BURHAN

Systèmes de deux équations du premier degré à deux inconnues : exercices, entraînement

3ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/3ac/mathematiques/systemes-de-deux-equations/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Systèmes de deux équations du premier degré à deux inconnues	Entraînement	7

Exercice 1

Une combinaison à deux multiplications

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} 3x + 4y = 10 \\ 2x - 5y = -24 \end{cases}$$

1.

Éliminer x par une combinaison, puis résoudre le système.

INDICE

Outil : la combinaison. **Début :** multiplie la première équation par 2 et la seconde par -3 : les coefficients de x deviennent 6 et -6.

CORRIGÉ

Multiplier. On multiplie les deux membres de la première équation par 2 : on obtient $6x + 8y = 20$. On multiplie ceux de la seconde par -3 : on obtient $-6x + 15y = 72$.

Additionner. On additionne ces deux équations membre à membre. Les termes $6x$ et $-6x$ disparaissent :

$$\begin{aligned} 8y + 15y &= 20 + 72 \\ 23y &= 92 \end{aligned}$$

On divise les deux membres par 23 : $y = 4$.

Remplacer. Dans la première équation, on remplace y par 4 :

$$\begin{aligned} 3x + 4 \times 4 &= 10 \\ 3x + 16 &= 10 \end{aligned}$$

On soustrait 16 aux deux membres : $3x = -6$. On divise par 3 : $x = -2$.

Vérifier.

- Première équation : $3 \times (-2) + 4 \times 4 = -6 + 16 = 10$.
- Seconde équation : $2 \times (-2) - 5 \times 4 = -4 - 20 = -24$.

Conclusion. Le système a pour solution le couple $(-2 ; 4)$.

2.

Retrouver la valeur de x par une seconde combinaison, qui élimine y.

INDICE

Début : multiplie la première équation par 5 et la seconde par 4 : les coefficients de y deviennent 20 et -20.

CORRIGÉ

Multiplier. On multiplie la première équation par 5 et la seconde par 4. On obtient $15x + 20y = 50$ et $8x - 20y = -96$.

Additionner. Membre à membre, les termes $20y$ et $-20y$ disparaissent :

$$15x + 8x = 50 - 96$$
$$23x = -46$$

On divise les deux membres par 23 : $x = -2$.

Conclusion. La seconde combinaison donne $x = -2$: c'est bien la valeur trouvée à la question 1.

Exercice 2

Chasser les virgules et les fractions

1.

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} 0{,}5x + y = 4 \\ x - 0{,}2y = 3{,}6 \end{cases}$$

Multiplier la première équation par 2 et la seconde par 5.

INDICE

Point délicat : multiplie chaque terme des deux membres, le second membre compris.

CORRIGÉ

Première équation. On multiplie chaque terme des deux membres par 2. Comme $0{,}5 \times 2 = 1$, on obtient $x + 2y = 8$.

Seconde équation. On multiplie chaque terme des deux membres par 5. Comme $0{,}2 \times 5 = 1$ et $3{,}6 \times 5 = 18$, on obtient $5x - y = 18$.

Conclusion. On peut remplacer le système de départ par ce système à coefficients entiers, qui a les mêmes solutions :

$$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 5x - y = 18 \end{cases}$$

2.

Résoudre ce système, puis vérifier dans les équations à coefficients décimaux.

INDICE

Outil : la substitution. **Début :** dans $5x - y = 18$, le coefficient de y vaut -1 : isole y.

CORRIGÉ

Isoler. Dans $5x - y = 18$, on ajoute y et on soustrait 18 aux deux membres :

$$y = 5x - 18$$

Substituer. On remplace y par $5x - 18$ dans $x + 2y = 8$, puis on développe et on réduit :

$$\begin{aligned} x + 2(5x - 18) &= 8 \\ x + 10x - 36 &= 8 \\ 11x - 36 &= 8 \end{aligned}$$

Résoudre. On ajoute 36 aux deux membres : $11x = 44$. On divise par 11 : $x = 4$. Puis $y = 5 \times 4 - 18 = 2$.

Vérifier. Dans les équations à coefficients décimaux :

- $0{,}5 \times 4 + 2 = 2 + 2 = 4$;
- $4 - 0{,}2 \times 2 = 4 - 0{,}4 = 3{,}6$.

Conclusion. Le système a pour solution le couple $(4 ; 2)$.

3.

Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

INDICE

Début : multiplie la première équation par 6, multiple commun de 3 et de 2. **Ensuite :** isole x dans la seconde.

