu as ajouté la longueur du bâton à l'ombre de l'arbre. Une hauteur ne s'obtient pas ainsi.

B. 16 m

> **Faux.**
> Tu as divisé dans le mauvais sens : $12 \times 2 \div 1{,}5 = 16$. Le bâton est plus court que son ombre ; l'arbre aussi.
>
> **C.** 9 m
> **Juste.**
> Juste : l'ombre de l'arbre est six fois plus longue, et l'arbre six fois plus haut.
>
> **D.** On ne peut pas savoir sans grimper.
> **Faux.**
> Les ombres suffisent. C'est tout l'intérêt de ce chapitre.
>
> **Correction**
> L'ombre de l'arbre mesure six fois l'ombre du bâton : $2 \times 6 = 12$.
>
> L'arbre semble donc six fois plus haut que le bâton : $1{,}5 \times 6 = 9$. Sa hauteur serait de 9 m.
>
> Pour l'instant, c'est une intuition. À la fin du chapitre, le théorème de Thalès la justifiera.

Dans ce chapitre, tu découvres le **théorème de Thalès**. Il relie les longueurs de deux triangles, un petit et un grand, quand deux droites sont parallèles. Grâce à lui, tu calcules des longueurs que tu ne peux pas mesurer.

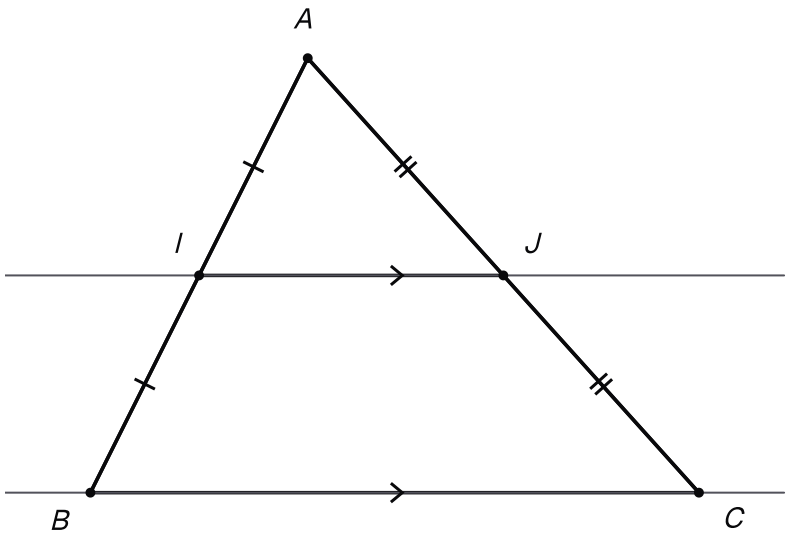
Tu apprends aussi à prouver que deux droites sont parallèles, ou qu'elles ne le sont pas. Enfin, tu construis des longueurs avec la règle et l'équerre.

Rappels : droite des milieux, droites parallèles et produit en croix

La droite des milieux

Rappel de 2e année : la droite des milieux. Soit ABC un triangle, I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[AC]$.

- La droite (IJ) est parallèle à la droite (BC).
- La longueur IJ est la moitié de la longueur BC.
- La parallèle à (BC) qui passe par I coupe le segment $[AC]$ en son milieu J.



La droite des milieux : I partage [AB] en deux, J partage [AC] en deux, et (IJ) est parallèle au côté (BC).

Vérifie : Un segment entre deux milieux

Dans un triangle ABC, on a $BC = 7{,}4$ cm. Le point I est le milieu de $[AB]$, et J celui de $[AC]$. Combien mesure IJ ?

A. $3{,}7$ cm

Juste.

Juste : IJ est la moitié de BC, et $7{,}4 \div 2 = 3{,}7$.

B. $7{,}4$ cm

Faux.

Le segment $[IJ]$ est plus court que $[BC]$: il en mesure la moitié.

C. $14{,}8$ cm

Faux.

Tu as multiplié par 2. Il fallait diviser par 2.

D. On ne peut pas savoir.

Faux.

La droite des milieux donne la réponse sans autre mesure.

Correction

D'après la propriété de la droite des milieux, IJ est la moitié de BC.

Donc $IJ = 7{,}4 \div 2 = 3{,}7$. Le segment $[IJ]$ mesure $3{,}7$ cm.

Des droites parallèles

Rappel de 1re année : les droites parallèles. Par un point donné, il passe une seule droite parallèle à une droite donnée. De plus, deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles entre elles.

Vérifie : Deux objets verticaux

Un poteau et un palmier sont droits et verticaux, sur un sol plat. Pourquoi les droites qui les portent sont-elles parallèles ?

A. Elles semblent parallèles sur une photo.

Faux.

Une impression ne prouve rien : il faut une propriété.

B. Le poteau et le palmier ont la même hauteur.

Faux.

La hauteur ne joue aucun rôle ici.

C. Elles sont perpendiculaires à la même droite du sol.

Juste.

Juste : deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles.

D. Elles se coupent sous le sol.

Faux.

Deux droites parallèles distinctes ne se coupent jamais.

Correction

Le poteau et le palmier sont verticaux. Dans le plan vertical qui les contient, leurs droites sont perpendiculaires à la droite du sol qui joint leurs pieds.

Or, quand deux droites sont perpendiculaires à une même droite, elles sont parallèles. Donc ces deux droites sont parallèles.

Le produit en croix

Rappel de 1re année : le produit en croix. Soit a, b, c et d des nombres, avec b et d non nuls.

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, alors $a \times d = b \times c$. Inversement, si $a \times d = b \times c$, les deux quotients sont égaux.

À toi : Deux produits en croix

Trouve x tel que $\frac{6}{x} = \frac{4}{7}$. Puis dis si $\frac{3}{5}$ et $\frac{7}{12}$ sont égaux. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Écris l'égalité des produits en croix.

Indice 2

Pour la première égalité, $4 \times x = 6 \times 7$.

Indice 3

Point délicat : pour comparer, calcule les deux produits 3×12 et 5×7.

Réponse

Valeur de x. Le produit en croix donne :

$$4 \times x = 6 \times 7 = 42$$
$$x = 42 \div 4 = 10{,}5$$

Les deux quotients. On a $3 \times 12 = 36$ et $5 \times 7 = 35$. Les produits en croix sont différents. Donc $\frac{3}{5}$ et $\frac{7}{12}$ ne sont pas égaux.

Thalès dans le triangle

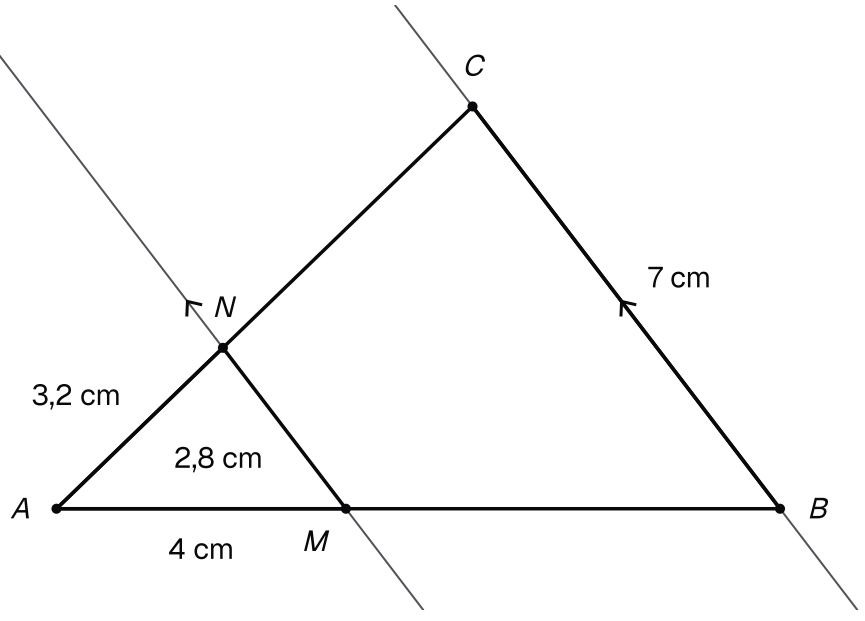
Une découverte par la mesure

Trace cette figure sur ton cahier, avec soin.

- Un triangle ABC tel que $AB = 10$ cm, $AC = 8$ cm et $BC = 7$ cm.
- Le point M du segment $[AB]$ tel que $AM = 4$ cm.
- La parallèle à (BC) qui passe par M. Elle coupe le segment $[AC]$ en un point : nomme-le N.

Mesure ensuite AN et MN. À un millimètre près, tu obtiens ce tableau, en centimètres.

Triangle	côté sur (AB)	côté sur (AC)	troisième côté
petit triangle AMN	$AM = 4$	$AN = 3{,}2$	$MN = 2{,}8$
grand triangle ABC	$AB = 10$	$AC = 8$	$BC = 7$



La figure de la découverte, avec les mesures du tableau : AM = 4 cm, AN = 3,2 cm, MN = 2,8 cm et BC = 7 cm.

Devine : Trois quotients

Calcule les quotients $\frac{AM}{AB}$, $\frac{AN}{AC}$ et $\frac{MN}{BC}$. Que remarques-tu ?

A. Ils sont de plus en plus grands.

Faux.

Calcule-les : $4 \div 10$, $3{,}2 \div 8$ et $2{,}8 \div 7$ donnent le même nombre.

B. Ils sont tous égaux à $0{,}4$.

Juste.

Juste : les trois quotients valent $0{,}4$.

C. Ils sont tous différents.

Faux.

Fais les trois divisions : elles donnent toutes le même nombre.

D. Seuls les deux premiers sont égaux.

Faux.

Le troisième aussi : $2{,}8 \div 7 = 0{,}4$.

Correction

On calcule chaque quotient :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{4}{10} = 0{,}4$$
$$\frac{AN}{AC} = \frac{3{,}2}{8} = 0{,}4$$
$$\frac{MN}{BC} = \frac{2{,}8}{7} = 0{,}4$$

Les trois quotients sont égaux.

Refais la figure avec $AM = 6$ cm. Tu mesures $AN = 4{,}8$ cm et $MN = 4{,}2$ cm : les trois quotients valent tous $0{,}6$.

Le théorème

Le quotient de deux longueurs s'appelle un **rapport**. Dans la découverte, les trois rapports sont égaux. Ce n'est pas un hasard : c'est vrai dès que les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

Théorème : Théorème de Thalès dans le triangle

Soit ABC un triangle. Soit M un point du segment $[AB]$ et N un point du segment $[AC]$, distincts de A.

Si les droites (MN) et (BC) sont **parallèles**, alors

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}.$$

Les longueurs des côtés du triangle AMN sont donc proportionnelles aux longueurs des côtés du triangle ABC.

Remarque : Admis

Ce résultat est admis.

Le point A est sur les droites (AB) et (AC) : c'est leur **point commun**. Les points A, M, B sont alignés, ainsi que A, N, C.

Une figure faite de deux droites qui se coupent en A et de deux droites parallèles s'appelle une **configuration de Thalès**. Les deux parallèles coupent les deux premières droites, mais ne passent pas par A.

Les deux premiers rapports partent de A. Le troisième compare les deux côtés parallèles, MN et BC.

Exemple : un tableau de proportionnalité

Reprends la figure de la découverte. Multiplie chaque côté du grand triangle par $0{,}4$:

$$10 \times 0{,}4 = 4$$
$$8 \times 0{,}4 = 3{,}2$$
$$7 \times 0{,}4 = 2{,}8$$

Tu obtiens les côtés du petit triangle.

Les longueurs des deux triangles forment donc un tableau de proportionnalité. Son coefficient est le rapport commun $0{,}4$.

Écrire les trois rapports

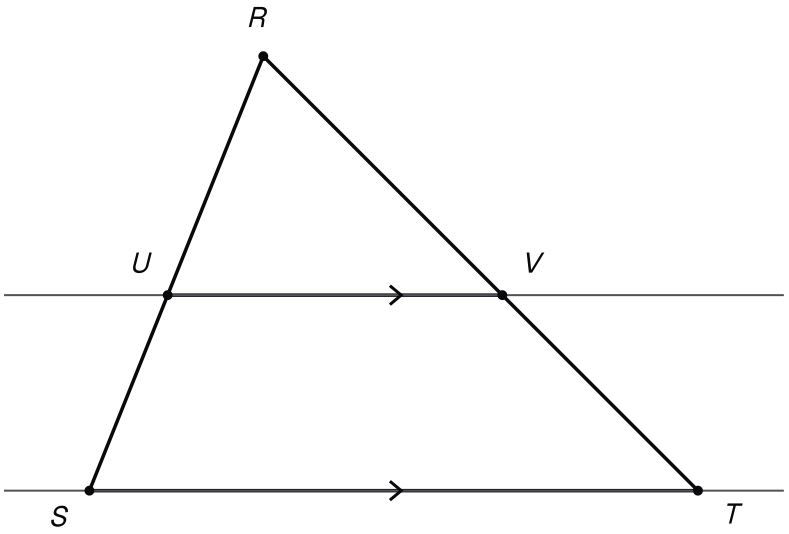
Exemple : écrire l'égalité des rapports

Soit RST un triangle. Le point U est sur le segment $[RS]$, et le point V sur le segment $[RT]$.

