BURHAN

Résumé : Statistique

3ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/3ac/mathematiques/statistique/resume

Chapitre	Semestre
Statistique	Semestre 2

Effectifs, fréquences et effectifs cumulés

Rappel de 1re et de 2e année : une **série statistique** rassemble les valeurs d'un **caractère** relevées sur une **population**. Tous les exemples de ce Résumé utilisent des séries fictives.

Définition : Effectif et fréquence

On étudie un **caractère** sur une **population** : chaque individu de la population prend une **valeur** du caractère. L'ensemble des valeurs relevées forme une **série statistique**.

- L'**effectif** d'une valeur est le nombre d'individus qui prennent cette valeur.
- L'**effectif total** N est le nombre d'individus de la population : c'est la somme des effectifs de toutes les valeurs.
- La **fréquence** d'une valeur d'effectif n est le quotient $f = \dfrac{n}{N}$.

Une fréquence est un nombre compris entre 0 et 1. On l'écrit sous forme de fraction, de nombre décimal ou de pourcentage : la fréquence $\dfrac{1}{4} = 0{,}25$ s'écrit aussi 25 pour cent. La somme des fréquences de toutes les valeurs est égale à 1.

Définition : Effectifs cumulés et fréquences cumulées

Les valeurs du caractère sont des nombres, rangés dans l'ordre croissant.

- L'**effectif cumulé croissant** d'une valeur est la somme de son effectif et des effectifs de toutes les valeurs plus petites qu'elle.
- La **fréquence cumulée croissante** d'une valeur est la somme de sa fréquence et des fréquences de toutes les valeurs plus petites qu'elle.

L'effectif cumulé croissant d'une valeur est le nombre d'individus dont la valeur est inférieure ou égale à elle. Celui de la plus grande valeur est égal à l'effectif total N.

Méthode : Remplir un tableau statistique pas à pas

1. **Additionne** tous les effectifs : tu obtiens N.
2. **Divise** chaque effectif par N pour avoir sa fréquence. Multiplie-la par 100 pour l'écrire en pour cent.
3. **Vérifie** que les fréquences ont pour somme 1, soit 100 pour cent.

4. **Cumule** de gauche à droite : ajoute l'effectif de la colonne au cumul précédent. La dernière case affiche N.

Exemple : les poissons d'un club de pêche imaginaire

Un club de pêche imaginaire a fait 20 sorties. On a noté le nombre de poissons pris à chaque sortie (série fictive).

Poissons	0	1	2	3	4
Effectif	2	7	6	4	1
Fréquence	$0{,}1$	$0{,}35$	$0{,}3$	$0{,}2$	$0{,}05$
En pour cent	10	35	30	20	5
Effectif cumulé croissant	2	9	15	19	20

Par exemple, $\dfrac{7}{20} = 0{,}35$, soit 35 pour cent.

Le club a pris au plus 2 poissons lors de 15 sorties.

Attention : Diviser par l'effectif total, pas par le nombre de valeurs

Série fictive : une série compte 5 valeurs différentes et $N = 45$ individus. Une valeur a l'effectif 9. Sa fréquence est $\dfrac{9}{45} = 0{,}2$.

Diviser par 5 donnerait $\dfrac{9}{5} = 1{,}8$: c'est impossible, car une fréquence ne dépasse jamais 1.

La moyenne arithmétique

La moyenne répond à une question : si toutes les valeurs étaient égales, combien vaudraient-elles ? Chaque valeur y compte autant de fois que son effectif. Rappel de 2e année : sans effectifs, on additionne les valeurs, puis on divise par leur nombre.

Définition : Moyenne arithmétique

Une série statistique a pour valeurs x_1, x_2, …, x_p, d'effectifs respectifs n_1, n_2, …, n_p. Son effectif total est $N = n_1 + n_2 + \cdots + n_p$.

La **moyenne arithmétique** de la série est le nombre

$$m = \frac{n_1 \times x_1 + n_2 \times x_2 + \cdots + n_p \times x_p}{N}.$$

Quand chaque valeur n'est relevée qu'une fois, la moyenne est la somme des valeurs divisée par leur nombre.

Propriété : Moyenne et fréquences

Avec les notations de la moyenne arithmétique, notons f_1, f_2, ..., f_p les fréquences des valeurs x_1, x_2, ..., x_p. Alors

$$m = f_1 \times x_1 + f_2 \times x_2 + \cdots + f_p \times x_p.$$

Méthode : Calculer une moyenne à la main

1. **Écris** sous le tableau la ligne des produits $n_1 \times x_1$, $n_2 \times x_2$, et ainsi de suite.
2. **Additionne** ces produits.
3. **Divise** ce total par N, l'effectif total, et non par le nombre de valeurs différentes.
4. **Contrôle** : le résultat se place entre la plus petite et la plus grande valeur.

