BURHAN

Systèmes de deux équations du premier degré à deux inconnues

3ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/3ac/mathematiques/systemes-de-deux-equations/cours

Chapitre	Semestre
Systèmes de deux équations du premier degré à deux inconnues	Semestre 2

Deux prix inconnus

À la papeterie, Salma achète 2 cahiers et 1 stylo : elle paie 19 DH. Son frère achète 1 cahier et 3 stylos du même modèle : il paie 17 DH. Le ticket de caisse est perdu.

Combien coûte un cahier ? Combien coûte un stylo ?

Devine : Une prédiction

À ton avis, quel est le prix d'un cahier ?

A. 6 DH

Faux.
Le stylo coûterait alors $19 - 12 = 7$ DH. Le frère paierait $6 + 21 = 27$ DH, et non 17 DH.

B. 7 DH

Faux.
Le stylo coûterait $19 - 14 = 5$ DH. Le frère paierait $7 + 15 = 22$ DH.

C. 8 DH

Juste.
Juste : le stylo coûte 3 DH, et le frère paie $8 + 9 = 17$ DH.

D. 9 DH

Faux.
Le stylo coûterait $19 - 18 = 1$ DH. Le frère paierait $9 + 3 = 12$ DH.

Correction

Si un cahier coûte 8 DH, Salma paie 16 DH pour ses deux cahiers. Son stylo coûte donc $19 - 16 = 3$ DH.

Contrôle avec le frère : $8 + 3 \times 3 = 17$ DH.

Les deux achats sont respectés : un cahier coûte 8 DH et un stylo 3 DH.

Tu as cherché deux nombres inconnus qui respectent deux conditions à la fois. Essayer des valeurs une par une prend du temps.

Dans ce chapitre, tu apprends à trouver ces deux nombres par le calcul, puis à l'aide de deux droites. Tu sauras ensuite traduire un problème de la vie courante en équations.

Une équation, deux inconnues

Des couples qui conviennent

Devine : Des pièces de monnaie

Karim paie 12 DH avec des pièces de 2 DH et de 1 DH. On note x le nombre de pièces de 2 DH et y le nombre de pièces de 1 DH. On a donc $2x + y = 12$.

Les nombres x et y sont les **inconnues** : on ne les connaît pas encore.

Une réponse s'écrit sous la forme d'un **couple** $(x ; y)$: la valeur de x d'abord, celle de y ensuite. Quel couple convient ?

A. $(5 ; 2)$
Juste.
Juste : $2 \times 5 + 2 = 12$.

B. $(2 ; 5)$
Faux.
$2 \times 2 + 5 = 9$: tu as échangé les deux valeurs.

C. $(4 ; 3)$
Faux.
$2 \times 4 + 3 = 11$, et non 12.

D. $(6 ; 1)$
Faux.
$2 \times 6 + 1 = 13$, et non 12.

Correction
Avec $x = 5$ et $y = 2$, le premier membre vaut :

$$2 \times 5 + 2 = 10 + 2 = 12$$

Le couple $(5 ; 2)$ convient : 5 pièces de 2 DH et 2 pièces de 1 DH.

En clair. Le couple $(5 ; 2)$ n'est pas le seul qui convient. Karim peut aussi donner 4 pièces de 2 DH et 4 pièces de 1 DH : $2 \times 4 + 4 = 12$.

Il peut encore donner 3 pièces de 2 DH et 6 pièces de 1 DH : $2 \times 3 + 6 = 12$.

Une seule égalité ne suffit donc pas à trouver les deux nombres.

La définition

Définition : Équation du premier degré à deux inconnues

Soit a, b et c trois nombres, où a et b ne sont pas nuls en même temps. Une égalité de la forme

$$ax + by = c,$$

où x et y sont deux nombres inconnus, est une **équation du premier degré à deux inconnues** x et y.

Un **couple** $(x_0; y_0)$ est une **solution** de cette équation lorsque l'égalité $ax_0 + by_0 = c$ est vraie. Dans un couple, l'ordre compte : la première valeur remplace x et la seconde remplace y.

En clair. Dans l'équation $3x - 2y = 4$, les nombres 3 et -2 placés devant les inconnues sont les **coefficients**.

Une solution est un couple qui rend l'égalité vraie. Pour le savoir, on remplace et on calcule.

Exemple : des solutions d'une équation

On étudie l'équation $3x - 2y = 4$.

- Pour le couple $(2; 1)$: $3 \times 2 - 2 \times 1 = 6 - 2 = 4$. L'égalité est vraie : $(2; 1)$ est solution.
- Pour le couple $(0; -2)$: $3 \times 0 - 2 \times (-2) = 0 + 4 = 4$. Ce couple est aussi solution.
- Pour le couple $(1; 2)$: $3 \times 1 - 2 \times 2 = 3 - 4 = -1$. Or $-1 \neq 4$: ce couple n'est pas solution.

L'ordre compte

Attention : l'ordre du couple

✗ « Le couple $(2; 5)$ est solution de $2x + y = 12$, car $2 \times 5 + 2 = 12$. »

✓ Dans $(2; 5)$, la première valeur remplace x : $x = 2$ et $y = 5$. On calcule $2 \times 2 + 5 = 9$. Or $9 \neq 12$: le couple $(2; 5)$ n'est pas solution.

C'est le couple $(5; 2)$ qui convient.

Vérifie : Remplacer dans le bon ordre

Le couple $(-1; 3)$ est-il solution de l'équation $4x + 3y = 5$?

A. Non, car $4 \times 3 + 3 \times (-1) = 9$.
Faux.
Tu as échangé les valeurs : x vaut -1, et non 3.

B. Oui, car $4 \times (-1) + 3 \times 3 = 5$.
Juste.
Juste : $-4 + 9 = 5$.

C. Non, car $4 \times 1 + 3 \times 3 = 13$.

Faux.
Tu as oublié le signe : x vaut -1.

D. Non : une solution n'a pas de valeur négative.
Faux.
Une solution peut contenir des nombres négatifs.

Correction
On remplace x par -1 et y par 3 :

$$4 \times (-1) + 3 \times 3 = -4 + 9 = 5$$

L'égalité est vraie : le couple $(-1; 3)$ est solution de l'équation.

Vérifier un couple

Méthode : vérifier qu'un couple est solution d'une équation

1. **Remplace** x par la première valeur du couple et y par la seconde. Mets les nombres négatifs entre parenthèses.
2. **Calcule** le premier membre.
3. **Compare** le résultat au second membre.
4. **Conclus** par une phrase : le couple est solution, ou il ne l'est pas.

Exemple : des caisses dans un camion

En physique, une masse se mesure en kilogrammes. Un camion transporte des caisses de 20 kg et des caisses de 15 kg, pour 200 kg en tout.

Avec x caisses de 20 kg et y caisses de 15 kg, on a :

$$20x + 15y = 200$$

- Pour $(4; 8)$: $20 \times 4 + 15 \times 8 = 80 + 120 = 200$. Ce couple est solution.
- Pour $(5; 6)$: $20 \times 5 + 15 \times 6 = 100 + 90 = 190$. Or $190 \neq 200$: ce couple n'est pas solution.

Traduire, puis à toi

Exemple : traduire une phrase

« Le double d'un nombre x, augmenté du triple d'un nombre y, est égal à 18. » Le double de x s'écrit $2x$. Le triple de y s'écrit $3y$.

La phrase se traduit donc par l'équation :

$$2x + 3y = 18$$

Le couple $(3; 4)$ en est une solution : $2 \times 3 + 3 \times 4 = 6 + 12 = 18$.

À toi : Vérifier, puis chercher

On considère l'équation $5x - y = 7$. (a) Le couple $(2; 3)$ est-il solution ? (b) Et le couple $(3; 2)$?

(c) Trouve le couple solution dont la première valeur est 0.

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Applique la méthode : remplace x par la première valeur, y par la seconde.
Indice 2
Pour (a), calcule $5 \times 2 - 3$. Pour (c), remplace x par 0.
Indice 3
Point délicat : si $-y = 7$, alors y n'est pas égal à 7. Que dois-tu faire aux deux membres pour passer de $-y$ à y ?