Le point commun est R. Les points R, U, S sont alignés, ainsi que R, V, T.

Les droites (UV) et (ST) sont parallèles. D'après le théorème de Thalès dans le triangle :

$$\frac{RU}{RS} = \frac{RV}{RT} = \frac{UV}{ST}.$$



Le triangle RST coupé par (UV) parallèle à (ST) : les deux premiers rapports partent du point commun R.

Vérifie : La bonne égalité

Soit EFG un triangle, K un point de $[EF]$ et L un point de $[EG]$. Les droites (KL) et (FG) sont parallèles. Quelle égalité est juste ?

A. $\dfrac{EK}{KF} = \dfrac{EL}{LG} = \dfrac{KL}{FG}$
Faux.
Le dénominateur KF n'est pas un côté du grand triangle. Le rapport $\dfrac{EK}{KF}$ n'est pas égal à $\dfrac{KL}{FG}$.

B. $\dfrac{EK}{EF} = \dfrac{EG}{EL} = \dfrac{KL}{FG}$
Faux.
Le deuxième rapport est écrit à l'envers : le petit triangle doit rester en haut.

C. $\dfrac{FK}{FE} = \dfrac{GL}{GE} = \dfrac{KL}{FG}$
Faux.
Ces rapports partent de F et de G, pas du point commun E : en général, ils ne sont pas égaux à $\dfrac{KL}{FG}$.

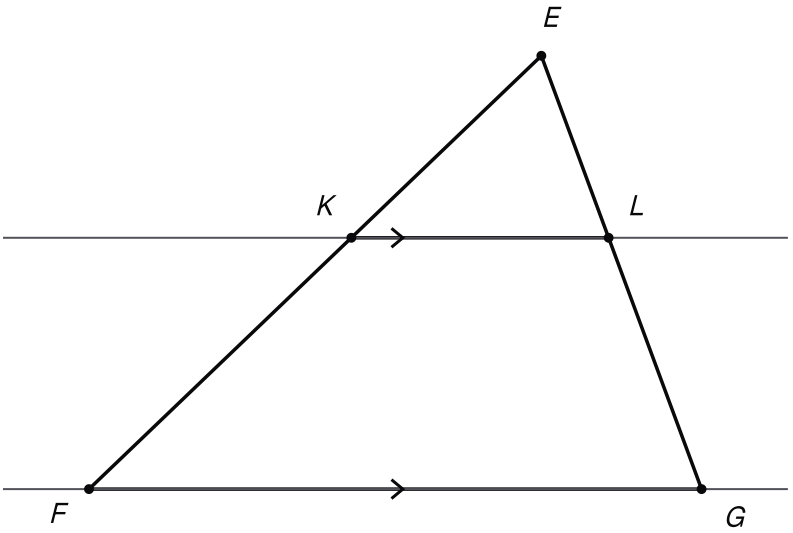
D. $\dfrac{EK}{EF} = \dfrac{EL}{EG} = \dfrac{KL}{FG}$
Juste.
Juste : les deux premiers rapports partent du point commun E.

Correction

Le point commun est E. Les points E, K, F sont alignés, ainsi que E, L, G.

Les droites (KL) et (FG) sont parallèles. D'après le théorème de Thalès dans le triangle :

$$\frac{EK}{EF} = \frac{EL}{EG} = \frac{KL}{FG}.$$



Les données de l'activité : K sur [EF], L sur [EG], et la droite (KL) parallèle à (FG).

Un piège, puis à toi

Attention : les rapports partent du point commun

✗ « $AM = 3$ cm et $MB = 6$ cm, donc $\frac{AM}{AB} = \frac{3}{6}$. »

✓ La longueur MB n'est pas AB. Le point M est sur le segment $[AB]$, donc :

$$AB = AM + MB = 3 + 6 = 9.$$

Le bon rapport est $\frac{AM}{AB} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$. Calcule toujours la longueur qui part du point commun.

Exemple : retourner les trois rapports

Retourner un rapport, c'est échanger son numérateur et son dénominateur : $\frac{AM}{AB}$ devient $\frac{AB}{AM}$.

Tu peux retourner les trois rapports en même temps. L'égalité reste vraie :

$$\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN}.$$

Dans la découverte, on obtient ainsi :

$$\frac{10}{4} = \frac{8}{3{,}2} = \frac{7}{2{,}8} = 2{,}5.$$

En revanche, ne retourne jamais un seul rapport.

Vérifie : Retourner ou non

Dans le triangle EFG de l'activité précédente, laquelle de ces égalités est juste ?

A. $\dfrac{EF}{EK} = \dfrac{EG}{EL}$
Juste.
Juste : les deux rapports sont retournés ensemble.

B. $\dfrac{EK}{EF} = \dfrac{EG}{EL}$
Faux.
Un seul rapport est retourné : l'égalité est fausse.

C. $EK + EF = EL + EG$
Faux.
Le théorème parle de rapports, pas de sommes. Sur la figure de la découverte, les sommes correspondantes valent $4 + 10 = 14$ et $3{,}2 + 8 = 11{,}2$.

D. $\dfrac{EK}{KL} = \dfrac{EF}{EG}$
Faux.
Cette égalité est fausse. Sur la figure de la découverte, ses produits en croix valent $4 \times 8 = 32$ et $2{,}8 \times 10 = 28$.

Correction
Les rapports $\dfrac{EK}{EF}$, $\dfrac{EL}{EG}$ et $\dfrac{KL}{FG}$ sont égaux. Les rapports retournés sont donc égaux aussi :

$$\frac{EF}{EK} = \frac{EG}{EL} = \frac{FG}{KL}.$$

Retourner un seul rapport rend l'égalité fausse.

À toi : Le bon rapport

Soit PQR un triangle. Le point S est sur $[PQ]$ et le point T sur $[PR]$. Les droites (ST) et (QR) sont parallèles. On donne $PS = 2$ cm et $SQ = 3$ cm.

1. Écris l'égalité des trois rapports.
2. Calcule le premier rapport.

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Trouve d'abord le point commun.
Indice 2

Les deux premiers rapports partent de P : ils commencent par PS et PT.

Indice 3

Point délicat : SQ n'est pas PQ. Calcule $PQ = PS + SQ$.

Réponse

1. L'égalité. Le point commun est P. Les points P, S, Q sont alignés, ainsi que P, T, R. Les droites (ST) et (QR) sont parallèles. D'après le théorème de Thalès dans le triangle :

$$\frac{PS}{PQ} = \frac{PT}{PR} = \frac{ST}{QR}.$$

2. Le premier rapport. Le point S est sur $[PQ]$, donc $PQ = 2 + 3 = 5$. Le premier rapport vaut $\frac{PS}{PQ} = \frac{2}{5}$.

Calculer une longueur avec le théorème de Thalès

Garder deux rapports

Le théorème de Thalès donne trois rapports égaux. Pour calculer une longueur, tu n'en gardes que deux. Le produit en croix fait le reste.

Devine : Quels rapports garder ?

Soit ABC un triangle, M un point de $[AB]$ et N un point de $[AC]$. Les droites (MN) et (BC) sont parallèles. On sait que $AM = 3$ cm, $AB = 5$ cm et $AC = 7$ cm. On cherche AN. Quelle égalité gardes-tu ?

A. $\frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$
Faux.
Les longueurs MN et BC sont inconnues : cette égalité ne permet pas de conclure.

B. $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$
Faux.
Cette égalité ne contient pas AN, la longueur cherchée.

C. $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$
Juste.
Juste : un rapport connu, et le rapport qui contient AN.

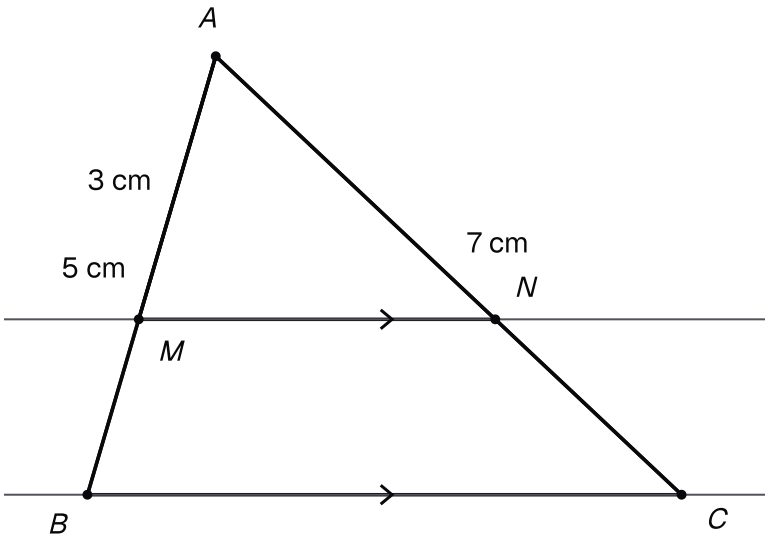
D. $\frac{AM}{AB} = \frac{AC}{AN}$
Faux.
Le second rapport est retourné : l'égalité est fausse.

Correction

Le rapport $\frac{AM}{AB} = \frac{3}{5}$ est connu. Le rapport $\frac{AN}{AC}$ contient la longueur cherchée. On garde donc l'égalité :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}.$$

Le rapport $\frac{MN}{BC}$ ne sert pas : MN et BC sont inconnues.



Les longueurs connues de l'activité : AM = 3 cm, AB = 5 cm et AC = 7 cm ; la longueur AN reste à trouver.

Méthode : calculer une longueur avec le théorème de Thalès

1. **Trouve** le point commun, puis les points alignés sur chaque droite.
2. **Cite** en toutes lettres l'hypothèse de parallélisme.
3. **Écris** l'égalité des trois rapports, en partant du point commun.
4. **Garde** deux rapports : un rapport connu, et celui qui contient la longueur cherchée.
5. **Calcule** la longueur par le produit en croix.
6. **Conclus** par une phrase, avec l'unité.

Trois longueurs dans une figure

Exemple : un côté du petit triangle

Soit EFG un triangle avec $EF = 8$ cm, $EG = 6$ cm et $FG = 12$ cm. Le point K est sur $[EF]$, avec $EK = 2$ cm.

Le point L est sur $[EG]$, et les droites (KL) et (FG) sont parallèles. Voici la figure à tracer sur ton cahier. On calcule ensuite EL.

Le point commun est E. Les points E, K, F sont alignés, ainsi que E, L, G.

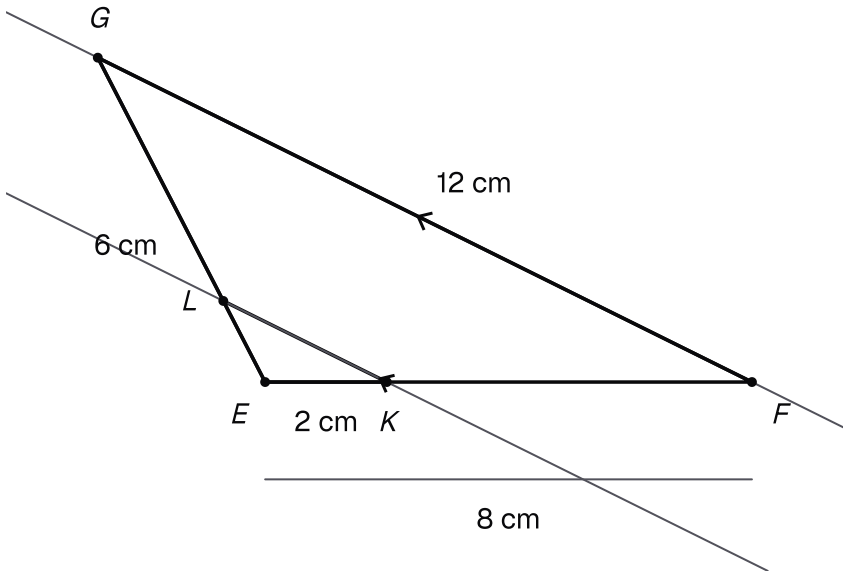
Les droites (KL) et (FG) sont parallèles. D'après le théorème de Thalès dans le triangle :

$$\frac{EK}{EF} = \frac{EL}{EG} = \frac{KL}{FG}.$$

On garde $\frac{EK}{EF} = \frac{EL}{EG}$, soit $\frac{2}{8} = \frac{EL}{6}$. Le produit en croix donne :

$$EL = \frac{6 \times 2}{8} = 1{,}5.$$

Donc $EL = 1{,}5$ cm.



La figure des trois exemples : EK = 2 cm, EF = 8 cm, EG = 6 cm, FG = 12 cm, et (KL) parallèle à (FG).

Exemple : la longueur de la parallèle

Dans la même figure, calcule KL.