Avec les fréquences, additionne directement les produits $f_1 \times x_1$, $f_2 \times x_2$, … sans division finale.

Exemple : la moyenne des poissons

Reprends le club de pêche imaginaire. Les produits « effectif $\times$ valeur » valent 0, 7, 12, 12 et 4. Leur somme vaut 35, et $N = 20$:

$$m = \frac{35}{20} = 1{,}75.$$

Le club a pris en moyenne $1{,}75$ poisson par sortie. Contrôle : $1{,}75$ se trouve bien entre 0 et 4.

Exemple : la même moyenne avec les fréquences

$$m = 0{,}1 \times 0 + 0{,}35 \times 1 + 0{,}3 \times 2 + 0{,}2 \times 3 + 0{,}05 \times 4.$$

Les termes valent 0, $0{,}35$, $0{,}6$, $0{,}6$ et $0{,}2$. Leur somme redonne $m = 1{,}75$, sans aucune division.

Attention : Chaque valeur pèse selon son effectif

Série fictive : quatre sacs de farine pèsent 5 kg chacun, deux autres pèsent 11 kg chacun.

Le calcul $\frac{5 + 11}{2} = 8$ est faux : il oublie les effectifs. La bonne moyenne compte chaque masse autant de fois qu'elle apparaît :

$$m = \frac{4 \times 5 + 2 \times 11}{6}$$
$$= \frac{42}{6} = 7$$

Un sac pèse donc 7 kg en moyenne.

Le mode et la valeur médiane

Le mode répond à la question : quelle valeur revient le plus ? La médiane répond à une autre : quelle valeur coupe la série en deux moitiés ? Ces deux paramètres complètent la moyenne.

Définition : Mode

Le **mode** d'une série statistique est une valeur du caractère qui a le plus grand effectif. Une série peut avoir plusieurs modes : c'est le cas quand plusieurs valeurs ont ce plus grand effectif.

Attention : Le mode se lit dans la ligne des valeurs

Série fictive : dans un tableau, la valeur 17 a l'effectif 9, le plus grand de tous. Le mode est 17 : c'est une valeur du caractère. Répondre 9 confond la valeur et son effectif.

Définition : Valeur médiane

On range les N valeurs d'une série statistique numérique dans l'ordre croissant, chaque valeur étant écrite autant de fois que son effectif. La **valeur médiane** (on dit aussi la **médiane**) partage cette liste en deux groupes de même effectif :

- si N est impair, la médiane est la valeur de rang $\frac{N+1}{2}$;
- si N est pair, la médiane est la moyenne des deux valeurs de rangs $\frac{N}{2}$ et $\frac{N}{2}+1$.

Ainsi, au moins la moitié des valeurs de la série sont inférieures ou égales à la médiane, et au moins la moitié sont supérieures ou égales à elle.

Méthode : Trouver la médiane avec les effectifs cumulés

1. **Calcule** N, puis la ligne des effectifs cumulés croissants.
2. **Cherche** le rang du milieu : $\frac{N+1}{2}$ quand N est impair ; les rangs $\frac{N}{2}$ et $\frac{N}{2}+1$ quand N est pair.
3. **Lis** la valeur de chaque rang : c'est la première colonne dont le cumul atteint ou dépasse ce rang.
4. **Conclus** : une seule valeur lue si N est impair ; la moyenne des deux valeurs lues si N est pair.

Exemple : un effectif total impair

Sept parties d'un jeu de société ont duré, en minutes : 25, 40, 35, 50, 30, 40, 45 (série fictive). Rangées : 25, 30, 35, 40, 40, 45, 50.

Ici $N = 7$ et $\frac{7+1}{2} = 4$. La valeur de rang 4 donne la médiane : 40 minutes.

Le mode vaut aussi 40 minutes.

Exemple : un effectif total pair

Huit plants de tomate d'un jardin imaginaire mesurent, en centimètres : 14, 17, 11, 19, 16, 13, 20, 12. Rangés : 11, 12, 13, 14, 16, 17, 19, 20.

Ici $N = 8$: on lit les rangs 4 et 5, soit 14 et 16. La médiane vaut $\frac{14+16}{2} = 15$ cm.