Réponse
(a) $5 \times 2 - 3 = 10 - 3 = 7$: le couple $(2; 3)$ est solution.

(b) $5 \times 3 - 2 = 15 - 2 = 13$. Or $13 \neq 7$: le couple $(3; 2)$ n'est pas solution.

(c) Avec $x = 0$, l'équation devient $-y = 7$. On multiplie les deux membres par -1 : $y = -7$.

Vérification : $5 \times 0 - (-7) = 7$. La solution cherchée est le couple $(0; -7)$.

Le mot du prof. Une équation à deux inconnues peut avoir de nombreuses solutions. Pour trouver un seul couple, il faut une deuxième condition. C'est le travail de la section suivante.

Deux équations à la fois

Un couple pour deux conditions

Devine : Deux conditions à la fois

On cherche deux nombres x et y tels que $x + y = 9$ et $x - y = 3$. Quel couple $(x; y)$ vérifie les deux conditions ?

A. $(5; 4)$
Faux.
$5 + 4 = 9$, mais $5 - 4 = 1$ et non 3.

B. $(7; 4)$
Faux.
$7 - 4 = 3$, mais $7 + 4 = 11$ et non 9.

C. $(3;6)$

Faux.

$3+6=9$, mais $3-6=-3$: l'ordre compte.

D. $(6;3)$

Juste.

Juste : $6+3=9$ et $6-3=3$.

Correction

Le couple $(6;3)$ vérifie $6+3=9$ et $6-3=3$. Chacun des trois autres couples ne vérifie qu'une des deux conditions.

En clair. Le couple $(5;4)$ vérifie la première condition, mais pas la seconde. Le couple $(7;4)$ vérifie la seconde, mais pas la première. On cherche un couple qui vérifie les deux à la fois.

On écrit alors les deux équations ensemble, avec une accolade : c'est un **système**.

La définition

Définition : Système de deux équations à deux inconnues

Un **système de deux équations du premier degré à deux inconnues** x et y s'écrit

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

où a, b, c, a', b' et c' sont des nombres donnés, chaque ligne étant une équation du premier degré à deux inconnues.

Un couple $(x_0;y_0)$ est une **solution du système** lorsqu'il est solution **des deux équations à la fois**. **Résoudre** le système, c'est trouver tous ses couples solutions.

Exemple : écrire un système

Au cinéma, 3 billets adulte et 2 billets enfant coûtent 110 DH. Un billet adulte et 4 billets enfant coûtent 80 DH.

On note x le prix d'un billet adulte et y celui d'un billet enfant, en DH. On obtient le système :

$$\begin{cases} 3x+2y=110 \\ x+4y=80 \end{cases}$$

La première ligne traduit le premier achat, la seconde le deuxième achat.

Vérifier dans les deux équations

Méthode : vérifier qu'un couple est solution d'un système

1. **Remplace** dans la première équation et calcule.
2. **Remplace** dans la seconde équation et calcule.
3. **Conclus** : le couple est solution du système seulement si les deux égalités sont vraies. Une seule égalité fausse suffit pour dire non.

Exemple : les prix du cinéma

Le couple $(28; 13)$ est-il solution du système du cinéma ?

- Première équation : $3 \times 28 + 2 \times 13 = 84 + 26 = 110$. L'égalité est vraie.
- Seconde équation : $28 + 4 \times 13 = 28 + 52 = 80$. L'égalité est vraie.

Le couple $(28; 13)$ est donc solution du système.

En revanche, $(30; 10)$ vérifie la première équation, car $90 + 20 = 110$. Mais $30 + 4 \times 10 = 70$, et non 80 : ce couple n'est pas solution.

Un piège

Attention : une seule équation ne suffit pas

On étudie le système :

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

✗ « Le couple $(2; 1)$ est solution de ce système, car $2 + 1 = 3$. »

✓ Il faut aussi vérifier la seconde équation : $2 \times 2 - 1 = 3$. Or $3 \neq 1$. Le couple $(2; 1)$ n'est donc pas solution du système.

Vérifie : Les deux équations

Le couple $(1; -2)$ est-il solution du système suivant ?

$$\begin{cases} 3x - y = 5 \\ x + 2y = -4 \end{cases}$$

A. Oui, car la première égalité est vraie.

Faux.
La première est vraie, mais il faut aussi tester la seconde.

B. Non, car la seconde égalité est fausse.

Juste.
Juste : $1 + 2 \times (-2) = -3$, et non -4.

C. Oui, car les deux égalités sont vraies.
Faux.
Refais le calcul de la seconde : $1 - 4 = -3$.

D. Non, car la première égalité est fausse.
Faux.
$3 \times 1 - (-2) = 3 + 2 = 5$: la première est vraie.

Correction
Première équation. $3 \times 1 - (-2) = 3 + 2 = 5$: l'égalité est vraie.

Seconde équation. $1 + 2 \times (-2) = 1 - 4 = -3$. Or $-3 \neq -4$: l'égalité est fausse.

Conclusion. Le couple $(1; -2)$ n'est pas solution du système.

Au basket, puis à toi

Exemple : des paniers au basket

Au basket, une équipe réussit 12 paniers, à 2 points ou à 3 points. Elle marque 29 points. Avec x paniers à 2 points et y paniers à 3 points :

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ 2x + 3y = 29 \end{cases}$$

- Pour $(7; 5)$: $7 + 5 = 12$ et $2 \times 7 + 3 \times 5 = 14 + 15 = 29$. Le couple $(7; 5)$ est solution du système.
- Pour $(5; 7)$: $5 + 7 = 12$, mais $2 \times 5 + 3 \times 7 = 10 + 21 = 31$. Ce couple n'est pas solution.

À toi : Un couple, deux tests

On considère le système :

$$\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ 4x - y = 13 \end{cases}$$

Le couple $(3; -1)$ en est-il solution ? Et le couple $(-2; 1)$?

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Teste chaque couple dans les deux équations.
Indice 2
Pour $(3; -1)$, calcule $2 \times 3 + 5 \times (-1)$, puis $4 \times 3 - (-1)$.

Indice 3
Point délicat : $-(-1)$ vaut $+1$.

Réponse
Pour $(3;-1)$: $2\times 3+5\times(-1)=6-5=1$, vrai. Puis $4\times 3-(-1)=12+1=13$, vrai.

Les deux égalités sont vraies : le couple $(3;-1)$ est solution du système.

Pour $(-2;1)$: $2\times(-2)+5\times 1=-4+5=1$, vrai. Mais $4\times(-2)-1=-8-1=-9$.

Or $-9\neq 13$: le couple $(-2;1)$ n'est pas solution.

Le mot du prof. Tu sais maintenant vérifier une proposition de solution. Mais deviner un couple prend du temps. Les deux sections suivantes donnent des méthodes pour le trouver par le calcul.

Résoudre par substitution

Remplacer une inconnue

Devine : Remplacer une inconnue

On considère le système :

$$\begin{cases} y=2x \\ x+y=15 \end{cases}$$

La première équation dit que y est le double de x. On remplace y par $2x$ dans la seconde équation. Quelle équation obtient-on ?

A. $2x+y=15$
Faux.
On a remplacé x par $2x$: c'est y qu'il faut remplacer.

B. $x+2=15$
Faux.
On remplace y par $2x$ tout entier, et non par 2.

C. $x+2x=15$
Juste.
Juste : il ne reste qu'une inconnue, x.

D. $x+y=30$
Faux.
Le second membre a été doublé : rien ne le justifie.

Correction
On remplace y par $2x$: $x+2x=15$, soit $3x=15$.

On divise les deux membres par 3 : $x=5$. Puis $y=2\times 5=10$.

> Vérification : $10 = 2 \times 5$ et $5 + 10 = 15$. Le système a pour solution le couple $(5; 10)$.

Rappel (équations à une inconnue) : pour résoudre $4x - 7 = 9$, on ajoute 7 aux deux membres : $4x = 16$. On divise ensuite les deux membres par 4 : $x = 4$. On vérifie : $4 \times 4 - 7 = 16 - 7 = 9$.

