BURHAN

Résumé : Systèmes de deux équations du premier degré à deux inconnues

3ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/3ac/mathematiques/systemes-de-deux-equations/resume

Chapitre	Semestre
Systèmes de deux équations du premier degré à deux inconnues	Semestre 2

Une équation, deux inconnues

> **À retenir : Deux nombres cherchés à la fois**
>
> Une **inconnue** est un nombre que l'on cherche. Dans ce chapitre, on en cherche deux à la fois, notées x et y. Une solution n'est donc pas un seul nombre : c'est un **couple** de deux nombres, écrit $(x ; y)$.

Définition : Équation du premier degré à deux inconnues

Soit a, b et c trois nombres, où a et b ne sont pas nuls en même temps. Une égalité de la forme

$$ax + by = c,$$

où x et y sont deux nombres inconnus, est une **équation du premier degré à deux inconnues** x et y.

Un **couple** $(x_0 ; y_0)$ est une **solution** de cette équation lorsque l'égalité $ax_0 + by_0 = c$ est vraie. Dans un couple, l'ordre compte : la première valeur remplace x et la seconde remplace y.

Exemple

Énoncé. Les couples $(4 ; 2)$ et $(0 ; 8)$ sont-ils solutions de l'équation $3x + 2y = 16$?

Calcul.

- Pour $(4 ; 2)$: $3 \times 4 + 2 \times 2 = 12 + 4 = 16$.
- Pour $(0 ; 8)$: $3 \times 0 + 2 \times 8 = 0 + 16 = 16$.

Conclusion. Les deux couples sont solutions. Une telle équation possède en fait une infinité de couples solutions.

> **Attention : Un couple se lit dans l'ordre**
>
> Le couple $(2 ; 4)$ n'est pas le couple $(4 ; 2)$. Avec $3x + 2y = 16$, il donne $3 \times 2 + 2 \times 4 = 14$, et non 16 : il n'est pas solution.
>
> Place toujours la valeur de x en premier.

Deux équations à la fois

Définition : Système de deux équations à deux inconnues

Un **système de deux équations du premier degré à deux inconnues** x et y s'écrit

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

où a, b, c, a', b' et c' sont des nombres donnés, chaque ligne étant une équation du premier degré à deux inconnues.

Un couple $(x_0 ; y_0)$ est une **solution du système** lorsqu'il est solution **des deux équations à la fois**. **Résoudre** le système, c'est trouver tous ses couples solutions.

Méthode : vérifier un couple

1. **Remplace** x par la première valeur du couple et y par la seconde, dans la première équation.
2. **Compare** les deux membres. S'ils diffèrent, tu peux t'arrêter : le couple ne convient pas.
3. **Refais** ce calcul dans la seconde équation.
4. **Conclus** : il faut que les deux égalités soient vraies pour que le couple convienne au système.

Exemple

Énoncé. Le couple $(3 ; -1)$ est-il solution du système suivant ?

$$\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 3x + y = 8 \end{cases}$$

Première équation. $3 - 2 \times (-1) = 3 + 2 = 5$: l'égalité est vraie.

Seconde équation. $3 \times 3 + (-1) = 9 - 1 = 8$: l'égalité est vraie.

Conclusion. Le couple $(3 ; -1)$ est une solution de ce système.

Attention : Une seule égalité ne suffit pas

Le couple $(1 ; -2)$ vérifie la première équation du système précédent : $1 - 2 \times (-2) = 5$. Mais dans la seconde, $3 \times 1 + (-2) = 1$, et non 8.

Ce couple n'est donc pas solution du système. Teste toujours les deux équations.

Résoudre par substitution

Propriété : Résolution par substitution

On considère un système de deux équations du premier degré à deux inconnues x et y. Supposons que l'une des deux équations s'écrive, ou se transforme, sous la forme $y = mx + p$, où m et p sont des nombres donnés.

On **remplace** alors y par $mx + p$ dans l'autre équation : on obtient une équation du premier degré à **une seule inconnue** x.

Le système de départ a **les mêmes solutions** que le système formé par l'équation $y = mx + p$ et cette nouvelle équation. Le rôle de x et de y peut être échangé.