On garde cette fois $\frac{EK}{EF} = \frac{KL}{FG}$, soit $\frac{2}{8} = \frac{KL}{12}$. Le produit en croix donne :

$$KL = \frac{12 \times 2}{8} = 3.$$

Donc $KL = 3$ cm.

Exemple : une longueur par différence

Toujours dans la même figure, calcule LG.

Le point L est sur le segment $[EG]$, donc $LG = EG - EL$:

$$LG = 6 - 1{,}5 = 4{,}5.$$

Ainsi $LG = 4{,}5$ cm. Le théorème donne EL ; une soustraction donne ensuite LG.

Calculer et rédiger

Vérifie : Le produit en croix

Reprends la figure de l'activité « Quels rapports garder ? ». Le point M est sur $[AB]$, le point N sur $[AC]$, et les droites (MN) et (BC) sont parallèles. On a $AM = 3$ cm, $AB = 5$ cm et $AC = 7$ cm. Calcule AN.

Indice 1

Pars de l'égalité $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$.

Indice 2

Remplace les longueurs connues : $\dfrac{3}{5} = \dfrac{AN}{7}$.

Réponse

Les droites (MN) et (BC) sont parallèles. D'après le théorème de Thalès dans le triangle, $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$, soit $\dfrac{3}{5} = \dfrac{AN}{7}$.

Le produit en croix donne $5 \times AN = 3 \times 7 = 21$. Donc :

$$AN = \frac{21}{5} = 4{,}2.$$

Le segment $[AN]$ mesure $4{,}2$ cm.

Trouve l'erreur : Le calcul de Yasmine

Pour la même figure, Yasmine écrit : $AN = \dfrac{AB \times AC}{AM} = \dfrac{5 \times 7}{3}$. Que penses-tu de son calcul ?

A. Elle n'a pas gardé les bons rapports.

Faux.

Les rapports gardés sont les bons. Le problème vient après.

B. Son produit en croix est faux.

Juste.

Juste : de $\dfrac{3}{5} = \dfrac{AN}{7}$, on tire $AN = \dfrac{3 \times 7}{5}$.

C. Elle a oublié de convertir les unités.

Faux.

Toutes les longueurs sont en centimètres : aucune conversion.

D. Son calcul est juste.

Faux.
Son résultat dépasse 11 cm. Or N est sur $[AC]$, donc AN est plus petit que $AC = 7$ cm.

Correction
De l'égalité $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$, le produit en croix donne $AB \times AN = AM \times AC$. Donc :

$$\begin{aligned} AN &= \frac{AM \times AC}{AB} \\ &= \frac{3 \times 7}{5} = 4{,}2 \end{aligned}$$

Yasmine a échangé AM et AB.

Un contrôle simple l'aurait alertée : N est sur $[AC]$, donc AN est plus petit que AC.

Exemple : Rédaction modèle

Soit RST un triangle, U un point de $[RS]$ et V un point de $[RT]$. Les droites (UV) et (ST) sont parallèles. On donne $RU = 3$ cm, $RS = 4$ cm et $RT = 6$ cm.

Voici le calcul de RV, une phrase par étape.

- Les points R, U, S sont alignés, ainsi que R, V, T.
- Les droites (UV) et (ST) sont parallèles.
- D'après le théorème de Thalès dans le triangle, $\dfrac{RU}{RS} = \dfrac{RV}{RT}$.
- Donc $\dfrac{3}{4} = \dfrac{RV}{6}$.
- Par produit en croix, $RV = \dfrac{6 \times 3}{4} = 4{,}5$.
- Donc $RV = 4{,}5$ cm.

Coin examen, puis à toi

Remarque : Coin examen : calculer une longueur

À l'examen, justifie chaque étape de ton calcul :

1. cite la configuration et l'hypothèse de parallélisme ;
2. nomme le théorème ;
3. écris les rapports, puis le produit en croix ;
4. conclus par une phrase, avec l'unité.

Contrôle enfin ton résultat. Dans la position « triangle », un côté du petit triangle est plus court que le côté du grand qui lui correspond.

À toi : Trois longueurs à calculer

On considère un triangle IJK et deux points P et Q.

- Le triangle a pour côtés $IJ = 10$ cm, $IK = 7$ cm et $JK = 9$ cm.
- Le point P est sur $[IJ]$, avec $IP = 4$ cm.
- Le point Q est sur $[IK]$, et les droites (PQ) et (JK) sont parallèles.

Calcule IQ, PQ, puis QK.

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Suis la méthode : point commun, hypothèse, égalité des trois rapports.
Indice 2
Garde $\frac{IP}{IJ} = \frac{IQ}{IK}$ pour IQ, puis $\frac{IP}{IJ} = \frac{PQ}{JK}$ pour PQ.
Indice 3
Point délicat : QK ne vient pas du théorème. Le point Q est sur $[IK]$, donc $QK = IK - IQ$.

Réponse
Les rapports. Le point commun est I. Les points I, P, J sont alignés, ainsi que I, Q, K. Les droites (PQ) et (JK) sont parallèles. D'après le théorème de Thalès dans le triangle :

$$\frac{IP}{IJ} = \frac{IQ}{IK} = \frac{PQ}{JK}.$$

On remplace les longueurs connues :

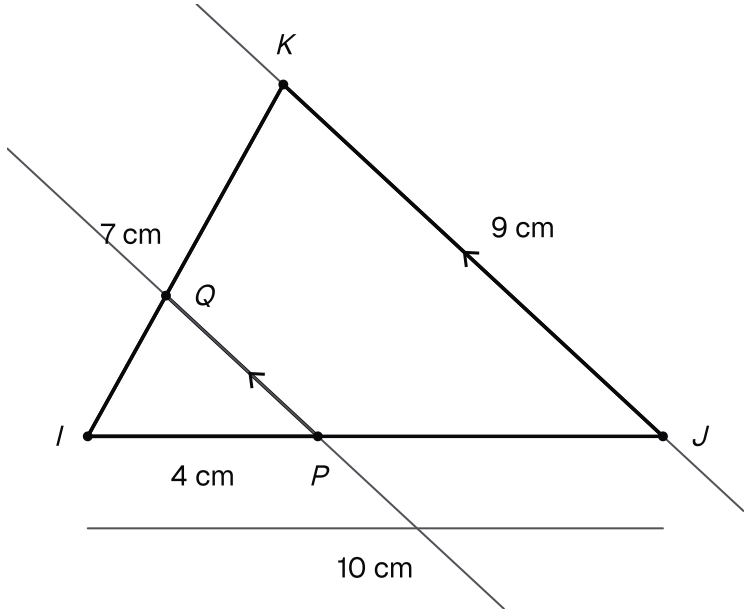
$$\frac{4}{10} = \frac{IQ}{7} = \frac{PQ}{9}.$$

Les longueurs IQ et PQ. Par produit en croix :

$$IQ = \frac{7 \times 4}{10} = 2{,}8$$
$$PQ = \frac{9 \times 4}{10} = 3{,}6$$

La longueur QK. Le point Q est sur $[IK]$, donc $QK = 7 - 2{,}8 = 4{,}2$.

Conclusion. $IQ = 2{,}8$ cm, $PQ = 3{,}6$ cm et $QK = 4{,}2$ cm.



Les données de l'exercice : IJ = 10 cm, IK = 7 cm, JK = 9 cm, IP = 4 cm, et (PQ) parallèle à (JK).

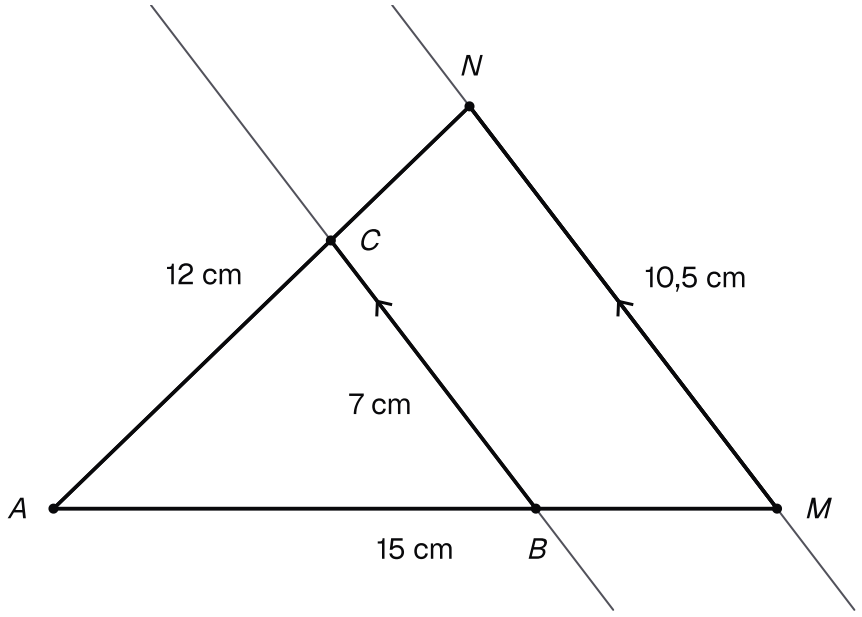
Théorème de Thalès pour deux droites sécantes : les autres positions

Au-delà du triangle

Reprends le triangle ABC de la découverte : $AB = 10$ cm, $AC = 8$ cm et $BC = 7$ cm. Prolonge le côté $[AB]$ au-delà de B.

Place sur la droite (AB) le point M tel que $AM = 15$ cm : le point B est entre A et M. Trace la parallèle à (BC) qui passe par M. Elle coupe la droite (AC) en N, et C est entre A et N.

À un millimètre près, tu mesures $AN = 12$ cm et $MN = 10{,}5$ cm.



Le côté [AB] prolongé au-delà de B jusqu'à M, avec AM = 15 cm : la parallèle à (BC) menée par M coupe (AC) en N, au-delà de C.

Devine : Les rapports hors du triangle

Calcule $\frac{AM}{AB}$, $\frac{AN}{AC}$ et $\frac{MN}{BC}$. Que deviennent les trois rapports ?

A. Ils ne sont plus égaux, car M est hors du triangle.

Faux.

Fais les divisions : $15 \div 10$, $12 \div 8$ et $10{,}5 \div 7$ donnent le même nombre.

B. Ils valent encore $0{,}4$, comme avant.

Faux.

Ici AM dépasse AB : chaque rapport est plus grand que 1.

C. Seuls les deux premiers rapports sont égaux.

Faux.

Le troisième aussi : $10{,}5 \div 7 = 1{,}5$.

D. Ils sont tous égaux à $1{,}5$.

Juste.
Juste : les trois rapports valent $1{,}5$.

Correction
On a $\frac{AM}{AB} = \frac{15}{10} = 1{,}5$, puis $\frac{AN}{AC} = \frac{12}{8} = 1{,}5$, et $\frac{MN}{BC} = \frac{10{,}5}{7} = 1{,}5$. Les trois rapports restent égaux. Ils sont plus grands que 1, car le triangle AMN est plus grand que le triangle ABC.

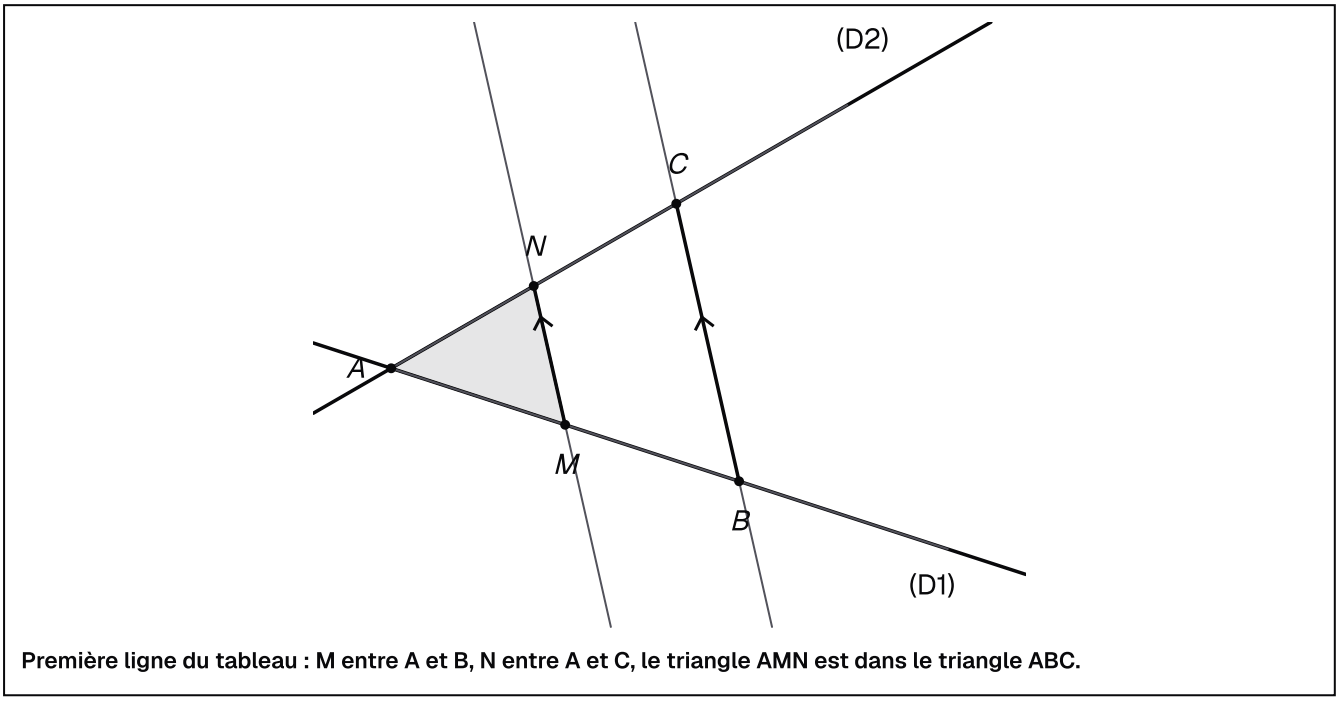
Dans cette figure, les droites (AB) et (AC) se coupent en un seul point, A. On dit qu'elles sont **sécantes** en A.