La propriété

Propriété : Résolution par substitution

On considère un système de deux équations du premier degré à deux inconnues x et y. Supposons que l'une des deux équations s'écrive, ou se transforme, sous la forme $y = mx + p$, où m et p sont des nombres donnés.

On **remplace** alors y par $mx + p$ dans l'autre équation : on obtient une équation du premier degré à **une seule inconnue** x.

Le système de départ a **les mêmes solutions** que le système formé par l'équation $y = mx + p$ et cette nouvelle équation. Le rôle de x et de y peut être échangé.

Remarque

Ce résultat est admis. Tu peux t'en convaincre sur la première activité : le couple $(5; 10)$, trouvé après le remplacement, vérifie bien les deux équations de départ.

Exemple : isoler, puis substituer

Isoler une inconnue, c'est l'écrire seule dans un membre de l'équation. **Substituer** une inconnue, c'est la remplacer par une expression.

Résolvons le système suivant. L'inconnue y est déjà isolée dans la première équation.

$$\begin{cases} y = x + 4 \\ 2x + y = 13 \end{cases}$$

On substitue $x + 4$ à y dans la seconde équation, puis on réduit le premier membre :

$$\begin{aligned} 2x + (x + 4) &= 13 \\ 3x + 4 &= 13 \end{aligned}$$

On soustrait 4 aux deux membres : $3x = 9$. On divise par 3 : $x = 3$. On calcule ensuite $y = 3 + 4 = 7$.

Vérification : $7 = 3 + 4$ et $2 \times 3 + 7 = 13$. Le système a pour solution le couple $(3; 7)$.

La méthode pas à pas

Méthode : résoudre par substitution

1. **Isole** une inconnue dans une équation, de préférence celle dont le coefficient vaut 1 ou -1.
2. **Remplace** cette inconnue dans l'autre équation, entre parenthèses.
3. **Résous** l'équation à une inconnue obtenue.
4. **Calcule** l'autre inconnue.
5. **Vérifie** le couple dans les deux équations de départ.
6. **Conclus** par une phrase.

Exemple : Exemple guidé : une substitution complète

Résolvons le système :

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 3x + 2y = 18 \end{cases}$$

Isoler. On ajoute y aux deux membres de la première équation : $x = y + 1$.

Remplacer. On remplace x par $(y + 1)$ dans la seconde. On développe, puis on réduit :

$$\begin{aligned} 3(y + 1) + 2y &= 18 \\ 3y + 3 + 2y &= 18 \\ 5y + 3 &= 18 \end{aligned}$$

Résoudre. On soustrait 3 aux deux membres : $5y = 15$. On divise par 5 : $y = 3$, puis $x = 3 + 1 = 4$.

Vérifier. $4 - 3 = 1$ et $3 \times 4 + 2 \times 3 = 12 + 6 = 18$. Le système a pour solution le couple $(4\,;3)$.

Vérifie : Isoler une inconnue

On considère le système :

$$\begin{cases} 4x + y = 11 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$$

On isole y dans la première équation. Quelle écriture est juste ?

A. $y = 11 - 4x$

Juste.

Juste : on soustrait $4x$ aux deux membres.

B. $y = 4x - 11$

Faux.

Les signes sont inversés : avec $x = 0$, on doit trouver $y = 11$.

C. $y = 11 + 4x$

Faux.

On soustrait $4x$: on ne l'ajoute pas.

D. $x = 11 - 4y$

Faux.

Le coefficient 4 est devant x, et non devant y.

Correction

On soustrait $4x$ aux deux membres de $4x + y = 11$: $y = 11 - 4x$.

On remplace ensuite y par $(11 - 4x)$ dans la seconde équation, puis on développe :

$$\begin{aligned} 3x - 2(11 - 4x) &= 0 \\ 3x - 22 + 8x &= 0 \\ 11x - 22 &= 0 \end{aligned}$$

On ajoute 22 aux deux membres : $11x = 22$. On divise par 11 : $x = 2$, puis $y = 11 - 4 \times 2 = 3$.

Vérification : $4 \times 2 + 3 = 11$ et $3 \times 2 - 2 \times 3 = 0$.

Les parenthèses

Attention : les parenthèses

✗ « Avec $y = x - 5$, l'équation $3x - 2y = 4$ devient $3x - 2x - 5 = 4$. »

✓ On remplace y par $(x - 5)$ tout entier, puis on développe :

$$\begin{aligned} 3x - 2(x - 5) &= 4 \\ 3x - 2x + 10 &= 4 \\ x + 10 &= 4 \end{aligned}$$

On soustrait 10 aux deux membres : $x = -6$. Puis $y = -6 - 5 = -11$.

Vérification : $3 \times (-6) - 2 \times (-11) = -18 + 22 = 4$.

Trouve l'erreur : Un remplacement à corriger

Lina remplace y par $1 - 2x$ dans l'équation $5x - 3y = 19$. Elle écrit $5x - 3 - 2x = 19$. Où est l'erreur ?

A. Il fallait remplacer x par une expression, pas y.

Faux.

On peut remplacer l'une ou l'autre : ce n'est pas l'erreur.

B. Il n'y a aucune erreur dans son remplacement.

Faux.

Avec les parenthèses, le résultat est différent.

C. Il fallait écrire $5x - 3 + 2x = 19$, sans changer de signe.

Faux.

Le facteur -3 multiplie aussi $-2x$: on obtient $+6x$.

D. Elle a oublié de mettre $1 - 2x$ entre parenthèses.

Juste.

Juste : il faut écrire $5x - 3(1 - 2x) = 19$.

Correction

On écrit $1 - 2x$ entre parenthèses, puis on développe :

$$\begin{aligned} 5x - 3(1 - 2x) &= 19 \\ 5x - 3 + 6x &= 19 \\ 11x - 3 &= 19 \end{aligned}$$

On ajoute 3 aux deux membres : $11x = 22$. On divise par 11 : $x = 2$.

Puis $y = 1 - 2 \times 2 = -3$. Vérification : $5 \times 2 - 3 \times (-3) = 10 + 9 = 19$.

Dans une recette

Exemple : une recette de gâteau

Une recette demande 600 g de farine et de sucre en tout. La masse de farine est le triple de celle du sucre.

On note f la masse de farine et s celle du sucre, en grammes. On obtient le système :

$$\begin{cases} f + s = 600 \\ f = 3s \end{cases}$$

- On remplace f par $3s$ dans la première équation : $3s + s = 600$, soit $4s = 600$.
- On divise par 4 : $s = 150$. Puis $f = 3 \times 150 = 450$.

Vérification : $450 + 150 = 600$ et $450 = 3 \times 150$. Le système a pour solution le couple $(450; 150)$: il faut 450 g de farine et 150 g de sucre.

En clair. La substitution est rapide quand une inconnue a pour coefficient 1 ou -1 : on l'isole sans fraction.

Si aucun coefficient ne vaut 1 ou -1, isoler fait apparaître des fractions. La méthode de la section suivante évite alors ces calculs.

À toi

À toi : Résoudre par substitution

Résous par substitution le système :

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$$

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Isole x dans la première équation : son coefficient vaut 1.
Indice 2
Tu obtiens $x = 2y + 1$. Remplace x par $(2y + 1)$ dans la seconde équation.
Indice 3
Point délicat : $2(2y + 1)$ se développe en $4y + 2$.

Réponse
On ajoute $2y$ aux deux membres de la première équation : $x = 2y + 1$.

On remplace x par $(2y + 1)$ dans la seconde. On développe, puis on réduit :

$$\begin{aligned} 2(2y + 1) + y &= 7 \\ 4y + 2 + y &= 7 \\ 5y + 2 &= 7 \end{aligned}$$

On soustrait 2 aux deux membres : $5y = 5$. On divise par 5 : $y = 1$. Puis $x = 2 \times 1 + 1 = 3$.

Vérification : $3 - 2 \times 1 = 1$ et $2 \times 3 + 1 = 7$. Le système a pour solution le couple $(3\,;1)$.