CORRIGÉ

Multiplier. Le nombre 6 est un multiple commun de 3 et de 2. On multiplie chaque terme de la première équation par 6. Comme $6 \div 3 = 2$ et $6 \div 2 = 3$, on obtient :

$$2x + 3y = 24$$

Isoler. On ajoute y aux deux membres de la seconde équation : $x = y + 2$.

Substituer. On remplace x par $y + 2$ dans $2x + 3y = 24$:

$$\begin{aligned} 2(y + 2) + 3y &= 24 \\ 2y + 4 + 3y &= 24 \\ 5y + 4 &= 24 \end{aligned}$$

On soustrait 4 aux deux membres : $5y = 20$. On divise par 5 : $y = 4$. Puis $x = 4 + 2 = 6$.

Vérifier. $\dfrac{6}{3} + \dfrac{4}{2} = 2 + 2 = 4$ et $6 - 4 = 2$.

Conclusion. Le système a pour solution le couple $(6; 4)$.

Exercice 3

Remettre un système en ordre

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} 2y = 13 - 3x \\ x + 7 = 4y + 2 \end{cases}$$

1.

Écrire chaque équation sous la forme $ax + by = c$.

INDICE

Outil : ajoute ou soustrais le même terme aux deux membres, pour placer x et y à gauche et les nombres à droite.

CORRIGÉ

Première équation. On ajoute $3x$ aux deux membres de $2y = 13 - 3x$: $3x + 2y = 13$.

Seconde équation. On soustrait $4y$ aux deux membres de $x + 7 = 4y + 2$: $x - 4y + 7 = 2$. On soustrait ensuite 7 aux deux membres : $x - 4y = -5$.

Conclusion. Le système s'écrit :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 13 \\ x - 4y = -5 \end{cases}$$

2.

Résoudre le système, puis vérifier dans les équations de départ.

INDICE

Début : multiplie $3x + 2y = 13$ par 2 : les coefficients de y deviennent opposés.

CORRIGÉ

Multiplier. Les coefficients de y sont 2 et -4. On multiplie les deux membres de la première équation par 2 : $6x + 4y = 26$.

Additionner. Avec $x - 4y = -5$, membre à membre, les termes $4y$ et $-4y$ disparaissent :

$$\begin{aligned} 6x + x &= 26 - 5 \\ 7x &= 21 \end{aligned}$$

On divise les deux membres par 7 : $x = 3$.

Remplacer. Dans $3x + 2y = 13$: $9 + 2y = 13$. On soustrait 9 : $2y = 4$. On divise par 2 : $y = 2$.

Vérifier. Dans les équations de départ :

- $2y = 13 - 3x$: d'un côté $2 \times 2 = 4$, de l'autre $13 - 3 \times 3 = 4$;
- $x + 7 = 4y + 2$: d'un côté $3 + 7 = 10$, de l'autre $4 \times 2 + 2 = 10$.

Conclusion. Le système a pour solution le couple $(3\,;2)$.

Exercice 4

Une résolution graphique complète

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$$

1.

Écrire chaque équation sous la forme réduite $y = mx + p$.

INDICE

Début : isole le terme en y. **Point délicat :** dans la première équation, divise chaque terme par 2.

CORRIGÉ

Première équation. On soustrait x aux deux membres : $2y = -x + 4$. On divise chaque terme par 2 :

$$y = -\frac{1}{2}x + 2$$

Seconde équation. On soustrait $3x$ aux deux membres : $-y = -3x + 5$. On multiplie chaque terme par -1 :

$$y = 3x - 5$$

Conclusion. Les formes réduites sont $y = -\frac{1}{2}x + 2$ et $y = 3x - 5$.

2.

Calculer deux points de chaque droite. Tracer les droites sur ton cahier, puis donner le point où elles se rencontrent.

INDICE

Outil : choisis des abscisses qui donnent des ordonnées entières, par exemple des nombres pairs pour la première droite.