Pour parler de toutes les figures à la fois, on nomme ces deux droites (D_1) et (D_2). Ici, (D_1) est la droite (AB) et (D_2) est la droite (AC).

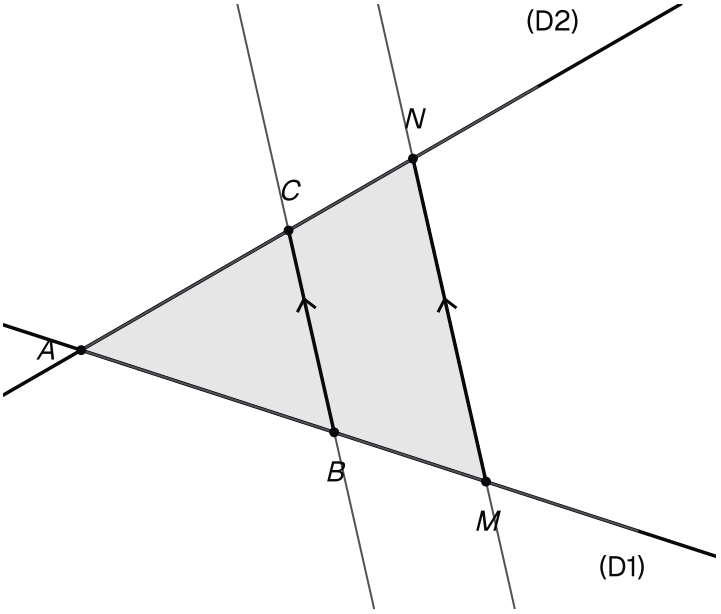
Sur (D_1), le point M peut occuper trois positions. Le point N suit sur (D_2).

Position de M sur (D_1)	Position de N sur (D_2)	Ce que tu vois
M est entre A et B	N est entre A et C	le petit triangle AMN est dans le triangle ABC
B est entre A et M	C est entre A et N	le triangle AMN dépasse le triangle ABC
A est entre B et M	A est entre C et N	les deux triangles sont de part et d'autre de A

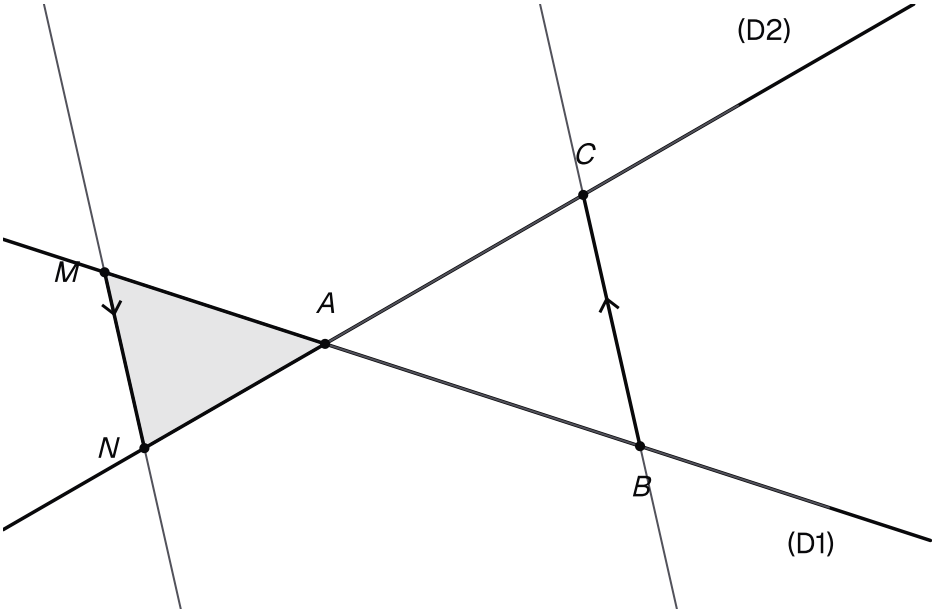
La dernière figure s'appelle la configuration **papillon**. Ses deux triangles se touchent seulement en A.



Première ligne du tableau : M entre A et B, N entre A et C, le triangle AMN est dans le triangle ABC.



Deuxième ligne du tableau : B entre A et M, C entre A et N, le triangle AMN dépasse le triangle ABC.



Troisième ligne du tableau, la configuration papillon : A entre B et M, A entre C et N.

Le théorème pour deux droites sécantes

Théorème : Théorème de Thalès pour deux droites sécantes

Soit (D_1) et (D_2) deux droites sécantes en un point A. Soit B et M deux points de (D_1), et C et N deux points de (D_2), tous distincts de A.

Si les droites (BC) et (MN) sont **parallèles**, alors

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}.$$

Le théorème vaut quelle que soit la position de M sur (D_1) : entre A et B, au-delà de B, ou de l'autre côté de A. Le théorème de Thalès dans le triangle en est un cas particulier.

Remarque : Admis

Ce résultat est admis.

Vérifie : Reconnaître la configuration

Deux droites sont sécantes en A. Sur la première, les points sont dans l'ordre B, A, M. Sur la seconde, ils sont dans l'ordre C, A, N. Les droites (BC) et (MN) sont parallèles. Quelle configuration est-ce ?

A. La configuration papillon.
Juste.
Juste : A est entre B et M, et entre C et N.

B. Le petit triangle dans le grand.
Faux.
Pour cela, M devrait être entre A et B.

C. Un point M au-delà de B.
Faux.
Pour cela, B devrait être entre A et M.

D. Ce n'est pas une configuration de Thalès.
Faux.
Deux droites sécantes en A et deux parallèles : c'est bien une configuration de Thalès.

Correction
Sur la première droite, A est entre B et M. Sur la seconde, A est entre C et N. Les triangles ABC et AMN sont de part et d'autre de A : c'est la configuration papillon. Le théorème de Thalès pour deux droites sécantes s'applique.

Deux exemples et un piège

Exemple : un point sur le prolongement

Deux droites sont sécantes en A. Sur la première, B est entre A et M, avec $AB = 4$ cm et $AM = 6$ cm. Sur la seconde, C est entre A et N, avec $AC = 5$ cm.

On donne $BC = 6$ cm, et les droites (BC) et (MN) sont parallèles. D'après le théorème de Thalès pour deux droites sécantes :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}.$$

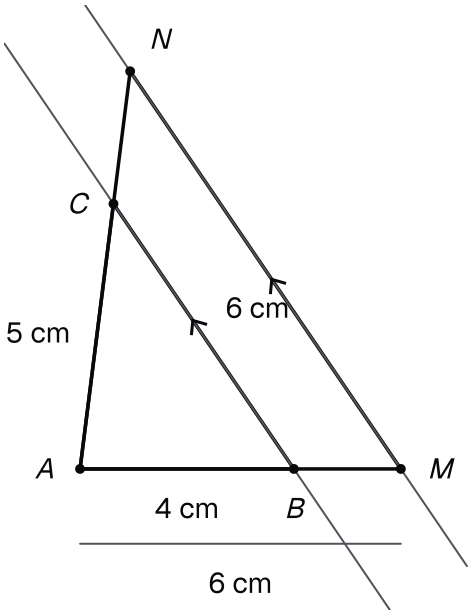
Avec les longueurs connues, cela donne :

$$\frac{6}{4} = \frac{AN}{5} = \frac{MN}{6}.$$

Par produit en croix :

$$AN = \frac{5 \times 6}{4} = 7{,}5$$
$$MN = \frac{6 \times 6}{4} = 9$$

Donc $AN = 7{,}5$ cm et $MN = 9$ cm.



L'exemple du prolongement : AB = 4 cm, AM = 6 cm, AC = 5 cm, BC = 6 cm, et les droites (BC) et (MN) parallèles.

Exemple : la configuration papillon

Deux droites sont sécantes en A. Sur la première, A est entre B et M, avec $AB = 6$ cm et $AM = 4$ cm. Sur la seconde, A est entre C et N, avec $AC = 7{,}5$ cm.

On donne $BC = 9$ cm, et les droites (BC) et (MN) sont parallèles. D'après le théorème de Thalès pour deux droites sécantes :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}.$$

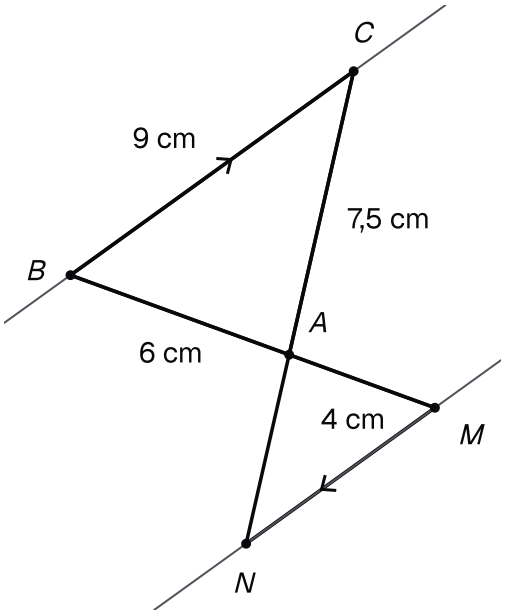
On y place les longueurs connues :

$$\frac{4}{6} = \frac{AN}{7{,}5} = \frac{MN}{9}.$$

Par produit en croix :

$$AN = \frac{7{,}5 \times 4}{6} = 5$$
$$MN = \frac{9 \times 4}{6} = 6$$

Donc $AN = 5$ cm et $MN = 6$ cm.



Les données de l'exemple papillon : AB = 6 cm, AM = 4 cm, AC = 7,5 cm et BC = 9 cm, de part et d'autre du point commun A.

Attention : une somme ou une différence ?

✗ « Dans l'exemple papillon, $BM = AM - AB$. »

✓ Regarde l'ordre des points avant de calculer BM.

- Si M est entre A et B : $BM = AB - AM$.
- Si B est entre A et M : $BM = AM - AB$.
- Si A est entre B et M : $BM = BA + AM$.

Dans l'exemple papillon, A est entre B et M. Donc :

$$BM = BA + AM = 6 + 4 = 10.$$

Ainsi $BM = 10$ cm.

Le même outil, puis à toi

Remarque : une seule méthode

Le théorème de Thalès dans le triangle correspond au cas où M est entre A et B. Pour les trois positions, la méthode de calcul ne change pas. Seule la description de la figure change : précise toujours l'ordre des points.

Vérifie : Un calcul au-delà du triangle

Deux droites sont sécantes en A. Sur la première, B est entre A et M, avec $AB = 3$ cm et $AM = 7{,}5$ cm. Sur la seconde, C est entre A et N, avec $AC = 4$ cm. Les droites (BC) et (MN) sont parallèles. Calcule AN, puis CN.

Indice 1

Ici B est entre A et M : écris l'égalité $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$.

Indice 2

Le produit en croix donne $3 \times AN = \ldots$; complète.

Indice 3

Point délicat : C est entre A et N. Que vaut alors CN ?

Réponse

Les droites (BC) et (MN) sont parallèles. D'après le théorème de Thalès pour deux droites sécantes, $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$, soit $\dfrac{7{,}5}{3} = \dfrac{AN}{4}$. Par produit en croix :

$$AN = \frac{4 \times 7{,}5}{3} = 10.$$

Le point C est entre A et N, donc :

$$\begin{aligned} CN &= AN - AC \\ &= 10 - 4 = 6. \end{aligned}$$

Ainsi $AN = 10$ cm et $CN = 6$ cm.

À toi : Une configuration papillon

Deux droites sont sécantes en P. Sur la première, P est entre R et U. Sur la seconde, P est entre S et V. Les droites (RS) et (UV) sont parallèles.

On donne :

- $PR = 5$ cm, $PS = 4$ cm et $RS = 6$ cm ;
- $PU = 7{,}5$ cm.

Calcule PV, UV, puis RU.

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Le point commun est P : les rapports partent de P.