Le mot du prof. Isoler, remplacer entre parenthèses, résoudre, vérifier : retiens ces quatre gestes. Tu les as faits sur des nombres et sur une recette. Tu les reprendras dans les problèmes du chapitre.

Résoudre par combinaison

Additionner deux égalités

Devine : Additionner deux égalités

Au marché, 1 kg de tomates et 1 kg d'oignons coûtent ensemble 14 DH. Le kilogramme de tomates coûte 4 DH de plus que celui d'oignons.

Avec x le prix d'un kilogramme de tomates et y celui d'un kilogramme d'oignons, en DH, on obtient le système :

$$\begin{cases} x + y = 14 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

On additionne les deux équations **membre à membre** : on additionne les deux premiers membres entre eux, puis les deux seconds membres entre eux. Qu'obtient-on ?

A. $2x + 2y = 18$
Faux.

Les termes y et $-y$ s'annulent : leur somme vaut 0.

B. $x = 18$

Faux.

On additionne aussi x et x : on obtient $2x$.

C. $2y = 10$

Faux.

C'est le résultat d'une soustraction, pas d'une addition.

D. $2x = 18$

Juste.

Juste : l'inconnue y a disparu.

Correction

On additionne membre à membre :

$$\begin{aligned}(x+y)+(x-y) &= 14+4\\ 2x &= 18\end{aligned}$$

On divise par 2 : $x = 9$. Dans la première équation, $9 + y = 14$, donc $y = 5$.

Vérification : $9 + 5 = 14$ et $9 - 5 = 4$. Le système a pour solution le couple $(9\,;5)$: les tomates coûtent 9 DH le kilogramme, les oignons 5 DH.

En clair. Dans l'activité, y et $-y$ sont des termes **opposés** : leur somme est nulle. En additionnant les deux équations, l'inconnue y disparaît.

Cette méthode s'appelle la **combinaison**. Quand les coefficients ne sont pas opposés, on multiplie d'abord une équation par un nombre bien choisi.

La propriété

Propriété : Résolution par combinaison

On obtient un système qui a **les mêmes solutions** qu'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues lorsque :

- on multiplie les deux membres d'une des équations par un même nombre **non nul** ;
- on remplace une des équations par la **somme membre à membre** de cette équation et de l'autre.

En choisissant bien les nombres multiplicateurs, on fait **disparaître une inconnue** dans la somme : c'est la méthode par combinaison.

Remarque

Ce résultat est admis. On s'en convainc sur l'exemple du marché : le couple $(9;5)$ vérifie les deux équations de départ. Il vérifie aussi l'égalité $2x = 18$ obtenue par la somme.

Exemple : multiplier avant d'additionner

Résolvons le système :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

- On multiplie les deux membres de la seconde équation par 3 : $3x - 3y = 3$.
- On additionne avec la première, membre à membre : $5x = 15$, donc $x = 3$.
- Dans la seconde équation : $3 - y = 1$, donc $y = 2$.

Vérification : $2 \times 3 + 3 \times 2 = 12$ et $3 - 2 = 1$. Le système a pour solution le couple $(3;2)$.

La méthode pas à pas

Méthode : résoudre par combinaison

1. **Choisis** l'inconnue à faire disparaître.
2. **Multiplie** une équation, ou les deux, par des nombres non nuls, pour rendre ses coefficients opposés.
3. **Additionne** les deux équations membre à membre.
4. **Résous** l'équation à une inconnue obtenue.
5. **Calcule** l'autre inconnue dans une des équations.
6. **Vérifie** le couple dans les deux équations, puis **conclus** par une phrase.

Exemple : Exemple guidé : deux multiplications

Résolvons le système suivant, en faisant disparaître x :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 2x - 5y = 11 \end{cases}$$

- On multiplie la première équation par 2 : $6x + 4y = 14$.
- On multiplie la seconde par -3 : $-6x + 15y = -33$.
- On additionne membre à membre : $19y = -19$, donc $y = -1$.
- Dans la première équation : $3x - 2 = 7$, donc $3x = 9$ et $x = 3$.

Vérification : $3 \times 3 + 2 \times (-1) = 7$ et $2 \times 3 - 5 \times (-1) = 11$. Le système a pour solution le couple $(3; -1)$.

Vérifie : Le bon multiplicateur

On veut faire disparaître y dans le système :

$$\begin{cases} 5x + 2y = 1 \\ 3x + 4y = 9 \end{cases}$$

Par quel nombre multiplier la première équation, avant d'additionner ?

A. Par 2.

Faux.

On obtient $4y$ et $4y$: leur somme vaut $8y$.

B. Par -2.

Juste.

Juste : $-4y$ et $4y$ sont opposés.

C. Par 4.

Faux.

On obtient $8y$ et $4y$: leur somme vaut $12y$.

D. Par -4.

Faux.

On obtient $-8y$ et $4y$: leur somme vaut $-4y$.

Correction

On multiplie la première équation par -2 : $-10x - 4y = -2$. On additionne avec la seconde : $-7x = 7$, donc $x = -1$.

Dans la seconde : $-3 + 4y = 9$, donc $4y = 12$ et $y = 3$.

Vérification : $5 \times (-1) + 2 \times 3 = 1$ et $3 \times (-1) + 4 \times 3 = 9$. Le système a pour solution le couple $(-1; 3)$.

Deux pièges

Attention : multiplier les deux membres

✗ « On multiplie $x - y = 1$ par 3 : $3x - 3y = 1$. »

✓ On multiplie **les deux membres** : $3x - 3y = 3$. Dans l'exemple de la propriété, l'erreur donnerait $5x = 13$ au lieu de $5x = 15$. Le couple trouvé serait faux.

Trouve l'erreur : Une addition trop rapide

Omar résout le système :

$$\begin{cases} 4x + y = 6 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$$

Il additionne les deux équations et écrit $6x = 8$. Qu'en penses-tu ?

A. C'est juste, car $6x = 8$ donne $x = \dfrac{4}{3}$.

Faux.

L'addition donne $6x + 2y = 8$: le terme $2y$ a été oublié, et $x = \dfrac{4}{3}$ est faux.

B. Il faut diviser les deux équations par 2 avant d'additionner.

Faux.

Diviser ne change pas les coefficients de y l'un par rapport à l'autre : ils restent égaux, et non opposés.

C. Les termes en y ne sont pas opposés : y ne disparaît pas.

Juste.

Juste : $y + y = 2y$, l'inconnue ne disparaît pas.

D. Il faut additionner les premiers membres seulement.

Faux.

On additionne aussi les seconds membres : sinon l'égalité est fausse.

Correction

Les termes y et y ne sont pas opposés : l'addition donne $6x + 2y = 8$.

On multiplie plutôt la seconde équation par -1 : $-2x - y = -2$. On additionne : $2x = 4$, donc $x = 2$.

Dans la première : $8 + y = 6$, donc $y = -2$. Vérification : $4 \times 2 + (-2) = 6$ et $2 \times 2 + (-2) = 2$.

Le système a pour solution le couple $(2 ; -2)$.

Substitution ou combinaison

En clair. Quand une inconnue a pour coefficient 1 ou -1, la substitution est rapide. Quand deux coefficients sont déjà opposés, la combinaison est immédiate.

Dans les autres cas, la combinaison permet d'éviter des fractions dans les calculs. Les deux méthodes donnent la même solution.

Exemple : un système, deux méthodes

Résolvons le système :

$$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$$

- Par combinaison : on additionne membre à membre, $4x = 8$, donc $x = 2$. Puis $2 + 2y = 8$, donc $y = 3$.
- Par substitution : $x = 8 - 2y$. Puis $3(8 - 2y) - 2y = 0$, soit $24 - 8y = 0$, donc $y = 3$. Puis $x = 8 - 6 = 2$.

Vérification : $2 + 2 \times 3 = 8$ et $3 \times 2 - 2 \times 3 = 0$. Le système a pour solution le couple $(2; 3)$.

Ici, la combinaison est plus courte.

Vérifie : Des coefficients opposés

Dans quel système l'addition membre à membre fait-elle disparaître une inconnue tout de suite ?