Remarque

Ce résultat est admis. Tu peux t'en convaincre sur chaque exemple : le couple trouvé convient bien aux deux équations de départ.

Méthode : la substitution

1. **Isole** une inconnue : écris-la seule dans un membre d'une équation. Choisis l'équation où son coefficient vaut 1 ou -1.
2. **Substitue** : dans l'équation restante, écris l'expression obtenue à la place de cette inconnue, en l'entourant de parenthèses.
3. **Résous** la nouvelle équation, qui n'a plus qu'une inconnue.
4. **Calcule** l'autre inconnue avec l'expression isolée au début.
5. **Contrôle** les deux valeurs dans chaque équation de départ. Termine par une phrase réponse.

Exemple

Énoncé. Résous le système :

$$\begin{cases} x + 4y = 9 \\ 3x - 2y = -1 \end{cases}$$

Isoler. On soustrait $4y$ aux deux membres de la première équation : $x = 9 - 4y$.

Substituer. On remplace x par $(9 - 4y)$ dans la seconde. On développe, puis on réduit :

$$\begin{aligned} 3(9 - 4y) - 2y &= -1 \\ 27 - 12y - 2y &= -1 \\ 27 - 14y &= -1 \end{aligned}$$

Résoudre. On soustrait 27 aux deux membres : $-14y = -28$. On divise par -14 : $y = 2$. Puis $x = 9 - 4 \times 2 = 1$.

Vérifier. $1 + 4 \times 2 = 9$ et $3 \times 1 - 2 \times 2 = -1$.

Conclusion. Le système a pour solution le couple $(1; 2)$.

Attention : Les parenthèses gardent le signe moins

Avec $y = 2x + 3$, l'équation $5x - y = 6$ devient :

$$\begin{aligned} 5x - (2x + 3) &= 6 \\ 3x - 3 &= 6 \end{aligned}$$

On ajoute 3 aux deux membres, puis on divise par 3 : $x = 3$.

Sans parenthèses, on écrirait $5x - 2x + 3 = 6$. Le signe moins ne porterait que sur $2x$, et l'on trouverait $x = 1$: c'est faux.

Résoudre par combinaison

À retenir : Additionner membre à membre

Additionner deux équations **membre à membre**, c'est additionner leurs premiers membres entre eux, puis leurs seconds membres entre eux. Par exemple, $x + y = 5$ et $x - y = 1$ donnent $2x = 6$.

Propriété : Résolution par combinaison

On obtient un système qui a **les mêmes solutions** qu'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues lorsque :

- on multiplie les deux membres d'une des équations par un même nombre **non nul** ;
- on remplace une des équations par la **somme membre à membre** de cette équation et de l'autre.

En choisissant bien les nombres multiplicateurs, on fait **disparaître une inconnue** dans la somme : c'est la méthode par combinaison.

Remarque

Ce résultat est admis. Sur chaque exemple, tu peux contrôler que le couple obtenu vérifie les deux équations de départ. Le nombre multiplicateur doit être non nul : multiplier par 0 donnerait $0 = 0$, et l'équation serait perdue.

Méthode : la combinaison

1. **Choisis** l'inconnue à éliminer.
2. **Multiplie** chaque équation par un nombre non nul bien choisi. Les coefficients de cette inconnue doivent devenir **opposés**, c'est-à-dire de somme nulle.

3. **Additionne** les deux équations membre à membre : l'inconnue disparaît. Résous l'équation obtenue.
4. **Remplace** la valeur trouvée dans une équation de départ pour obtenir l'autre inconnue.
5. **Vérifie** dans les deux équations, puis **conclus**.

Exemple

Énoncé. Résous le système :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 5x - 2y = 12 \end{cases}$$

Multiplier. On élimine y. On multiplie la première équation par 2 : $4x + 6y = 2$. On multiplie la seconde par 3 : $15x - 6y = 36$.

Additionner. Membre à membre : $19x = 38$. On divise par 19 : $x = 2$.

Remplacer. Dans la première : $4 + 3y = 1$. On soustrait 4 aux deux membres : $3y = -3$, donc $y = -1$.