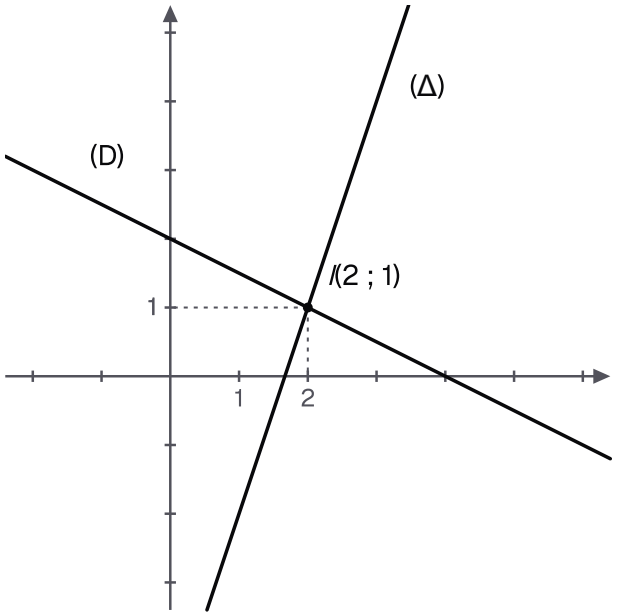
CORRIGÉ

Première droite. Pour $x = 0$: $y = 2$. Pour $x = 4$: $y = -2 + 2 = 0$. Elle passe par $(0; 2)$ et $(4; 0)$.

Seconde droite. Pour $x = 1$: $y = 3 - 5 = -2$. Pour $x = 3$: $y = 9 - 5 = 4$. Elle passe par $(1; -2)$ et $(3; 4)$.

Lecture. On trace chaque droite par ses deux points. Le point commun des deux tracés paraît être $(2; 1)$.

Conclusion. Les droites semblent se rencontrer au point $(2; 1)$. Ce n'est qu'une valeur approchée.



La droite (D) d'équation y = -x/2 + 2 descend doucement, la droite (Δ) d'équation y = 3x - 5 monte fortement : elles se rencontrent en I(2 ; 1), valeur lue à vérifier ensuite.

3.

Vérifier ce résultat par le calcul et conclure.

INDICE

Outil : remplace le couple lu dans les deux équations du système.

CORRIGÉ

Contrôle. On remplace x par 2 et y par 1 dans les deux équations du système.

- $x + 2y = 4$: $2 + 2 \times 1 = 4$.
- $3x - y = 5$: $3 \times 2 - 1 = 5$.

Les deux égalités sont vraies : la lecture est confirmée.

Conclusion. Le système a pour solution le couple $(2; 1)$.

Exercice 5

Compter les solutions avant de calculer

On considère les deux systèmes suivants :

$$(S_1) : \begin{cases} 3x + y = 2 \\ 6x + 2y = 7 \end{cases}$$

$$(S_2) : \begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

1.

Écrire les quatre équations sous la forme réduite $y = mx + p$.

INDICE

Outil : isole y avec les règles des équations : un terme à soustraire, puis une division ou une multiplication.

CORRIGÉ

Système (S_1).

- Dans $3x + y = 2$, on soustrait $3x$ aux deux membres : $y = -3x + 2$.
- Dans $6x + 2y = 7$, on soustrait $6x$: $2y = -6x + 7$. On divise chaque terme par 2 : $y = -3x + \dfrac{7}{2}$.

Système (S_2).

- Dans $x - y = 1$, on soustrait x, puis on multiplie chaque terme par -1 : $y = x - 1$.
- Dans $2x + y = 5$, on soustrait $2x$ aux deux membres : $y = -2x + 5$.

Conclusion. Les quatre équations sont écrites sous la forme réduite $y = mx + p$.

2.

Combien de solutions a chaque système ? Justifier.

INDICE

Outil : compare d'abord les coefficients directeurs, puis, s'ils sont égaux, les ordonnées à l'origine.

CORRIGÉ

Système (S_1). Les deux droites ont le même coefficient directeur, -3. Leurs ordonnées à l'origine, 2 et $\dfrac{7}{2}$, sont différentes. Ces droites sont donc strictement parallèles.

Système (S_2). Les coefficients directeurs, 1 et -2, sont différents. Ces droites sont donc sécantes : elles ont un seul point commun.

Conclusion. Le système (S_1) n'a aucune solution. Le système (S_2) a une seule solution.

3.

Résoudre le système (S_2).

INDICE

Début : les coefficients de y sont -1 et 1 : additionne les deux équations.

CORRIGÉ

Additionner. Les coefficients de y sont -1 et 1. On additionne les deux équations membre à membre :

$$x + 2x = 1 + 5$$
$$3x = 6$$

On divise les deux membres par 3 : $x = 2$.

Remplacer. Dans $2x + y = 5$: $4 + y = 5$. On soustrait 4 aux deux membres : $y = 1$.