A. $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 5x - 3y = 1 \end{cases}$
Juste.
Juste : $3y$ et $-3y$ sont opposés.

B. $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$
Faux.
On obtient $4x$ et $4y$: rien ne disparaît.

C. $\begin{cases} x - 4y = 2 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$
Faux.
On obtient $-5y$: les coefficients de y ont le même signe.

D. $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 3y = 3 \end{cases}$
Faux.
Aucun coefficient n'est l'opposé de celui de la même inconnue.

Correction
Dans le premier système, $3y$ et $-3y$ sont opposés. L'addition donne $7x = 5$: l'inconnue y a disparu.
Dans les trois autres, il faut d'abord multiplier une équation par un nombre bien choisi.

Coin examen, puis à toi

Remarque : Coin examen : rédiger une combinaison

À l'examen régional, chaque calcul est écrit avec sa règle. Par exemple, pour le système :

$$\begin{cases} 2x + y = 9 \\ 3x - y = 11 \end{cases}$$

« On additionne les deux équations membre à membre : $5x = 20$, donc $x = 4$. On remplace x par 4 dans la première équation : $8 + y = 9$, donc $y = 1$.

Vérification : $2 \times 4 + 1 = 9$ et $3 \times 4 - 1 = 11$. Le système a pour solution le couple $(4; 1)$. »

À toi : Résoudre par combinaison

Résous par combinaison le système :

$$\begin{cases} 4x - 3y = 18 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$$

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Fais disparaître y : ses coefficients -3 et 2 ont des signes contraires.
Indice 2
Multiplie la première équation par 2 et la seconde par 3.
Indice 3
Point délicat : multiplie aussi les seconds membres, $18 \times 2 = 36$ et $5 \times 3 = 15$.

Réponse
On multiplie la première équation par 2 : $8x - 6y = 36$. On multiplie la seconde par 3 : $9x + 6y = 15$.

On additionne membre à membre : $17x = 51$. On divise par 17 : $x = 3$.

Dans la seconde équation : $9 + 2y = 5$, donc $2y = -4$ et $y = -2$.

Vérification : $4 \times 3 - 3 \times (-2) = 12 + 6 = 18$ et $3 \times 3 + 2 \times (-2) = 9 - 4 = 5$. Le système a pour solution le couple $(3; -2)$.

Le mot du prof. Avec la combinaison, tu choisis l'inconnue qui disparaît. Avec la substitution, tu remplaces une inconnue. Garde les deux outils : tu prendras le plus court.

Deux droites, un point commun

Une équation, une droite

Rappel (géométrie analytique) : dans un repère, la droite (D) d'équation $y = mx + p$ est formée des points dont les coordonnées vérifient cette égalité. Le nombre m est le **coefficient directeur** de (D), et p son **ordonnée à l'origine**. Deux droites de même coefficient directeur sont parallèles.

Devine : Un point sur une droite

Lequel de ces points appartient à la droite (Δ) d'équation $y = -x + 4$?

A. $B(3;2)$
Faux.
Pour $x = 3$: $-3 + 4 = 1$, et non 2.

B. $A(1;3)$
Juste.
Juste : $-1 + 4 = 3$.

C. $C(4;4)$
Faux.
Pour $x = 4$: $-4 + 4 = 0$, et non 4.

D. $E(2;6)$
Faux.
Pour $x = 2$: $-2 + 4 = 2$, et non 6.

Correction
Pour $A(1;3)$: $-1 + 4 = 3$, l'égalité est vraie. Le point A est sur (Δ). Le couple $(1;3)$ est aussi solution de l'équation $x + y = 4$, car $1 + 3 = 4$.

En clair. L'équation $x + y = 4$ s'écrit aussi $y = -x + 4$: on soustrait x aux deux membres. Un couple solution de $x + y = 4$ est donc un point de la droite (Δ).

Deux équations donnent ainsi deux droites. Deux droites qui se coupent en un seul point sont dites **sécantes**. Deux droites différentes sont dites **distinctes**.

La propriété

Propriété : Interprétation graphique d'un système

Le plan est muni d'un repère. Soit a, b et c trois nombres, avec $b \neq 0$. Les couples solutions de l'équation $ax + by = c$ sont les coordonnées des points de la droite d'équation

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}.$$

Les couples solutions d'un système de deux telles équations sont donc les coordonnées des **points communs** aux deux droites associées. Si les deux droites sont **sécantes** en un point I, le système a **une seule solution** : le couple des coordonnées de I.

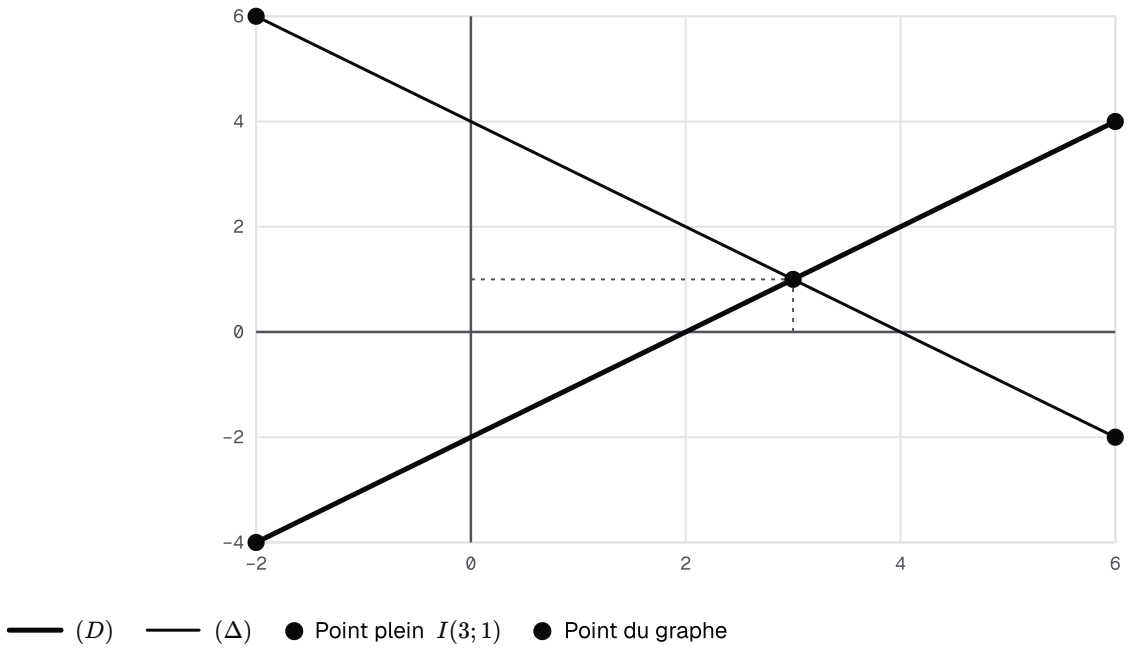
Remarque

Ce résultat est admis. La figure suivante permet de s'en convaincre.

Le point commun aux deux droites a pour coordonnées $(3;1)$. Or ce couple vérifie les deux équations du système :

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

En effet, $3 - 1 = 2$ et $3 + 1 = 4$.



Les droites (D) et (Δ) associées au système se coupent au point I.

La méthode pas à pas

Méthode : résoudre graphiquement

1. **Écris** chaque équation sous la forme $y = mx + p$.
2. **Calcule** deux points de chaque droite, dans un tableau de valeurs.
3. **Trace** les deux droites dans le même repère.
4. **Lis** les coordonnées du point commun aux deux droites, appelé **point d'intersection**. C'est une lecture approchée.
5. **Vérifie** le couple lu dans les deux équations, puis **conclus**.

Exemple : Exemple guidé : le point de la figure

On résout graphiquement le système :

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

- Première équation : on soustrait x aux deux membres, $-y = 2 - x$. On multiplie par -1 : $y = x - 2$.
- Tableau de valeurs de $y = x - 2$: pour $x = 0$, $y = 0 - 2 = -2$; pour $x = 4$, $y = 4 - 2 = 2$. Points : $(0; -2)$ et $(4; 2)$.
- Seconde équation : on soustrait x aux deux membres, $y = -x + 4$.
- Tableau de valeurs de $y = -x + 4$: pour $x = 0$, $y = 0 + 4 = 4$; pour $x = 4$, $y = -4 + 4 = 0$. Points : $(0; 4)$ et $(4; 0)$.
- Sur la figure, les droites se coupent à peu près en $I(3; 1)$.