Vérifier. $2 \times 2 + 3 \times (-1) = 1$ et $5 \times 2 - 2 \times (-1) = 12$.

Conclusion. Le système a pour solution le couple $(2; -1)$.

Attention **: Le second membre aussi**

Multiplier $5x - 2y = 12$ par 3 donne $15x - 6y = 36$. Écrire $15x - 6y = 12$ est faux : le second membre doit lui aussi être multiplié. Sinon, le nouveau système n'a plus les mêmes solutions.

À retenir **: Substitution ou combinaison ?**

- Une inconnue a pour coefficient 1 ou -1 : la substitution est rapide.
- Tous les coefficients sont différents de 1 et de -1 : la combinaison permet en général de calculer sans fractions.

Les deux méthodes mènent à la même solution.

Deux droites, un point commun

À retenir **: Rappel : équation réduite d'une droite**

Rappel. Une droite qui n'est pas verticale a une équation réduite $y = mx + p$. Le nombre m est son **coefficient directeur**. Le nombre p, son **ordonnée à l'origine**, est l'ordonnée du point où elle coupe l'axe des ordonnées.

Deux droites qui ont le même coefficient directeur sont parallèles. On appelle **sécantes** deux droites qui ont un unique point commun. Deux droites **confondues** sont superposées : elles n'en forment qu'une.

Propriété : Interprétation graphique d'un système

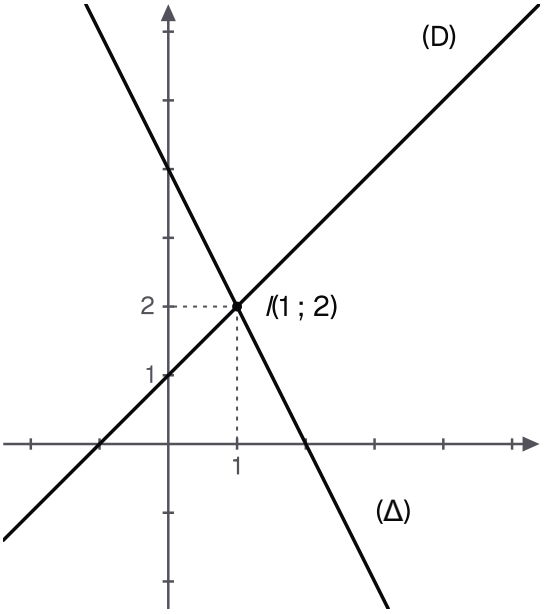
Le plan est muni d'un repère. Soit a, b et c trois nombres, avec $b \neq 0$. Les couples solutions de l'équation $ax + by = c$ sont les coordonnées des points de la droite d'équation

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}.$$

Les couples solutions d'un système de deux telles équations sont donc les coordonnées des **points communs** aux deux droites associées. Si les deux droites sont **sécantes** en un point I, le système a **une seule solution** : le couple des coordonnées de I.

Remarque

Ce résultat est admis. Place quelques couples solutions d'une même équation dans un repère : tu constates qu'ils sont alignés.



Deux droites sécantes en I : les coordonnées de I forment l'unique couple solution du système associé.

Méthode : la résolution graphique

1. **Transforme** chaque équation en équation réduite $y = mx + p$.
2. **Calcule** les coordonnées de deux points de chaque droite, puis trace les deux droites dans un même repère.

3. **Lis** les coordonnées du point d'intersection. Cette lecture est **approchée**.

4. **Contrôle** le couple lu dans les deux équations. S'il ne convient pas, résous par le calcul.

Exemple

Énoncé. Résous graphiquement le système :

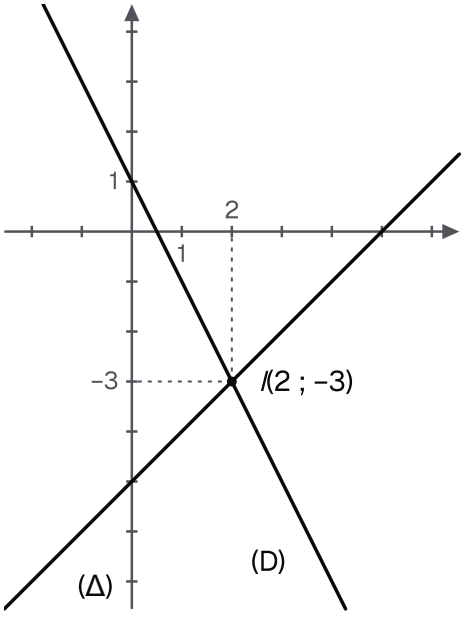
$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - y = 5 \end{cases}$$

Équations réduites. On soustrait $2x$ aux deux membres de la première : $y = -2x + 1$. Dans la seconde, on soustrait x, puis on multiplie par -1 : $y = x - 5$.