Exemple : la médiane des poissons

Pour le club de pêche imaginaire, $N = 20$ est pair : on cherche les rangs 10 et 11. Les effectifs cumulés valent 2, 9, 15, 19, 20.

Le cumul 9 n'atteint pas le rang 10 ; le cumul 15 dépasse le rang 11. Les deux rangs donnent la valeur 2 : la médiane vaut 2 poissons.

Le mode vaut 1 poisson, la valeur d'effectif 7.

Attention : La médiane se cherche dans la liste complète

Série fictive : une série a pour valeurs 2, 4, 6, 8, 10, d'effectifs 1, 1, 1, 2, 7. La colonne du milieu du tableau porte 6.

Pourtant $N = 12$ et les effectifs cumulés valent 1, 2, 3, 5, 12. Les rangs 6 et 7 correspondent tous deux à 10 : la médiane vaut 10, et non 6.

Diagramme en bâtons et diagramme circulaire

Rappel de 1re année : un diagramme montre une série d'un seul coup d'œil. Le diagramme en bâtons convient à un caractère numérique. Le diagramme circulaire montre la part de chaque valeur dans le total.

Définition : Diagramme en bâtons et diagramme circulaire

- Dans un **diagramme en bâtons**, on place les valeurs du caractère sur un axe horizontal. Au-dessus de chaque valeur, on trace un bâton vertical dont la hauteur est proportionnelle à l'effectif de cette valeur (ou à sa fréquence).

- Dans un **diagramme circulaire**, on partage un disque en secteurs, un secteur par valeur. La mesure de l'angle de chaque secteur est proportionnelle à l'effectif de la valeur : un secteur de fréquence f a un angle de mesure $f \times 360°$.

Méthode : Construire puis lire un diagramme

1. **Bâtons** : fixe une unité, par exemple 1 cm pour un individu. Trace chaque bâton à la hauteur de son effectif.
2. **Secteurs** : calcule chaque angle par $\frac{n}{N} \times 360°$. Vérifie que le total fait $360°$, puis trace au rapporteur.
3. **Lecture** : un bâton rend son effectif par sa hauteur. Un secteur d'angle a, en degrés, rend l'effectif $a \times \frac{N}{360}$.

Exemple : les bâtons des poissons

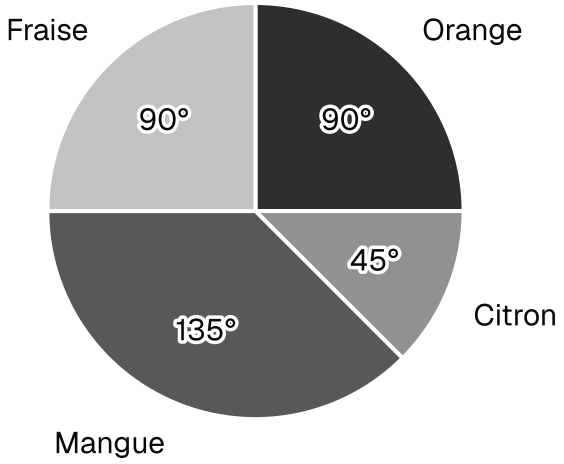
Avec 1 cm pour une sortie, les bâtons du club de pêche imaginaire mesurent 2 cm, 7 cm, 6 cm, 4 cm et 1 cm. Ils se dressent au-dessus des valeurs 0, 1, 2, 3 et 4. Le bâton le plus haut désigne le mode, 1 poisson.

Exemple : les secteurs d'un magasin de jus

Un magasin imaginaire a vendu 120 jus : 30 à l'orange, 15 au citron, 45 à la mangue et 30 à la fraise. Un jus correspond à $\frac{360°}{120} = 3°$.

Parfum	Orange	Citron	Mangue	Fraise
Effectif	30	15	45	30
Angle	$90°$	$45°$	$135°$	$90°$

Contrôle : $90 + 45 + 135 + 90 = 360$.



Les secteurs des 120 jus vendus, chacun avec son angle calculé.

Exemple : lire un secteur

Un diagramme circulaire représente 50 individus. L'un de ses secteurs mesure $72°$.

L'effectif correspondant vaut $72 \times \dfrac{50}{360} = 10$. Sa fréquence est $\dfrac{10}{50} = 0{,}2$, soit 20 pour cent.

Comparer deux séries

Comparer deux séries, c'est calculer les mêmes paramètres pour chacune. Quand les effectifs totaux diffèrent, les effectifs seuls trompent : passe aux fréquences.