Vérifier. $2 - 1 = 1$ et $2 \times 2 + 1 = 5$.

Conclusion. Le système (S_2) a pour solution le couple $(2; 1)$.

Exercice 6

Les billets d'une séance de cinéma

Dans un cinéma, un billet à plein tarif coûte 40 DH et un billet à tarif réduit 25 DH.

Pour une séance, on a vendu 120 billets, pour une recette de $4\,050$ DH.

1.

Choisir deux inconnues et écrire un système qui traduit l'énoncé.

INDICE

Outil : une équation pour le nombre de billets, une autre pour la recette.

CORRIGÉ

Inconnues. Soit x le nombre de billets à plein tarif et y le nombre de billets à tarif réduit.

Équations. On a vendu 120 billets : $x + y = 120$. Les billets à plein tarif rapportent $40x$ DH et les autres $25y$ DH : $40x + 25y = 4\,050$.

Conclusion. L'énoncé se traduit par le système :

$$\begin{cases} x + y = 120 \\ 40x + 25y = 4\,050 \end{cases}$$

2.

Résoudre ce système.

INDICE

Début : dans la première équation, isole y. **Point délicat :** écris l'expression obtenue entre parenthèses.

CORRIGÉ

Isoler. On soustrait x aux deux membres de la première équation : $y = 120 - x$.

Substituer. On remplace y par $120 - x$ dans la seconde équation :

$$40x + 25(120 - x) = 4\,050$$

On développe : $25(120 - x)$ devient $3\,000 - 25x$. On réduit les termes en x : $40x - 25x = 15x$. On obtient :

$$15x + 3\,000 = 4\,050$$

Résoudre. On soustrait $3\,000$ aux deux membres : $15x = 1\,050$. On divise par 15 : $x = 70$. Puis $y = 120 - 70 = 50$.

Conclusion. La résolution donne $x = 70$ et $y = 50$.

3.

Vérifier, puis répondre au problème par une phrase.

INDICE

Outil : contrôle le nombre de billets et la recette, puis le sens des valeurs.

CORRIGÉ

Vérifier.

- Nombre de billets : $70 + 50 = 120$.
- Recette : $40 \times 70 + 25 \times 50 = 2\,800 + 1\,250 = 4\,050$.

Les deux valeurs sont des nombres entiers positifs : elles conviennent pour compter des billets.

Réponse. On a vendu 70 billets à plein tarif et 50 billets à tarif réduit.

Exercice 7

Peser des billes de verre et d'acier

En physique, on pèse des billes. Toutes les billes de verre ont la même masse, et toutes les billes d'acier aussi.

Trois billes de verre et deux billes d'acier pèsent 46 g. Une bille de verre et quatre billes d'acier pèsent 72 g.

1.

On note x la masse d'une bille de verre et y celle d'une bille d'acier, en grammes. Écrire un système qui traduit les deux pesées.

INDICE

Outil : trois billes de verre pèsent $3x$ grammes.

CORRIGÉ

La première pesée donne $3x + 2y = 46$. La seconde donne $x + 4y = 72$.

Conclusion. Les deux pesées se traduisent par le système :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 46 \\ x + 4y = 72 \end{cases}$$

2.

Résoudre ce système.

INDICE

Début : dans la seconde équation, le coefficient de x vaut 1 : isole x.

CORRIGÉ

Isoler. Dans la seconde équation, on soustrait $4y$ aux deux membres : $x = 72 - 4y$.

Substituer. On remplace x par $72 - 4y$ dans la première équation, puis on développe et on réduit :

$$\begin{aligned} 3(72 - 4y) + 2y &= 46 \\ 216 - 12y + 2y &= 46 \\ 216 - 10y &= 46 \end{aligned}$$

Résoudre. On soustrait 216 aux deux membres : $-10y = -170$. On divise par -10 : $y = 17$.

Puis $x = 72 - 4 \times 17 = 72 - 68 = 4$.

Conclusion. La résolution donne $x = 4$ et $y = 17$.

3.

Vérifier, puis donner la masse de chaque sorte de bille.

INDICE

Outil : recalcule chaque pesée avec les valeurs trouvées.

CORRIGÉ

Vérifier.

- Première pesée : $3 \times 4 + 2 \times 17 = 12 + 34 = 46$.
- Seconde pesée : $4 + 4 \times 17 = 4 + 68 = 72$.

Les deux masses sont positives : elles conviennent.

Réponse. Une bille de verre pèse 4 g et une bille d'acier pèse 17 g.