Points. La première droite passe par $(0; 1)$ et $(1; -1)$. La seconde passe par $(0; -5)$ et $(5; 0)$.

Lecture. Les droites semblent se couper au point de coordonnées $(2; -3)$.

Contrôle. $2 \times 2 + (-3) = 1$ et $2 - (-3) = 5$. Le système a pour solution le couple $(2; -3)$.



La droite (D) d'équation y = -2x + 1 et la droite (Δ) d'équation y = x - 5 se rencontrent au point de coordonnées (2 ; -3), solution confirmée par le contrôle.

Attention : Une lecture graphique n'est qu'approchée

Les droites $y = 2x$ et $y = -x + 2$ semblent se couper près de $(0{,}7; 1{,}3)$. Or $2 \times 0{,}7 = 1{,}4$: ce couple n'est pas solution.

Le calcul donne $2x = -x + 2$. On ajoute x aux deux membres : $3x = 2$, donc $x = \frac{2}{3}$ et $y = \frac{4}{3}$.

Une lecture se contrôle toujours.

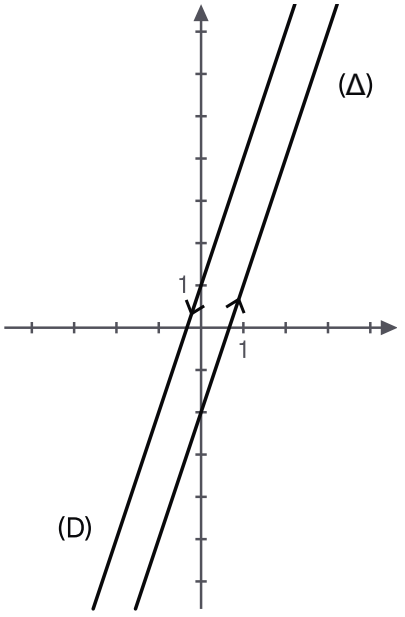
Propriété : Droites parallèles et nombre de solutions

On considère un système dont les deux équations s'écrivent $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$.

- Si $m \neq m'$, les deux droites sont sécantes : le système a **une seule solution**.
- Si $m = m'$ et $p \neq p'$, les deux droites sont strictement parallèles : le système n'a **aucune solution**.
- Si $m = m'$ et $p = p'$, les deux droites sont confondues : le système a **une infinité de solutions**.

Remarque

Ce résultat est admis. Une figure le rend crédible : deux droites strictement parallèles, c'est-à-dire parallèles et non confondues, ne se rencontrent jamais.



La droite (D) d'équation y = 3x + 1 et la droite (Δ) d'équation y = 3x - 2 ont le même coefficient directeur et restent à distance : pas de couple solution.

Exemple

Aucune solution. On étudie le système :

$$\begin{cases} y = 3x + 1 \\ 6x - 2y = 4 \end{cases}$$

On soustrait $6x$ aux deux membres de la seconde : $-2y = -6x + 4$. On divise par -2 : $y = 3x - 2$.

Les coefficients directeurs sont égaux à 3, les ordonnées à l'origine 1 et -2 diffèrent. Les droites sont strictement parallèles : aucun couple ne convient.

Une infinité. On étudie le système :

$$\begin{cases} y = -x + 4 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases}$$

Dans la seconde, on soustrait $2x$ aux deux membres, puis on divise par 2 : $y = -x + 4$. Les droites sont confondues.