Méthode : Comparer deux séries en quatre gestes

1. **Calcule** la moyenne, la médiane et le mode de chaque série.
2. **Compare** des fréquences, jamais des effectifs bruts, si les deux séries n'ont pas le même N.
3. **Place** les paramètres face à face, un par un.
4. **Écris** une phrase de conclusion qui répond à la question et nomme les paramètres utilisés.

Exemple : deux boulangeries imaginaires

La boulangerie A a vendu, sur 5 jours, 62, 70, 58, 75 et 70 pains. La boulangerie B a vendu, sur 6 jours, 66, 64, 72, 66, 68 et 66 pains (séries fictives).

- A : $m = \dfrac{335}{5} = 67$; rangées, 58, 62, 70, 70, 75 donnent la médiane 70.
- B : $m = \dfrac{402}{6} = 67$; rangées, 64, 66, 66, 66, 68, 72 donnent la médiane $\dfrac{66+66}{2} = 66$.

Les moyennes sont égales, mais la médiane de A est plus grande. A vend au moins 70 pains trois jours sur cinq ; B ne le fait qu'un jour sur six.

Attention : Une valeur isolée tire la moyenne

Série fictive : $10, 11, 12, 12, 45$. Sa moyenne vaut $\frac{90}{5} = 18$, alors que quatre valeurs sur cinq restent sous 13.

Sa médiane vaut 12 et décrit mieux la série. Regarde toujours la moyenne et la médiane avant de conclure.

Méthode : Quel paramètre pour quelle question ?

- Tu cherches la valeur la plus répandue : prends le **mode**.
- Tu veux une valeur qui coupe la liste rangée en deux moitiés de même effectif : prends la **médiane**. Au moins la moitié des valeurs lui sont inférieures ou égales, au moins la moitié lui sont supérieures ou égales.
- Tu veux partager le total également entre tous les individus : prends la **moyenne** m.
- Tu veux la part d'une valeur dans la population : calcule sa **fréquence**, en fraction, en décimal ou en pour cent.
- Tu veux savoir combien d'individus ne dépassent pas une valeur : lis son **effectif cumulé croissant**.
- Tu dois tracer un secteur : multiplie la fréquence par $360°$.
- La série contient une **valeur isolée**, très éloignée des autres : fie-toi plutôt à la **médiane**.

Formules et rédaction

Effectif total

$$N = n_1 + n_2 + \cdots + n_p$$

Fréquence d'une valeur d'effectif n

$$f = \frac{n}{N}$$

Fréquence en pour cent

$$f \times 100$$

Moyenne avec les effectifs

$$m = \frac{n_1 \times x_1 + n_2 \times x_2 + \cdots + n_p \times x_p}{N}$$

Moyenne avec les fréquences

$$m = f_1 \times x_1 + f_2 \times x_2 + \cdots + f_p \times x_p$$

Rang de la médiane, N impair

$$\frac{N+1}{2}$$

Rangs de la médiane, N pair

$$\frac{N}{2} \text{ et } \frac{N}{2} + 1$$

Angle d'un secteur

$$f \times 360° = \frac{n}{N} \times 360°$$

Effectif lu sur un secteur d'angle a

$$n = a \times \frac{N}{360}$$

À retenir : Rédiger à l'examen

Niveau examen régional : une copie claire montre la démarche, pas seulement le nombre final.

- Écris la formule avant de remplacer les lettres par des nombres.
- Montre la ligne des produits ou celle des effectifs cumulés.
- Pour la médiane, cite N, le ou les rangs, puis la valeur lue.
- Donne l'unité ; pour un arrondi, annonce sa précision.
- Termine par une phrase en français qui répond à la question posée.

Rédaction modèle, pour la moyenne du club de pêche :

« $m = \dfrac{2 \times 0 + 7 \times 1 + 6 \times 2 + 4 \times 3 + 1 \times 4}{20}$.

Donc $m = \dfrac{35}{20} = 1{,}75$. En moyenne, le club a pris $1{,}75$ poisson par sortie. »

À retenir

- Une fréquence est comprise entre 0 et 1 ; toutes les fréquences d'une série ont pour somme 1.
- La moyenne utilise toutes les valeurs, chacune avec son effectif.
- La médiane se lit dans la liste ordonnée complète, pas au milieu du tableau.
- Le mode est une valeur, jamais un effectif.
- Les angles d'un diagramme circulaire ont pour somme $360°$.