Indice 2
Écris $\frac{PU}{PR} = \frac{PV}{PS} = \frac{UV}{RS}$.
Indice 3
Point délicat : P est entre R et U, donc RU est une somme, pas une différence.

Réponse
Les rapports. Le point commun est P. Les droites (RS) et (UV) sont parallèles. D'après le théorème de Thalès pour deux droites sécantes :

$$\frac{PU}{PR} = \frac{PV}{PS} = \frac{UV}{RS}.$$

Avec les longueurs données :

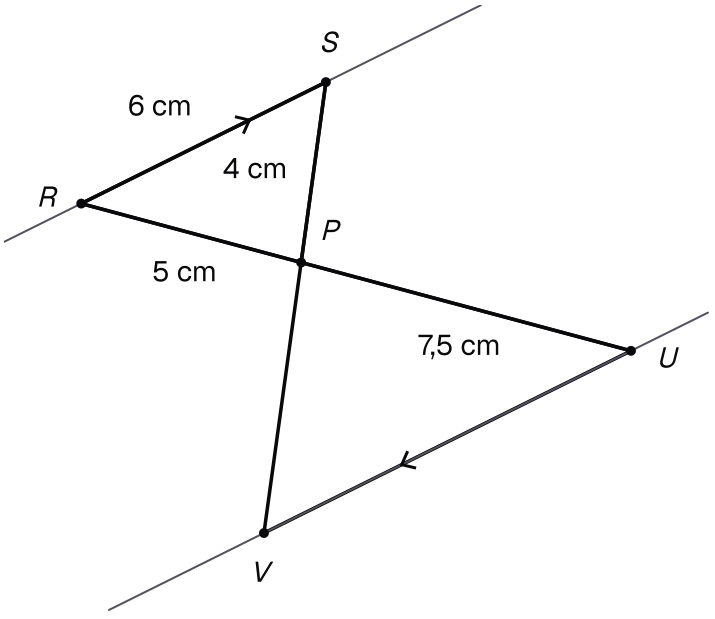
$$\frac{7{,}5}{5} = \frac{PV}{4} = \frac{UV}{6}.$$

Les longueurs PV et UV. Par produit en croix :

$$PV = \frac{4 \times 7{,}5}{5} = 6$$
$$UV = \frac{6 \times 7{,}5}{5} = 9$$

La longueur RU. Le point P est entre R et U, donc $RU = 5 + 7{,}5 = 12{,}5$.

Conclusion. $PV = 6$ cm, $UV = 9$ cm et $RU = 12{,}5$ cm.



Les données de l'exercice : PR = 5 cm, PS = 4 cm, RS = 6 cm, PU = 7,5 cm, et (RS) parallèle à (UV).

Réciproque du théorème de Thalès : prouver un parallélisme

La question inverse

Jusqu'ici, les droites étaient parallèles et tu calculais des longueurs. Retournons la question. On connaît des longueurs : les droites sont-elles parallèles ?

Un énoncé qui échange ce qu'on sait et ce qu'on conclut s'appelle sa **réciproque**. Exemple : la réciproque de « s'il pleut, la route est mouillée » est « si la route est mouillée, il pleut ».

Cette réciproque est fausse : un camion-citerne a pu mouiller la route. La réciproque d'un énoncé vrai n'est donc pas toujours vraie. Pour celle du théorème de Thalès, tu devras vérifier une condition de plus.

Devine : Parallèles ou non ?

Soit ABC un triangle, M un point de $[AB]$ et N un point de $[AC]$. On a $AM = 6$ cm, $AB = 9$ cm, $AN = 4$ cm et $AC = 6$ cm. D'après toi, les droites (MN) et (BC) sont-elles parallèles ?

A. Non, car AM et AN sont différents.

Faux.

On ne compare pas ces longueurs, mais des rapports.

B. Oui, car $\dfrac{AM}{AB}$ et $\dfrac{AN}{AC}$ sont égaux.

Juste.

Juste : $6 \times 6 = 36$ et $9 \times 4 = 36$. La réciproque, plus bas, le confirme.

C. On ne peut le savoir qu'avec un rapporteur.

Faux.

Un calcul de rapports suffit, avec un énoncé que tu vas découvrir.

D. Non : un calcul ne prouve jamais un parallélisme.

Faux.

Un calcul de rapports peut le prouver, avec la réciproque du théorème.

Correction

On compare $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{6}{9}$ et $\dfrac{AN}{AC} = \dfrac{4}{6}$. Les produits en croix valent $6 \times 6 = 36$ et $9 \times 4 = 36$: les deux rapports sont égaux à $\dfrac{2}{3}$.

De plus, M est sur $[AB]$ et N sur $[AC]$: M et N sont placés de la même façon sur leurs segments.

La réciproque, plus bas, permet alors de conclure : les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

L'ordre des points

Sur la droite (D_1), regarde où est M par rapport à A et B. Sur la droite (D_2), regarde où est N par rapport à A et C. Si les deux places se correspondent, on dit que les points sont **dans le même ordre**.

Sur (D_1)	**Sur (D_2)**
M est entre A et B	N est entre A et C
B est entre A et M	C est entre A et N

Sur (D_1)	Sur (D_2)
A est entre B et M	A est entre C et N

Les deux cases d'une même ligne vont ensemble. Sinon, les points ne sont pas dans le même ordre.

Vérifie : Le même ordre ?

Sur (D_1), le point B est entre A et M. Sur (D_2), quelle position de N donne le même ordre ?

A. Le point N est entre A et C.

Faux.

Cette position va avec « M entre A et B ».

B. Le point A est entre C et N.

Faux.

Cette position va avec « A entre B et M ».

C. Le point C est entre A et N.

Juste.

Juste : N est au-delà de C, comme M au-delà de B.

D. Toutes ces positions conviennent.

Faux.

L'ordre des points compte : une seule ligne du tableau convient.

Correction

Sur (D_1), B est entre A et M : M est au-delà de B.

Pour le même ordre, N doit être au-delà de C sur (D_2). Autrement dit, C est entre A et N.

La réciproque

Théorème : Réciproque du théorème de Thalès

Soit (D_1) et (D_2) deux droites sécantes en un point A. Soit B et M deux points de (D_1), et C et N deux points de (D_2), tous distincts de A.

Si

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$

et si les points A, B, M et les points A, C, N sont alignés **dans le même ordre**, alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

Remarque : Admis

Ce résultat est admis.

La méthode

Méthode : démontrer que deux droites sont parallèles

1. **Calcule** à part chacun des deux rapports qui partent du point commun, en valeurs exactes (des fractions, pas des arrondis).
2. **Compare** ces rapports par le produit en croix.
3. **Vérifie** l'ordre des points sur les deux droites.
4. **Conclus** en citant la réciproque du théorème de Thalès.

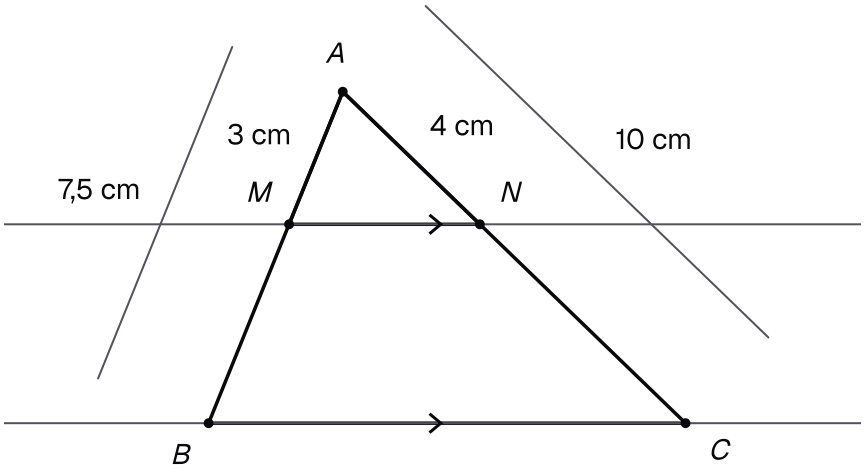
Exemple : dans un triangle

Soit ABC un triangle avec $AB = 7{,}5$ cm et $AC = 10$ cm. Le point M est sur $[AB]$ avec $AM = 3$ cm. Le point N est sur $[AC]$ avec $AN = 4$ cm.

Rapports. On a $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{3}{7{,}5}$ et $\dfrac{AN}{AC} = \dfrac{4}{10}$. Les produits en croix valent $3 \times 10 = 30$ et $7{,}5 \times 4 = 30$. Ils sont égaux, donc $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$.

Ordre. Le point M est sur $[AB]$ et N sur $[AC]$: les points sont dans le même ordre.

Conclusion. Les deux conditions de la réciproque du théorème de Thalès sont remplies. Les droites (MN) et (BC) sont donc parallèles.



L'exemple de la réciproque : AM = 3 cm sur AB = 7,5 cm, AN = 4 cm sur AC = 10 cm, et la conclusion (MN) parallèle à (BC).

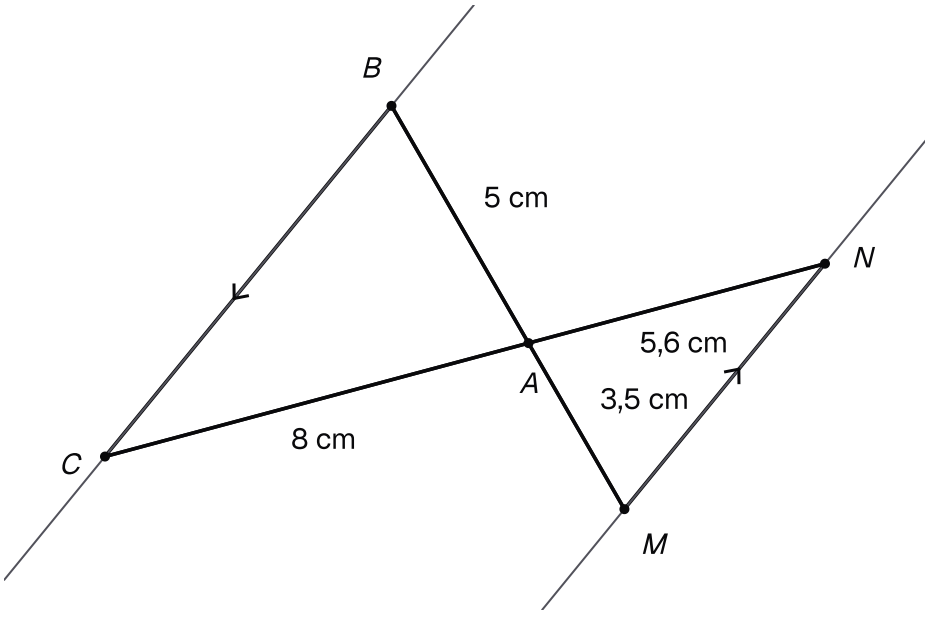
Exemple : en configuration papillon

Deux droites sont sécantes en A. Sur la première, A est entre B et M, avec $AB = 5$ cm et $AM = 3{,}5$ cm. Sur la seconde, A est entre C et N, avec $AC = 8$ cm et $AN = 5{,}6$ cm.

Rapports. On compare $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN}{AC}$: $3{,}5 \times 8 = 28$ et $5 \times 5{,}6 = 28$. Les produits en croix sont égaux, donc les rapports aussi.

Ordre. Le point A est entre B et M, et entre C et N : même ordre.

Conclusion. Ces deux vérifications faites, on cite la réciproque du théorème de Thalès : (BC) et (MN) sont parallèles.



La réciproque en configuration papillon : AB = 5 cm, AM = 3,5 cm, AC = 8 cm, AN = 5,6 cm, d'où (BC) parallèle à (MN).

Deux pièges

Attention : l'ordre des points compte

✗ « $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, donc les droites (MN) et (BC) sont parallèles. »

✓ Il faut aussi vérifier l'ordre des points. Voici un contre-exemple à tracer, dans un triangle ABC.

- Place M sur $[AB]$ avec $AM = 2$ cm et $AB = 5$ cm.
- Place N sur la droite (AC) de façon que A soit entre C et N, avec $AN = 2{,}4$ cm et $AC = 6$ cm.

Les produits en croix 2×6 et $5 \times 2{,}4$ valent tous deux 12 : les rapports sont égaux.

Pourtant, M est entre A et B, alors que A est entre C et N. Les points ne sont pas dans le même ordre, et les droites (MN) et (BC) ne sont pas parallèles.

Attention : quel énoncé pour quelle question

✗ « D'après le théorème de Thalès, les droites (MN) et (BC) sont parallèles. »

✓ Le théorème de Thalès **suppose** le parallélisme : il sert à calculer des longueurs. Pour **prouver** un parallélisme, cite la réciproque.

Compare alors seulement $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN}{AC}$: le rapport $\frac{MN}{BC}$ ne sert pas dans la réciproque.