Des problèmes aux systèmes

Méthode : mettre un problème en équations

1. **Nomme** les deux inconnues par une phrase : « Soit x le nombre de… ». Précise l'unité.
2. **Traduis** chaque information de l'énoncé par une équation. Les deux équations forment un système.
3. **Résous** ce système par substitution ou par combinaison.
4. **Contrôle** que les valeurs ont un sens : un nombre de personnes est un entier positif, par exemple.
5. **Réponds** à la question posée par une phrase.

Exemple

Énoncé. À la piscine, l'entrée coûte 20 DH pour un adulte et 10 DH pour un enfant. Un groupe de 9 personnes paie 120 DH. Combien compte-t-il d'adultes ?

Inconnues. Soit x le nombre d'adultes et y le nombre d'enfants.

Système. Les deux informations donnent :

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ 20x + 10y = 120 \end{cases}$$

Résolution. La première donne $y = 9 - x$. On remplace y dans la seconde, puis on réduit :

$$\begin{aligned} 20x + 10(9 - x) &= 120 \\ 10x + 90 &= 120 \end{aligned}$$

On soustrait 90 aux deux membres : $10x = 30$, donc $x = 3$ et $y = 6$.

Contrôle. $3 + 6 = 9$ et $20 \times 3 + 10 \times 6 = 120$; ce sont des entiers positifs.

Réponse. Le groupe compte 3 adultes et 6 enfants.

Équations, inéquations et systèmes du collège

> **À retenir : Rappel : équations à une inconnue**

Rappel. Pour résoudre $5x - 3 = 2x + 9$, on applique une règle à chaque ligne :

- on soustrait $2x$ aux deux membres : $3x - 3 = 9$;
- on ajoute 3 aux deux membres : $3x = 12$;
- on divise les deux membres par 3 : $x = 4$.

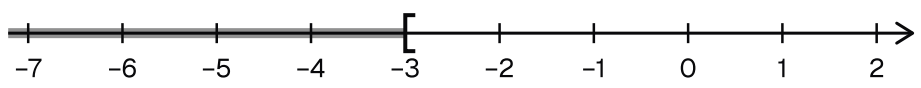
Rappel. Un produit de facteurs est nul quand l'un au moins d'entre eux est nul. Ainsi $(x - 3)(2x + 5) = 0$ donne $x - 3 = 0$ ou $2x + 5 = 0$, soit $x = 3$ ou $x = -\frac{5}{2}$.

À retenir : Rappel : inéquations à une inconnue

Rappel. Pour résoudre $-2x + 1 > 7$:

- on soustrait 1 aux deux membres : $-2x > 6$;
- on divise par -2, un nombre négatif : le sens change, et $x < -3$.

Rappel. Les solutions sont les nombres x tels que $x < -3$. Sur une droite graduée, c'est la partie à gauche de -3, le point -3 étant exclu.



Pour -2x + 1 > 7, la partie retenue s'étend à gauche de -3, et le crochet ouvert en -3 exclut ce nombre.

Équation du premier degré à deux inconnues

$$ax + by = c$$

Système de deux équations

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Équation réduite d'une droite

$$y = mx + p$$

Droites sécantes : une seule solution

$$m \neq m'$$

Droites strictement parallèles : aucune solution

$$m = m' \text{ et } p \neq p'$$

Droites confondues : une infinité de solutions

$$m = m' \text{ et } p = p'$$

Méthode : Quel outil pour quel problème ?

- **Une inconnue et une égalité** : une équation du premier degré, ou une équation produit nul.
- **Une inconnue et une comparaison** (« au plus », « au moins ») : une inéquation. Surveille le sens quand tu multiplies par un nombre négatif.
- **Deux inconnues et deux informations** : un système.

- **Un coefficient égal à 1 ou -1** : la substitution.
- **D'autres coefficients** : la combinaison.
- **Une figure demandée** : la résolution graphique, toujours contrôlée par le calcul.
- **Un problème** : nommer les inconnues, traduire, résoudre, contrôler, répondre.

> **À retenir : Rédiger une solution**
>
> Écris chaque étape avec la règle employée : « on ajoute 3 aux deux membres ». Vérifie le couple dans les deux équations. Termine par une phrase du type « Le système a pour solution le couple… », avec les valeurs trouvées.