Vérification : $3 - 1 = 2$ et $3 + 1 = 4$. Le système a pour solution le couple $(3; 1)$.

Une lecture approchée

Attention : une lecture n'est pas une preuve

✗ « Sur mon dessin, les droites $y = 2x$ et $y = -x + 4$ se coupent en $(1; 3)$. La solution est $(1; 3)$. »

✓ On vérifie : pour $x = 1$, $2x = 2$ et non 3. La lecture est fausse.

Par le calcul, on remplace y par $2x$ dans la seconde équation : $2x = -x + 4$. On ajoute x aux deux membres : $3x = 4$.

Donc $x = \frac{4}{3}$ et $y = \frac{8}{3}$. Un dessin ne donne qu'une valeur approchée.

Vérifie : Contrôler une lecture

Sur un graphique, Sara trace les deux droites du système suivant :

$$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

Elle lit que ces droites se coupent à peu près en $(2; 5)$. Que conclure ?

A. La lecture suffit : aucun calcul n'est utile.

Faux.
Une lecture est approchée : il faut vérifier par le calcul.

B. D'après le calcul, la solution est plutôt le couple $(5; 2)$.

Faux.
$3 \times 5 - 2 = 13$, et non 1.

C. Le calcul dans les deux équations confirme la lecture de Sara.

Juste.
Juste : $(2;5)$ vérifie les deux équations.

D. La lecture est fausse pour la première équation.
Faux.
$3 \times 2 - 5 = 1$: la première égalité est vraie.

Correction
On vérifie : $3 \times 2 - 5 = 6 - 5 = 1$ et $2 + 5 = 7$. Les deux égalités sont vraies. Le système a pour solution le couple $(2;5)$.

Deux droites parallèles

Devine : Le même coefficient directeur

Les droites $y = 2x + 1$ et $y = 2x - 3$ ont le même coefficient directeur 2. Combien de points communs ont-elles ?

A. Un seul point.
Faux.
Deux droites sécantes ont des coefficients directeurs différents.

B. Deux points.
Faux.
Deux droites distinctes ont au plus un point commun.

C. Une infinité de points.
Faux.
Il faudrait aussi la même ordonnée à l'origine : or $1 \neq -3$.

D. Aucun point.
Juste.
Juste : elles sont parallèles et distinctes.

Correction
Un point commun vérifierait $2x + 1 = 2x - 3$. En soustrayant $2x$ aux deux membres, on obtient $1 = -3$, ce qui est faux. Les droites n'ont aucun point commun : parallèles et distinctes, elles sont dites **strictement parallèles**.

Propriété : Droites parallèles et nombre de solutions

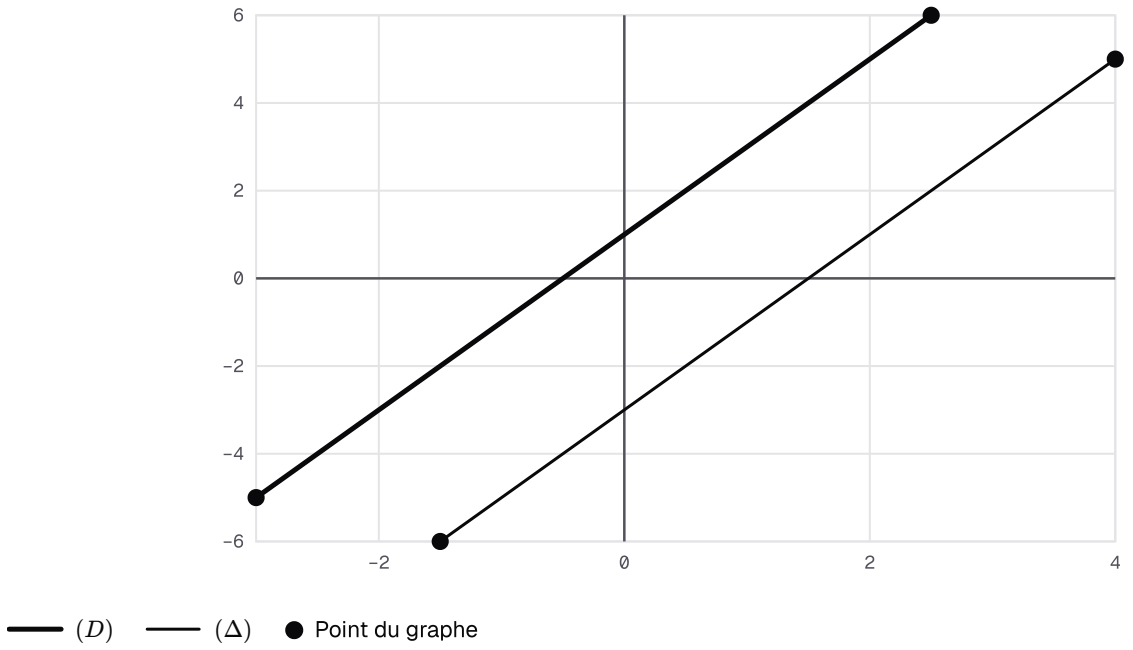
On considère un système dont les deux équations s'écrivent $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$.

- Si $m \neq m'$, les deux droites sont sécantes : le système a **une seule solution**.
- Si $m = m'$ et $p \neq p'$, les deux droites sont strictement parallèles : le système n'a **aucune solution**.

- Si $m = m'$ et $p = p'$, les deux droites sont confondues : le système a **une infinité de solutions**.

Remarque

Ce résultat est admis. La figure suivante illustre le cas de deux droites strictement parallèles. Elle ne montre qu'une partie du plan : c'est le calcul de l'activité qui établit l'absence de point commun.



Deux droites strictement parallèles : le système associé n'a aucune solution.

Compter, rédiger, à toi

Exemple : compter les solutions sans tracer

Aucune solution. On étudie le système :

$$\begin{cases} y - 2x = 1 \\ 4x - 2y = 6 \end{cases}$$

Dans ce système, on ajoute $2x$ aux deux membres de la première équation, $y = 2x + 1$. Dans la seconde, on soustrait $4x$, puis on divise par -2 : $y = 2x - 3$.

Même coefficient directeur, ordonnées à l'origine différentes : aucune solution.

Une infinité de solutions. On étudie le système :

$$\begin{cases} 6x - 3y = 9 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$$

Dans la première équation, on soustrait $6x$, puis on divise par -3 : $y = 2x - 3$.

Les deux droites sont **confondues** : c'est la même droite. Le système a une infinité de solutions.

Remarque : Coin examen : conclure une résolution graphique

À l'examen régional, une lecture graphique est suivie d'une vérification. Par exemple :

« Les droites semblent se couper au point $I(3;1)$. Vérification : $3 - 1 = 2$ et $3 + 1 = 4$. Le système a pour solution le couple $(3;1)$. »

Sans vérification, le couple lu n'est qu'une estimation.

À toi : Résoudre graphiquement

Résous graphiquement le système :

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

Trace les deux droites sur ton cahier, lis leur point commun, puis vérifie.

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Écris chaque équation sous la forme $y = mx + p$.
Indice 2
Dans $2x - y = 3$, soustrais $2x$ aux deux membres, puis multiplie par -1. Dans $x + y = 3$, soustrais x aux deux membres.
Indice 3
Point délicat : tu dois obtenir $y = 2x - 3$ et $y = -x + 3$. Calcule ensuite deux points de chaque droite.

Réponse
Première droite : $y = 2x - 3$, qui passe par $(0;-3)$ et $(3;3)$.

Seconde droite : $y = -x + 3$, qui passe par $(0;3)$ et $(3;0)$.

Les droites semblent se couper en $(2;1)$. Vérification : $2 \times 2 - 1 = 3$ et $2 + 1 = 3$.