Trouve l'erreur : La rédaction de Nadia

Soit ABC un triangle. Le point M est sur $[AB]$ avec $AM = 2$ cm et $AB = 8$ cm. Le point N est sur $[AC]$ avec $AN = 3$ cm et $AC = 12$ cm. Nadia écrit : « $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, donc d'après le théorème de Thalès, les droites (MN) et (BC) sont parallèles. » Que penses-tu de sa rédaction ?

A. Les deux rapports ne sont pas égaux : son calcul est faux.

Faux.

Ils sont égaux : $2 \times 12 = 24$ et $8 \times 3 = 24$.

B. Les droites (MN) et (BC) ne sont pas parallèles ici.

Faux.

Elles le sont : rapports égaux et même ordre.

C. Elle est juste et complète : il ne manque rien.

Faux.

Il manque une vérification, et l'énoncé cité ne convient pas.

D. Elle cite le mauvais énoncé et oublie l'ordre des points.

Juste.

Juste : il faut la réciproque, et une phrase sur l'ordre des points.

Correction

Les produits en croix valent $2 \times 12 = 24$ et $8 \times 3 = 24$: les rapports sont égaux.

Le point M est sur $[AB]$ et N sur $[AC]$: les points sont dans le même ordre.

D'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (MN) et (BC) sont parallèles. La conclusion de Nadia est juste, mais sa justification ne l'est pas.

Coin examen, puis à toi

Remarque : Coin examen : prouver un parallélisme

À l'examen, écris une phrase sur l'ordre des points. Par exemple : « M est sur $[AB]$ et N sur $[AC]$: les points sont dans le même ordre. »

Écris aussi les deux produits en croix : ils prouvent l'égalité des rapports. Sans la vérification de l'ordre, tu ne peux pas citer la réciproque.

À toi : Parallèles ?

Deux droites sont sécantes en A. Sur la première, B est entre A et M, avec $AB = 4$ cm et $AM = 10$ cm. Sur la seconde, C est entre A et N, avec $AC = 6$ cm et $AN = 15$ cm. Les droites (BC) et (MN) sont-elles parallèles ? Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Calcule à part $\dfrac{AM}{AB}$ et $\dfrac{AN}{AC}$.

Indice 2

Compare par le produit en croix : 10×6 et 4×15.

Indice 3

Point délicat : avant de conclure, vérifie que les points sont dans le même ordre.

Réponse

Rapports. On a $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{10}{4}$ et $\dfrac{AN}{AC} = \dfrac{15}{6}$. Les produits en croix valent $10 \times 6 = 60$ et $4 \times 15 = 60$: les rapports sont égaux.

Ordre. Le point B est entre A et M, et C est entre A et N : les points sont dans le même ordre.

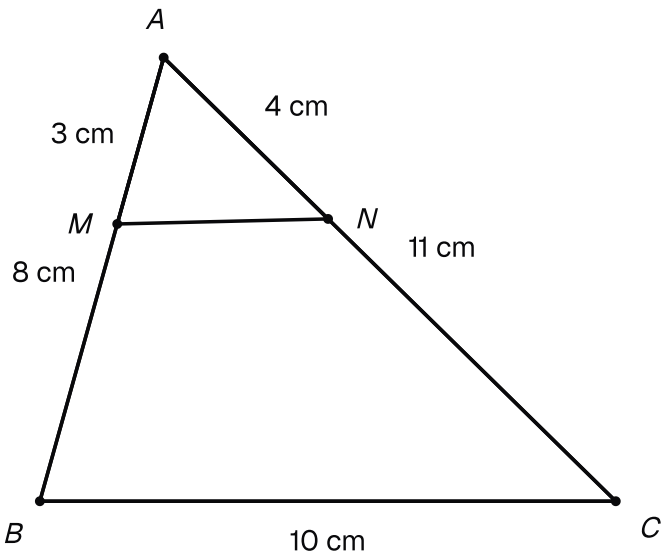
Conclusion. Tu peux maintenant invoquer la réciproque du théorème de Thalès. Les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

Prouver que deux droites ne sont pas parallèles

Une figure trompeuse

Trace un triangle ABC avec $AB = 8$ cm, $AC = 11$ cm et $BC = 10$ cm. Place M sur $[AB]$ avec $AM = 3$ cm, et N sur $[AC]$ avec $AN = 4$ cm. Trace ensuite la droite (MN).

Sur ton dessin, les droites (MN) et (BC) semblent parallèles. Un dessin peut tromper : seul un calcul tranche.



La figure trompeuse : AB = 8 cm, AC = 11 cm, BC = 10 cm, AM = 3 cm et AN = 4 cm ; à première vue, (MN) ressemble à une parallèle à (BC).

Devine : Le dessin dit-il vrai ?

Compare $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN}{AC}$ par le produit en croix. Que trouves-tu ?

A. Les produits valent 33 et 32 : les rapports sont différents.

Juste.

Juste : $3 \times 11 = 33$ et $8 \times 4 = 32$.

B. Les produits sont égaux, donc les rapports aussi.

Faux.

Refais le calcul : 3×11 et 8×4 ne donnent pas le même nombre.

C. Inutile de calculer : le dessin suffit pour conclure.

Faux.

Un dessin n'est jamais une preuve. Les mesures sur le cahier sont imprécises.

D. Les rapports sont presque égaux, donc ils sont égaux.

Faux.

Presque égaux ne veut pas dire égaux : 33 et 32 diffèrent.

Correction

Les produits en croix valent $3 \times 11 = 33$ et $8 \times 4 = 32$. Ils sont différents, donc $\frac{3}{8} \neq \frac{4}{11}$.

Les droites peuvent-elles quand même être parallèles ? L'énoncé qui suit répond : non.

L'énoncé qui suit s'appelle la **conséquence** du théorème de Thalès : il découle de ce théorème.

Pourquoi est-ce vrai ? Si les droites étaient parallèles, le théorème de Thalès rendrait les deux rapports égaux.

Pour le prouver, on raisonne **par l'absurde**. Raisonner par l'absurde, c'est supposer le contraire de ce qu'on veut montrer. On aboutit alors à une impossibilité : la supposition était fausse.

La conséquence et sa preuve

Propriété : Conséquence du théorème de Thalès

Soit (D_1) et (D_2) deux droites sécantes en un point A. Soit B et M deux points de (D_1), et C et N deux points de (D_2), tous distincts de A.

Si

$$\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC},$$

alors les droites (BC) et (MN) ne sont **pas** parallèles.

Démonstration

Étape 1. Supposons que les droites (BC) et (MN) soient parallèles.

Étape 2. Les droites (D_1) et (D_2) sont sécantes en A. Les points B et M sont sur (D_1), les points C et N sur (D_2), tous distincts de A. Le théorème de Thalès pour deux droites sécantes s'applique donc : il donne $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$.

Étape 3. Or, par hypothèse, ces deux rapports sont différents. C'est impossible.

Étape 4. La supposition de l'étape 1 est donc fausse : les droites (BC) et (MN) ne sont pas parallèles.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

1. On **suppose le contraire** de la conclusion : les droites sont parallèles.
2. Le théorème de Thalès donne alors deux rapports égaux.
3. Cela contredit l'hypothèse, qui les dit différents.
4. La supposition est donc fausse : c'est un raisonnement par l'absurde.

Vérifie : L'idée de la preuve

Dans la preuve, quelle supposition mène à une contradiction ?

A. On suppose que les deux rapports sont égaux.
Faux.

C'est le contraire : par hypothèse, ils sont différents.

B. On suppose que (D_1) et (D_2) sont parallèles.

Faux.

Ces droites sont sécantes en A : c'est une donnée, pas une supposition.

C. On suppose que (BC) et (MN) sont parallèles.

Juste.

Juste : c'est le contraire de la conclusion voulue.

D. On suppose que les points sont dans le même ordre.

Faux.

L'ordre des points ne sert pas dans cette preuve.

Correction

La preuve suppose que les droites (BC) et (MN) sont parallèles. C'est le contraire de ce qu'on veut montrer.

Le théorème de Thalès donne alors $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$, ce qui contredit l'hypothèse. La supposition est fausse : les droites ne sont pas parallèles.

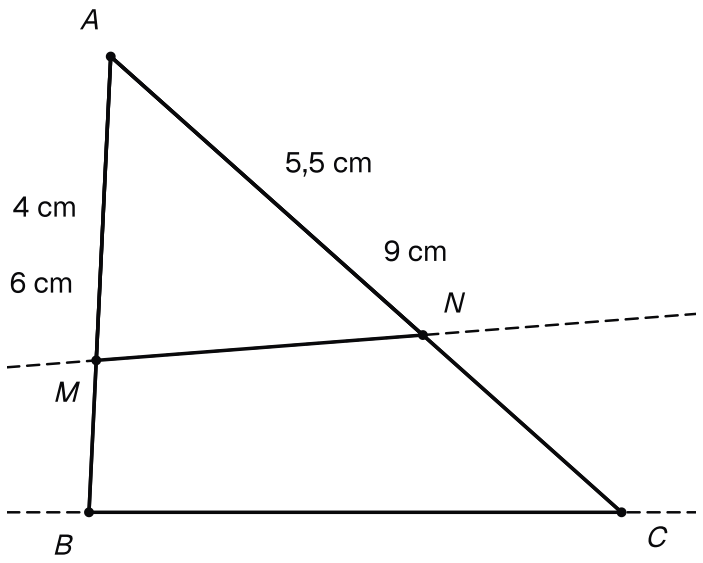
Exemple : deux droites non parallèles

Soit ABC un triangle avec $AB = 6$ cm et $AC = 9$ cm. Le point M est sur $[AB]$ avec $AM = 4$ cm. Le point N est sur $[AC]$ avec $AN = 5{,}5$ cm.

On compare $\dfrac{AM}{AB}$ et $\dfrac{AN}{AC}$: $4 \times 9 = 36$ et $6 \times 5{,}5 = 33$. Les produits en croix sont différents, donc :

$$\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}.$$

D'après la conséquence du théorème de Thalès, les droites (MN) et (BC) ne sont pas parallèles. Ici, l'ordre des points ne joue aucun rôle.



L'exemple de la conséquence : avec AM = 4 cm sur 6 cm et AN = 5,5 cm sur 9 cm, les droites (MN) et (BC) finissent par se couper.

Méthode et piège

Méthode : démontrer que deux droites ne sont pas parallèles

1. **Calcule** à part chacun des deux rapports qui partent du point commun, en valeurs exactes.
2. **Montre** qu'ils sont différents : leurs produits en croix ne sont pas égaux.
3. **Conclus** en citant la conséquence du théorème de Thalès.

Attention : jamais de valeurs arrondies

✗ « $\frac{5}{7}$ et $\frac{3{,}6}{5}$ s'arrondissent tous deux à $0{,}7$ au dixième, donc ils sont égaux. »

✓ Deux nombres peuvent avoir le même arrondi sans être égaux. Ici, les produits en croix valent $5 \times 5 = 25$ et $7 \times 3{,}6 = 25{,}2$. Ils sont différents : les deux rapports aussi.

Compare toujours les rapports en valeurs exactes.

Vérifie : Des arrondis égaux

Dans une configuration de Thalès, $\frac{AM}{AB} = \frac{7}{12}$ et $\frac{AN}{AC} = \frac{4{,}1}{7}$. Arrondis au dixième, les deux rapports valent $0{,}6$. Que conclure pour les droites (MN) et (BC) ?

A. Elles sont parallèles, car les arrondis sont égaux.

Faux.

Les arrondis ne prouvent rien. Compare les produits en croix.

B. Elles ne sont pas parallèles, car $49 \neq 49{,}2$.

Juste.

Juste : $7 \times 7 = 49$ et $12 \times 4{,}1 = 49{,}2$.

C. On ne peut rien dire sans l'ordre des points.

Faux.

L'ordre sert pour prouver un parallélisme, pas pour la conséquence.

D. Il faut mesurer sur la figure pour décider.

Faux.

Une mesure est approchée : elle ne tranche pas.

Correction

Les produits en croix valent $7 \times 7 = 49$ et $12 \times 4{,}1 = 49{,}2$. Ils sont différents, donc $\dfrac{7}{12} \neq \dfrac{4{,}1}{7}$.

D'après la conséquence du théorème de Thalès, les droites (MN) et (BC) ne sont pas parallèles.

À toi : Parallèles ou non ?

Deux droites sont sécantes en A. Sur la première, A est entre B et M, avec $AB = 7$ cm et $AM = 5$ cm. Sur la seconde, A est entre C et N, avec $AC = 9$ cm et $AN = 6{,}5$ cm. Les droites (BC) et (MN) sont-elles parallèles ? Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Calcule à part $\dfrac{AM}{AB}$ et $\dfrac{AN}{AC}$.

Indice 2

Compare par le produit en croix : 5×9 et $7 \times 6{,}5$.

Indice 3

Point délicat : deux conclusions sont possibles. Seule la comparaison des deux produits en croix décide.

Réponse

Les produits en croix valent $5 \times 9 = 45$ et $7 \times 6{,}5 = 45{,}5$. Ils sont différents, donc $\dfrac{AM}{AB} \neq \dfrac{AN}{AC}$.

D'après la conséquence du théorème de Thalès, les droites (BC) et (MN) ne sont pas parallèles.