Le système a pour solution le couple $(2;1)$.

Des problèmes aux systèmes

Choisir les inconnues

Devine : Traduire un prix

Au stade, un billet en tribune coûte 50 DH et un billet en pelouse 20 DH. Un club achète 30 billets et paie 960 DH.

On note x le nombre de billets en tribune et y celui des billets en pelouse. Quelle équation traduit le prix payé ?

A. $x + y = 960$

Faux.
Cette équation additionne des billets et les compare à un prix.

B. $50x + 20y = 960$

Juste.
Juste : $50x$ DH pour la tribune, $20y$ DH pour la pelouse.

C. $20x + 50y = 960$

Faux.
Les prix sont échangés : x compte les billets à 50 DH.

D. $50x + 20y = 30$

Faux.
30 est le nombre de billets, et non le prix.

Correction
Les billets en tribune coûtent $50x$ DH, ceux en pelouse $20y$ DH. Le prix payé se traduit par $50x + 20y = 960$.

Le nombre de billets donne une seconde équation : $x + y = 30$.

En clair. Mettre en équation un problème, c'est le traduire par des équations. On nomme d'abord chaque inconnue par une phrase, avec son unité.

Chaque information de l'énoncé donne ensuite une équation. Deux inconnues demandent deux informations.

La méthode

Méthode : résoudre un problème avec un système

1. **Choisis** les inconnues et écris ce qu'elles désignent, avec leur unité.
2. **Traduis** chaque information de l'énoncé par une équation.
3. **Résous** le système, par substitution ou par combinaison.
4. **Contrôle** que la solution a un sens dans le problème : nombres entiers, positifs, vérification avec les données.
5. **Réponds** à la question par une phrase.

Exemple : Exemple guidé : les billets du stade

Soit x le nombre de billets en tribune et y le nombre de billets en pelouse. On obtient le système :

$$\begin{cases} x + y = 30 \\ 50x + 20y = 960 \end{cases}$$

Isoler. On isole y dans la première équation : $y = 30 - x$.

Remplacer. On remplace y par $(30 - x)$ dans la seconde. On développe, puis on réduit :

$$\begin{aligned} 50x + 20(30 - x) &= 960 \\ 50x + 600 - 20x &= 960 \\ 30x + 600 &= 960 \end{aligned}$$

Résoudre. On soustrait 600 aux deux membres : $30x = 360$, donc $x = 12$. On calcule $y = 30 - 12 = 18$.

Contrôle. $12 + 18 = 30$ et $50 \times 12 + 20 \times 18 = 600 + 360 = 960$. Ce sont des entiers positifs.

Réponse. Le système a pour solution le couple $(12; 18)$: le club a acheté 12 billets en tribune et 18 en pelouse.

Un problème de physique

Exemple : des vitesses en physique

En physique, la distance parcourue vaut la vitesse multipliée par la durée. Un cycliste roule 2 h sur le plat et 1 h en montée : il parcourt 50 km. Un autre jour, avec les mêmes vitesses, il roule 1 h sur le plat et 2 h en montée : 40 km.

On note x sa vitesse sur le plat et y sa vitesse en montée, en km/h :

$$\begin{cases} 2x + y = 50 \\ x + 2y = 40 \end{cases}$$

On isole x dans la seconde, en soustrayant $2y$ aux deux membres : $x = 40 - 2y$. On remplace dans la première, puis on réduit :

$$\begin{aligned} 2(40 - 2y) + y &= 50 \\ 80 - 4y + y &= 50 \\ 80 - 3y &= 50 \end{aligned}$$

On soustrait 80 aux deux membres : $-3y = -30$. On divise par -3 : $y = 10$. Puis $x = 40 - 2 \times 10 = 20$.

Contrôle : $40 + 10 = 50$ et $20 + 20 = 40$. Le système a pour solution le couple $(20; 10)$: le cycliste roule à 20 km/h sur le plat et à 10 km/h en montée.

Vérifie : Une solution qui a un sens

Dans un problème, x est un nombre d'enfants et y un nombre d'adultes. Le système a pour seule solution le couple $(7{,}5;\,4)$. Que conclure ?

A. Il y a 8 enfants et 4 adultes, en arrondissant.

Faux.

Avec 8 enfants, les équations ne sont plus vérifiées.

B. Il y a $7{,}5$ enfants et 4 adultes, comme le dit le calcul.

Faux.

Un nombre d'enfants est un entier.

C. Le problème n'a pas de solution : un nombre d'enfants est entier.

Juste.

Juste : le nombre d'enfants doit être un entier.

D. Il faut échanger les deux nombres du couple pour conclure.

Faux.

L'ordre du couple suit le choix des inconnues : x d'abord.

Correction

Le système a une seule solution, $(7{,}5;\,4)$. Or un nombre d'enfants est un entier.

Aucun couple ne convient donc au problème : il n'a pas de solution. Il faut alors relire l'énoncé et les calculs.

Un problème d'âges

Exemple : un problème d'âges

Un père a 28 ans de plus que son fils. Ensemble, ils ont 50 ans. On note x l'âge du père et y celui du fils, en années :

$$\begin{cases} x - y = 28 \\ x + y = 50 \end{cases}$$

- On additionne membre à membre : $2x = 78$. On divise par 2 : $x = 39$.
- Dans la seconde équation : $39 + y = 50$. On soustrait 39 : $y = 11$.

Contrôle : $39 - 11 = 28$ et $39 + 11 = 50$. Le système a pour solution le couple $(39;\,11)$: le père a 39 ans et le fils 11 ans.

Attention : traduire « trois fois plus »

X « Il y a trois fois plus de garçons que de filles » se traduit par $3g = f$.

✓ Les garçons sont les plus nombreux : $g = 3f$. Contrôle avec 4 filles : il y a 12 garçons, et $12 = 3 \times 4$. Avec $3g = f$, on aurait 12 filles pour 4 garçons : c'est l'inverse.

Coin examen

Remarque : Coin examen : rédiger un problème

À l'examen régional, la rédaction suit quatre temps : inconnues, système, résolution, phrase réponse. Par exemple :

« Soit x le prix d'un kilogramme de dattes et y celui d'un litre de lait, en DH. On a $x + 2y = 74$ et $2x + y = 127$.

Par substitution, $x = 74 - 2y$, puis $2(74 - 2y) + y = 127$, soit $148 - 3y = 127$. On soustrait 148 aux deux membres : $-3y = -21$. On divise par -3 : $y = 7$, puis $x = 74 - 2 \times 7 = 60$.

Vérification : $60 + 14 = 74$ et $120 + 7 = 127$. Le kilogramme de dattes coûte 60 DH et le litre de lait 7 DH. »

Vérifie : Traduire deux informations

« La somme de deux nombres vaut 40, et leur différence vaut 6. » On note x le plus grand et y le plus petit. Quel système traduit cette phrase ?

A. $\begin{cases} x + y = 40 \\ x - y = 6 \end{cases}$

Juste.

Juste : une équation par information.

B. $\begin{cases} x + y = 40 \\ xy = 6 \end{cases}$

Faux.

xy est un produit, et non une différence.

C. $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 40 \end{cases}$

Faux.

Les deux seconds membres sont échangés.

D. $\begin{cases} x + 40 = y \\ x - 6 = y \end{cases}$

Faux.

« Vaut 40 » se traduit par $= 40$, et non par $+40$.

Correction

La somme s'écrit $x + y = 40$ et la différence $x - y = 6$.

En additionnant membre à membre : $2x = 46$, donc $x = 23$, puis $y = 40 - 23 = 17$. Contrôle : $23 + 17 = 40$ et $23 - 17 = 6$.

À toi

À toi : Un tournoi de handball

Dans un tournoi de handball, une victoire rapporte 3 points et un match nul 1 point. Une équipe a joué 9 matchs sans défaite et totalise 21 points. Combien de victoires a-t-elle obtenues ?

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Note v le nombre de victoires et n le nombre de matchs nuls.
Indice 2
Tu obtiens $v + n = 9$ et $3v + n = 21$.
Indice 3
Point délicat : pour faire disparaître n, multiplie la première équation par -1 avant d'additionner.