Construire avec Thalès

Construire une longueur

On connaît trois longueurs a, b et c. Leur **quatrième proportionnelle** est la longueur x telle que $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{x}$. Autrement dit : a est à b ce que c est à x.

Par exemple, si 3 cm va avec 5 cm, quelle longueur va avec 6 cm ? On peut la calculer. On peut aussi la construire avec une règle et une équerre, sans aucun calcul.

Devine : Une quatrième proportionnelle

Avec $a = 3$ cm, $b = 5$ cm et $c = 6$ cm, combien mesure la quatrième proportionnelle x ?

A. $x = 3{,}6$ cm

Faux.

Tu as calculé $\dfrac{3 \times 6}{5}$. Vérifie : $3 \times 3{,}6$ ne vaut pas 5×6.

B. $x = 8$ cm

Faux.

De 3 à 5, tu as ajouté 2. La proportionnalité multiplie, elle n'ajoute pas.

C. $x = 2{,}5$ cm

Faux.

Vérifie : $3 \times 2{,}5 = 7{,}5$, alors que $5 \times 6 = 30$.

D. $x = 10$ cm

Juste.

Juste : $3 \times 10 = 30$ et $5 \times 6 = 30$.

Correction

On cherche x tel que $\dfrac{3}{5} = \dfrac{6}{x}$. Le produit en croix donne :

$$3 \times x = 5 \times 6 = 30$$
$$x = 30 \div 3 = 10$$

La quatrième proportionnelle mesure 10 cm.

Méthode : construire une quatrième proportionnelle

1. **Trace** deux demi-droites de même origine A qui forment un angle : elles ne se superposent pas et ne se prolongent pas.
2. **Reporte** à la règle, sur la première, $AB = a$ puis $AM = c$.
3. **Reporte** sur la seconde $AC = b$.
4. **Mène** par M la parallèle à (BC). Nomme N son point de rencontre avec la seconde demi-droite.
5. **Conclus** : le théorème de Thalès donne $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$, donc $AN = x$.

Deux constructions

Exemple : une quatrième proportionnelle

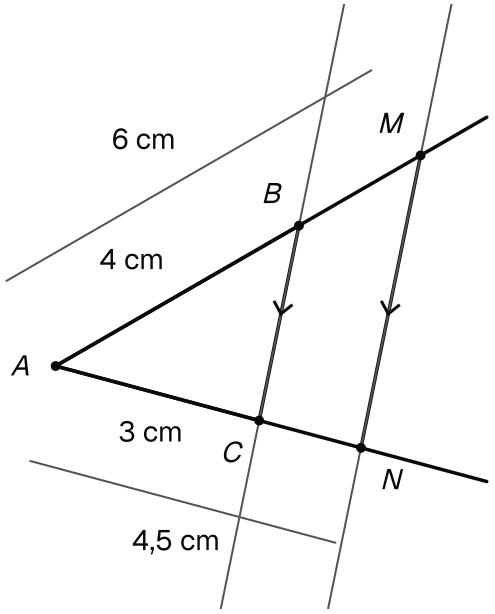
On cherche x tel que $\dfrac{4}{3} = \dfrac{6}{x}$. Trace deux demi-droites d'origine A qui forment un angle. Sur la première, reporte $AB = 4$ cm et $AM = 6$ cm : B est entre A et M.

Sur la seconde, reporte $AC = 3$ cm. Mène par M la parallèle à (BC) : elle coupe la seconde demi-droite en N.

Les droites (MN) et (BC) sont parallèles par construction. D'après le théorème de Thalès pour deux droites sécantes, $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$, soit $\dfrac{6}{4} = \dfrac{AN}{3}$. Donc :

$$AN = \frac{3 \times 6}{4} = 4{,}5.$$

Contrôle : $4 \times 4{,}5 = 18$ et $3 \times 6 = 18$. La longueur $AN = 4{,}5$ cm est la quatrième proportionnelle cherchée.



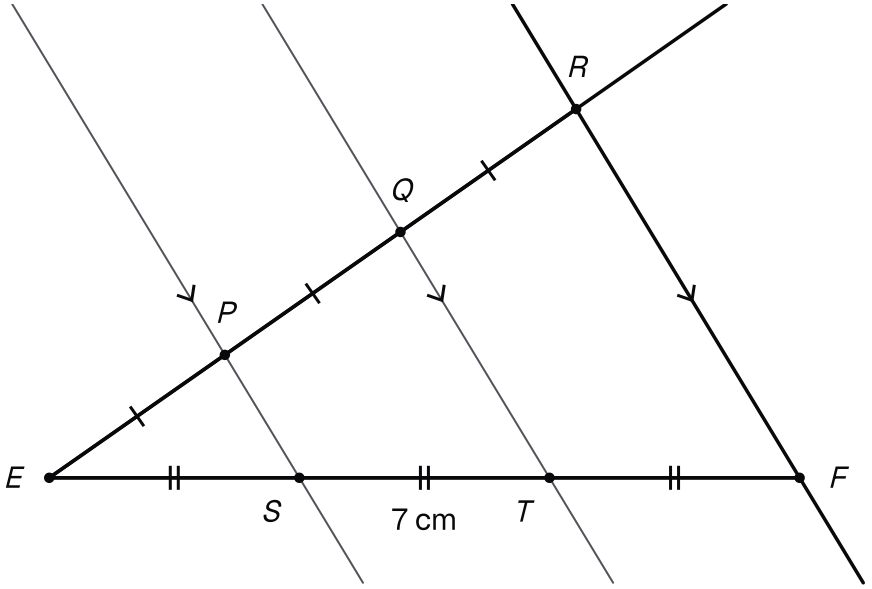
La construction de l'exemple : AB = 4 cm et AM = 6 cm sur une demi-droite, AC = 3 cm sur l'autre, puis la parallèle à (BC) par M, qui donne AN = 4,5 cm.

Exemple : partager un segment en trois parties égales

Soit $[EF]$ un segment de 7 cm. La division $7 \div 3$ ne donne pas un nombre décimal exact : on construit les trois parties.

- Trace une demi-droite d'origine E, qui n'est pas portée par la droite (EF).
- Reporte dessus, à la suite, trois segments de 2 cm : $EP = 2$ cm, $EQ = 4$ cm et $ER = 6$ cm.
- Trace la droite (RF). Mène par P et par Q les parallèles à (RF). Elles coupent $[EF]$ en S et en T.

Les points S et T partagent $[EF]$ en trois parties égales. L'activité suivante le justifie.



Le partage de [EF] en trois : trois reports égaux sur la demi-droite d'origine E, puis des parallèles à (RF) qui marquent S et T.

Vérifie : Justifier le partage

Dans cette construction, quelle propriété prouve que $ES = \dfrac{EF}{3}$?

A. Le théorème de Thalès dans le triangle ERF.

Juste.

Juste : les droites (PS) et (RF) sont parallèles, et $\dfrac{EP}{ER} = \dfrac{1}{3}$.

B. La réciproque du théorème de Thalès.

Faux.

La réciproque prouve un parallélisme. Ici, le parallélisme est construit : on cherche une longueur.

C. La propriété de la droite des milieux.

Faux.

Aucun point n'est un milieu ici : le rapport vaut $\dfrac{1}{3}$, pas $\dfrac{1}{2}$.

D. La mesure de ES avec la règle graduée.

Faux.

Une mesure est approchée. De plus, $7 \div 3$ ne donne pas un nombre décimal exact.

Correction

Le point S. Dans le triangle ERF, P est sur $[ER]$ et S sur $[EF]$. Les droites (PS) et (RF) sont parallèles par construction. D'après le théorème de Thalès dans le triangle :

$$\frac{ES}{EF} = \frac{EP}{ER} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Donc $ES = \dfrac{EF}{3} = \dfrac{7}{3}$ cm.

Le point T. De même, Q est sur $[ER]$, T sur $[EF]$, et les droites (QT) et (RF) sont parallèles. Le même théorème donne $\dfrac{ET}{EF} = \dfrac{EQ}{ER} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$, donc $ET = \dfrac{14}{3}$ cm.

Les trois parties. On a $ST = ET - ES = \dfrac{7}{3}$ cm et $TF = EF - ET = 7 - \dfrac{14}{3} = \dfrac{7}{3}$ cm.

Conclusion. Les trois parties $[ES]$, $[ST]$ et $[TF]$ mesurent chacune $\dfrac{7}{3}$ cm : elles sont égales.

Une remarque, puis à toi

Remarque : la règle graduée

Dans une construction, la règle graduée sert seulement à reporter les longueurs données. Les parallèles se tracent avec la règle et l'équerre : fais glisser l'équerre le long de la règle. Ainsi, aucune longueur construite n'est arrondie.

À toi : À toi de construire

Construis la quatrième proportionnelle x de $a = 5$ cm, $b = 2$ cm et $c = 7{,}5$ cm. Décris ta construction, puis calcule x pour la contrôler. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Suis la méthode : deux demi-droites d'origine A, puis trois longueurs reportées.
Indice 2
Reporte $AB = 5$ cm et $AM = 7{,}5$ cm sur la première, et $AC = 2$ cm sur la seconde.
Indice 3
Point délicat : la parallèle se mène par M, à la droite (BC).

Réponse
Construction. Trace deux demi-droites d'origine A qui forment un angle. Sur la première, reporte $AB = 5$ cm et $AM = 7{,}5$ cm : B est entre A et M. Sur la seconde, reporte $AC = 2$ cm. Mène par M la parallèle à (BC) : elle coupe la seconde demi-droite en N, et $AN = x$.

Calcul. Les droites (MN) et (BC) sont parallèles par construction. D'après le théorème de Thalès pour deux droites sécantes, $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$, soit $\dfrac{7{,}5}{5} = \dfrac{AN}{2}$. Donc :

$$AN = \frac{2 \times 7{,}5}{5} = 3.$$

Contrôle. $5 \times 3 = 15$ et $2 \times 7{,}5 = 15$, donc $\dfrac{5}{2} = \dfrac{7{,}5}{3}$.

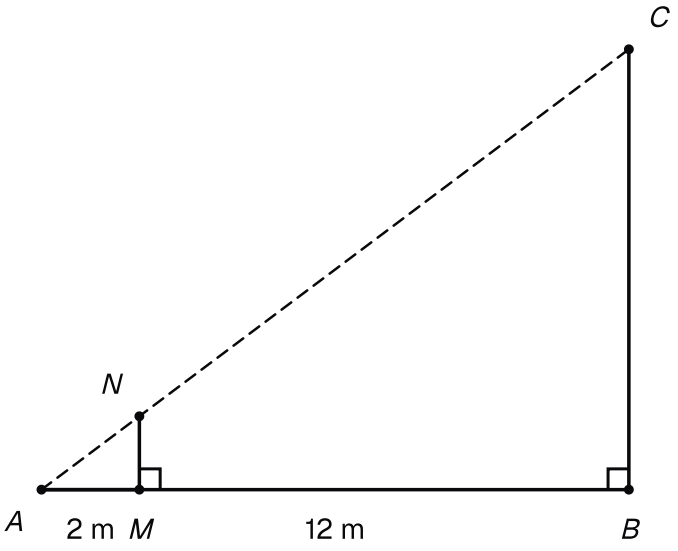
Problèmes avec le théorème de Thalès dans la vie courante

Retour à l'arbre

Reviens à l'arbre de Karim. Nomme A le bout commun des deux ombres. Nomme M le pied du bâton et N son sommet, B le pied de l'arbre et C son sommet.

Les points A, M, B sont alignés sur le sol. Les points A, N, C sont alignés sur un même rayon de soleil. On sait que $AM = 2$ m, $AB = 12$ m et $MN = 1{,}5$ m.

Dessine la situation sur ton cahier, à l'échelle de ton choix.



L'arbre de Karim nommé : A au bout des ombres, le bâton [MN] de 1,5 m à 2 m de A, l'arbre [BC] à 12 m de A.

Vérifie : Pourquoi des parallèles ?

Pourquoi les droites (MN) et (BC) sont-elles parallèles ?

A. Car les rayons du soleil sont parallèles.

Faux.

Le rayon de soleil porte A, N et C. Il ne dit rien des droites (MN) et (BC).

B. Car elles sont perpendiculaires à la droite (AB).

Juste.

Juste : deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles.

C. D'après la réciproque du théorème de Thalès.

Faux.

La réciproque demande des rapports connus. Ici, BC est justement inconnue.

D. Car elles semblent parallèles sur le dessin.

Faux.

Un dessin n'est pas une preuve.

Correction

> Le bâton et l'arbre sont verticaux, et le sol est plat. Les droites (MN) et (BC) sont donc perpendiculaires à la droite (AB) du sol.
>
> Or, quand deux droites sont perpendiculaires à une même droite, elles sont parallèles. Donc les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

Exemple : la hauteur de l'arbre

Le point commun est A. Le point M est sur $[AB]$ et le point N sur $[AC]$.

Les droites (MN) et (BC) sont parallèles. D'après le théorème de Thalès dans le triangle :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}.$$

On garde $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$, soit $\frac{2}{12} = \frac{1{,}5}{BC}$. Le produit en croix donne :

$$2 \times BC = 12 \times 1{,}5 = 18$$
$$BC = 18 \div 2 = 9$$

L'arbre mesure 9 m : la prédiction du début était juste.

La largeur d'une rivière

Salma veut connaître la largeur d'une rivière aux bords droits. Un arbre T pousse au bord de l'autre rive. Elle plante un piquet B sur sa rive, en face de T : la droite (BT) est perpendiculaire à la rive.

Depuis B, elle longe la rive et plante un piquet A à 30 m de B. Elle continue tout droit jusqu'au point M, à 6 m de A. Les points B, A, M sont alignés dans cet ordre.

Depuis M, elle s'éloigne de la rivière à angle droit avec la rive. Elle s'arrête au point N où le piquet A cache l'arbre : T, A, N sont alignés. Elle mesure $MN = 5$ m.

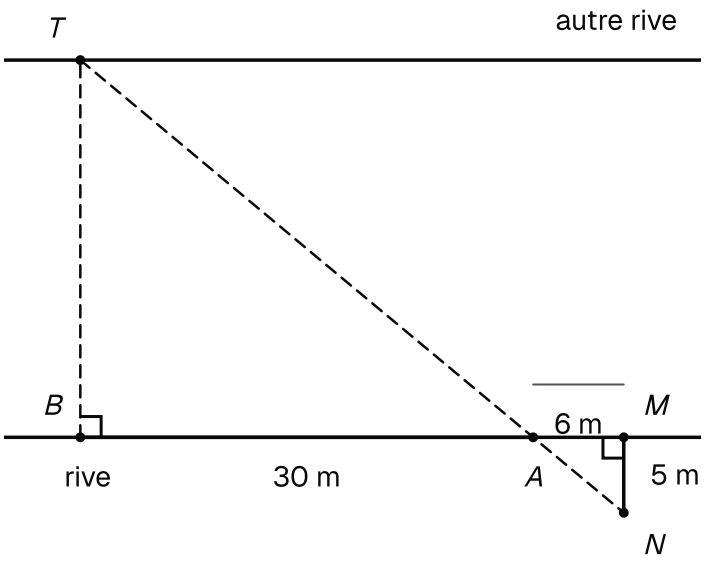


Schéma de Salma : BA = 30 m le long de la rive, AM = 6 m dans son prolongement, puis MN = 5 m à angle droit, et l'arbre T caché par le piquet A.

Vérifie : La configuration de la rivière

Dans la situation de Salma, quelle est la configuration de Thalès ?

A. Un petit triangle dans un grand, de sommet A.

Faux.

Le point M n'est pas entre A et B : il est de l'autre côté de A.

B. Un point M au-delà de B, sur le prolongement.

Faux.

Salma s'éloigne de B en passant par A : c'est A qui est entre B et M.

C. Une configuration papillon, de point commun A.

Juste.

Juste : A est entre B et M, et entre T et N.

D. Aucune : il n'y a pas de droites parallèles.

Faux.

Les droites (BT) et (MN) sont perpendiculaires à la rive, donc parallèles.

Correction

Les droites (BM) et (TN) se coupent en A. Le point A est entre B et M, et entre T et N.

Les droites (BT) et (MN) sont parallèles, car perpendiculaires à la rive. C'est une configuration papillon, de point commun A.

Exemple : la largeur de la rivière

Les droites (BT) et (MN) sont parallèles. D'après le théorème de Thalès pour deux droites sécantes :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AT} = \frac{MN}{BT}.$$

On garde $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BT}$, soit $\frac{6}{30} = \frac{5}{BT}$. Le produit en croix donne :

$$6 \times BT = 30 \times 5 = 150$$
$$BT = 150 \div 6 = 25$$

La rivière mesure 25 m de large, et Salma ne l'a pas traversée.

Modéliser, puis à toi

Pour reconnaître Thalès dans une situation, cherche trois choses.

1. D'abord, deux droites qui se coupent : leur point commun.
2. Ensuite, deux droites parallèles : par exemple deux objets verticaux, qui sont perpendiculaires au sol.
3. Enfin, l'ordre des points sur chaque droite.

Fais toujours un schéma, avec les longueurs connues.

Remarque : Coin examen : un problème concret

À l'examen, pour un problème concret, commence par un schéma où tu nommes les points. Justifie le parallélisme par une propriété, jamais par le dessin. Termine par une phrase qui répond à la question posée, avec l'unité.

À toi : Un autre arbre

Un bâton vertical de $1{,}2$ m a une ombre de $1{,}6$ m. Le bout de cette ombre est au bout de l'ombre d'un arbre, longue de 10 m. Le sol est plat. Quelle est la hauteur de l'arbre ? Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Nomme les points comme pour l'arbre de Karim, puis justifie le parallélisme.
Indice 2
Garde $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$.
Indice 3
Point délicat : AB est toute l'ombre de l'arbre, mesurée depuis le bout commun A ; AM est l'ombre du bâton.

Réponse

Le schéma. Nomme A le bout commun des deux ombres, M le pied du bâton et N son sommet, B le pied de l'arbre et C son sommet. Alors $AM = 1{,}6$ m, $AB = 10$ m et $MN = 1{,}2$ m.

Les parallèles. Le bâton $[MN]$ et l'arbre $[BC]$ sont verticaux : les droites (MN) et (BC) sont perpendiculaires à la droite (AB) du sol. Elles sont donc parallèles.

Le calcul. Les droites (MN) et (BC) sont parallèles. Le point M est sur $[AB]$ et N sur $[AC]$. D'après le théorème de Thalès dans le triangle, $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{MN}{BC}$, soit $\dfrac{1{,}6}{10} = \dfrac{1{,}2}{BC}$. Par produit en croix :

$$BC = \frac{10 \times 1{,}2}{1{,}6} = 7{,}5.$$

Conclusion. L'arbre mesure $7{,}5$ m.

Synthèse : Thalès dans le triangle et sa réciproque

Ce que tu sais

Cette section fait la synthèse du théorème de Thalès dans le triangle et de sa réciproque. Elle n'apporte aucun résultat nouveau. Elle t'aide à choisir le bon énoncé.

Vérifie : Quel énoncé ?

Tu dois prouver que deux droites ne sont pas parallèles. Quel énoncé cites-tu ?

A. Le théorème de Thalès.

Faux.
Il suppose les droites parallèles : il sert à calculer.

B. La réciproque du théorème de Thalès.

Faux.
Elle prouve que deux droites sont parallèles, pas le contraire.

C. La propriété de la droite des milieux.

Faux.
Elle parle de milieux, et conclut à un parallélisme.

D. La conséquence du théorème de Thalès.

Juste.
Juste : deux rapports différents prouvent que les droites ne sont pas parallèles.

Correction
Pour prouver que deux droites ne sont pas parallèles, on montre que deux rapports sont différents. On cite alors la conséquence du théorème de Thalès.

Rappel de 2e année : la droite des milieux. Si I est le milieu de $[AB]$ et J celui de $[AC]$, alors $(IJ) \parallel (BC)$ et $IJ = \dfrac{BC}{2}$.

Le théorème de Thalès redonne la longueur IJ. C'est le cas où le rapport $\frac{AI}{AB}$ vaut $\frac{1}{2}$: l'exemple plus bas le montre.

Quelle question, quel énoncé

Ce tableau rassemble les trois questions du chapitre.

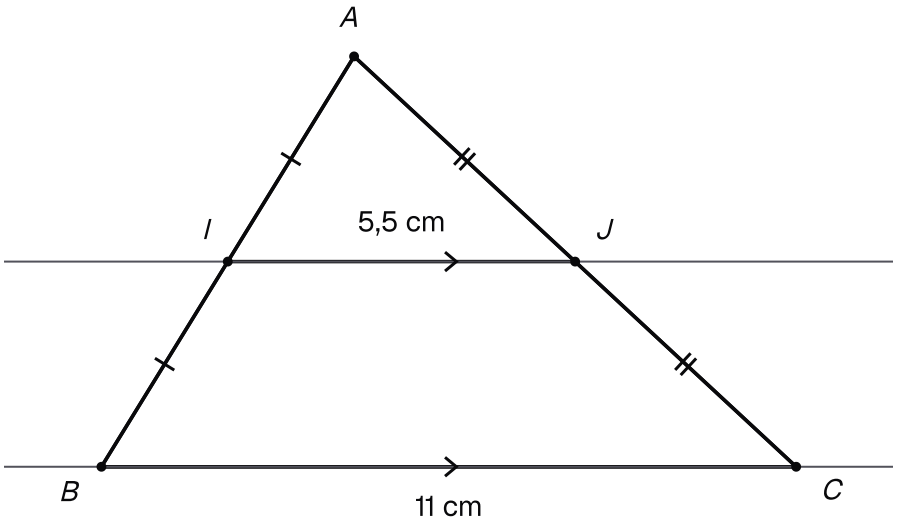
Question posée	Énoncé à citer	Ce que tu vérifies
Calculer une longueur	le théorème de Thalès	les droites sont parallèles
Prouver que deux droites sont parallèles	la réciproque du théorème de Thalès	deux rapports égaux et le même ordre
Prouver que deux droites ne sont pas parallèles	la conséquence du théorème de Thalès	deux rapports différents

Exemple : la droite des milieux revue avec Thalès

Soit ABC un triangle avec $BC = 11$ cm. Le point I est le milieu de $[AB]$, et le point J celui de $[AC]$.

D'après la propriété de la droite des milieux, les droites (IJ) et (BC) sont parallèles, et $IJ = 11 \div 2 = 5{,}5$. Donc $IJ = 5{,}5$ cm.

Thalès redonne ce résultat. Les droites (IJ) et (BC) sont parallèles, et $\frac{AI}{AB} = \frac{1}{2}$. D'après le théorème de Thalès dans le triangle, $\frac{IJ}{BC} = \frac{AI}{AB} = \frac{1}{2}$, soit $IJ = 5{,}5$ cm.



La droite des milieux revue avec Thalès : BC = 11 cm, I et J milieux, et IJ = 5,5 cm, la moitié de BC.

À retenir, puis à toi

À retenir : trois énoncés, trois usages

- Le **théorème de Thalès** part de deux droites parallèles. Il donne trois rapports égaux et sert à calculer une longueur.
- Sa **réciproque** part de deux rapports égaux et du même ordre des points. Elle prouve un parallélisme.
- Sa **conséquence** part de deux rapports différents. Elle prouve que deux droites ne sont pas parallèles.

À toi : Trois situations

Soit ABC un triangle, M un point de $[AB]$ et N un point de $[AC]$. On a $AM = 2$ cm, $AB = 6$ cm et $AC = 9$ cm. Pour chaque cas, cite l'énoncé utile et conclus.

- (a) $AN = 3$ cm : les droites (MN) et (BC) sont-elles parallèles ?
- (b) $AN = 3{,}5$ cm : même question.
- (c) Les droites (MN) et (BC) sont parallèles et $BC = 7{,}5$ cm : calcule MN.

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Pour (a) et (b), compare $\dfrac{AM}{AB}$ et $\dfrac{AN}{AC}$ par le produit en croix.
Indice 2
Les produits à comparer sont 2×9 et $6 \times AN$.
Indice 3
Point délicat : en (a), vérifie aussi l'ordre des points avant de citer la réciproque.

Réponse
(a) On a $2 \times 9 = 18$ et $6 \times 3 = 18$: les rapports sont égaux. Le point M est sur $[AB]$ et N sur $[AC]$: même ordre. D'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

(b) On a $2 \times 9 = 18$ et $6 \times 3{,}5 = 21$: les rapports sont différents. D'après la conséquence du théorème de Thalès, les droites (MN) et (BC) ne sont pas parallèles.

(c) Les droites (MN) et (BC) sont parallèles. D'après le théorème de Thalès dans le triangle, $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{MN}{BC}$, soit $\dfrac{2}{6} = \dfrac{MN}{7{,}5}$. Donc :

$$MN = \frac{7{,}5 \times 2}{6} = 2{,}5.$$

Ainsi $MN = 2{,}5$ cm.

Ce qu'il faut savoir faire

> **À retenir : ce qu'il faut savoir faire**
>
> - **Calculer une longueur** : point commun, hypothèse de parallélisme, trois rapports, deux rapports gardés, produit en croix, conclusion avec l'unité.
> - **Prouver un parallélisme** : deux rapports égaux en valeurs exactes, même ordre des points, réciproque citée.
> - **Prouver un non-parallélisme** : deux rapports différents, conséquence citée.
> - **Construire** une quatrième proportionnelle ou un partage : reporter les longueurs, mener une parallèle, justifier par le théorème de Thalès.

Le mot du prof. Avec Thalès, tu mesures un arbre sans grimper, et une rivière sans la traverser. Avant chaque calcul, décris la figure : point commun, ordre des points, parallèles. Puis nomme toujours l'énoncé que tu emploies.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Le théorème de Thalès » (3ac · general · mathematiques)