Réponse
Soit v le nombre de victoires et n le nombre de matchs nuls. On obtient le système :

$$\begin{cases} v + n = 9 \\ 3v + n = 21 \end{cases}$$

On multiplie la première équation par -1 : $-v - n = -9$. On additionne avec la seconde : $2v = 12$, donc $v = 6$.

Puis $n = 9 - 6 = 3$. Contrôle : $6 + 3 = 9$ et $3 \times 6 + 3 = 21$.

Le système a pour solution le couple $(6 ; 3)$: l'équipe a obtenu 6 victoires et 3 matchs nuls.

Le mot du prof. Dans un problème, le plus délicat est la traduction. Prends le temps de nommer tes inconnues. Une fois le système écrit, tu sais déjà le résoudre.

Équations, inéquations et systèmes du collège

Une inconnue ou deux

Vérifie : Trier les problèmes

Lequel de ces problèmes demande un système de deux équations ?

A. Trouver le nombre dont le triple augmenté de 5 vaut 20.
Faux.
Une seule inconnue : une équation suffit.

B. Trouver deux prix à partir de deux achats différents.

Juste.

Juste : deux inconnues, deux informations.

C. Trouver les nombres x tels que $2x - 1 > 7$.

Faux.

C'est une inéquation à une inconnue.

D. Trouver les nombres x tels que $(x - 3)(x + 2) = 0$.

Faux.

C'est une équation produit nul, à une inconnue.

Correction

Deux prix inconnus et deux achats donnent deux inconnues et deux équations : c'est un système. Les trois autres problèmes n'ont qu'une inconnue. Les rappels qui suivent reprennent chaque outil.

Rappel (équation du premier degré à une inconnue) : pour résoudre $3x + 5 = 20$, on soustrait 5 aux deux membres : $3x = 15$. On divise les deux membres par 3 : $x = 5$.

Vérification : $3 \times 5 + 5 = 20$. L'équation a pour solution 5.

Rappel (équation produit nul) : un produit est nul lorsque l'un au moins de ses facteurs est nul. Ainsi, $(x - 3)(x + 2) = 0$ donne $x - 3 = 0$ ou $x + 2 = 0$. Les solutions sont 3 et -2.

Vérification : $(3 - 3)(3 + 2) = 0$ et $(-2 - 3)(-2 + 2) = 0$.

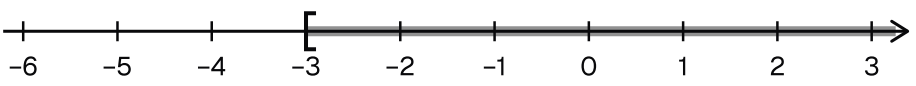
Les inéquations

Rappel (inéquation du premier degré) : on résout comme une équation, avec une règle de plus. Le sens de l'inégalité change quand on multiplie ou divise les deux membres par un nombre négatif.

Pour $-2x + 1 \leq 7$, on soustrait 1 : $-2x \leq 6$. On divise par -2, le sens change : $x \geq -3$.

En clair. Les solutions de $-2x + 1 \leq 7$ sont les nombres x tels que $x \geq -3$. Sur une droite graduée, on les représente par la demi-droite qui part du point d'abscisse -3 vers la droite. Le point d'abscisse -3 fait partie des solutions.

Contrôle avec $x = 0$: $-2 \times 0 + 1 = 1$, et $1 \leq 7$ est vrai.



Les solutions de -2x + 1 ≤ 7 forment la demi-droite qui part de -3 vers la droite, avec un crochet fermé en -3.

Vérifie : Le sens de l'inégalité

Quelles sont les solutions de l'inéquation $-3x > 12$?

A. Les nombres x tels que $x < -4$.

Juste.

Juste : on divise par -3, le sens change.

B. Les nombres x tels que $x > -4$.

Faux.

On divise par un nombre négatif : le sens doit changer.

C. Les nombres x tels que $x > 4$.

Faux.

$12 \div (-3)$ vaut -4, et non 4.

D. Les nombres x tels que $x < 4$.

Faux.

Avec $x = 0$: $0 > 12$ est faux, donc 0 n'est pas solution.

Correction

On divise les deux membres par -3, qui est négatif : le sens change. On obtient $x < -4$. Contrôle avec $x = -5$: $-3 \times (-5) = 15$, et $15 > 12$ est vrai.

Quel outil pour quel problème

À retenir : Quel outil pour quel problème ?

- **Une inconnue, une égalité** : une équation du premier degré. On isole l'inconnue.
- **Un produit égal à zéro** : une équation produit nul. Chaque facteur peut être nul.
- **Une inconnue, une condition « au plus » ou « au moins »** : une inéquation. On surveille le sens avec un nombre négatif.
- **Deux inconnues, deux informations** : un système. Substitution, combinaison ou droites, puis vérification.

Exemple : un taxi, deux questions

Un taxi demande 7 DH au départ, puis 4 DH par kilomètre. On note x la distance parcourue, en km.

- Pour payer 31 DH : $7 + 4x = 31$. On soustrait 7 : $4x = 24$, donc $x = 6$. La course fait 6 km.
- Avec 50 DH au plus : $7 + 4x \leq 50$. On soustrait 7 : $4x \leq 43$. On divise par 4, qui est positif, sans changer le sens : $x \leq 10{,}75$.

Avec 50 DH, la course fait donc au plus $10{,}75$ km.

Vérifie : Choisir l'outil

Pour chaque problème, dis quel outil tu emploies, puis résous.

(a) Un rectangle a un périmètre de 30 cm, et sa longueur dépasse sa largeur de 3 cm : quelles sont ses dimensions ? (b) Le prix $15 + 2x$, en DH, ne doit pas dépasser 40 DH : quelles valeurs de x conviennent ? (c) Quelles sont les solutions de $x(x - 6) = 0$?

Indice 1
Compte les inconnues, puis regarde s'il s'agit d'une égalité, d'une inégalité ou d'un produit nul.
Indice 2
(a) Note L la longueur et ℓ la largeur. (b) « Ne doit pas dépasser » se traduit par $\leq$. (c) Un produit est nul lorsque l'un au moins de ses facteurs est nul.

Réponse
(a) Deux inconnues, la longueur L et la largeur ℓ : c'est un système.

$$\begin{cases} 2L + 2\ell = 30 \\ L - \ell = 3 \end{cases}$$

On divise la première équation par 2 : $L + \ell = 15$. On additionne avec la seconde : $2L = 18$, donc $L = 9$, puis $\ell = 6$.

Contrôle : $18 + 12 = 30$ et $9 - 6 = 3$.

(b) Une inconnue et « ne pas dépasser » : une inéquation, $15 + 2x \leq 40$. On soustrait 15 aux deux membres : $2x \leq 25$. On divise par 2, qui est positif : $x \leq 12{,}5$.

(c) Un produit nul : $x = 0$ ou $x - 6 = 0$. Les solutions sont 0 et 6.

Le mot du prof. Équations, inéquations et systèmes : tu as maintenant les outils du premier degré du collège. Avant de calculer, compte les inconnues et lis la condition demandée. Le bon outil vient ensuite.

Ce que tu sais faire

À retenir : Ce que tu sais faire

- Vérifier qu'un couple est solution d'une équation à deux inconnues, puis d'un système : on teste les deux équations.
- Résoudre un système par substitution : isoler, remplacer entre parenthèses, résoudre.
- Résoudre un système par combinaison : rendre des coefficients opposés, puis additionner.
- Résoudre graphiquement : deux droites, un point commun lu, puis vérifié par le calcul.
- Reconnaître deux droites strictement parallèles : aucune solution. Deux droites confondues : une infinité.
- Mettre un problème en équations, puis répondre par une phrase.

Et maintenant ? Les exercices du chapitre t'attendent. Commence par le palier application : un geste à la fois. Passe ensuite à l'entraînement, puis aux exercices de niveau examen régional.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Systèmes de deux équations du premier degré à deux inconnues » (3ac · general · mathematiques)