BURHAN

Résumé : Les racines carrées

3ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/3ac/mathematiques/racines-carrees/resume

Chapitre	Semestre
Les racines carrées	Semestre 1

La racine carrée d'un nombre positif

> **À retenir : Une question à se poser**
>
> Une racine carrée répond à une seule question. Quel nombre positif a pour carré le nombre donné ? Tout le chapitre part de là.

Définition : Racine carrée d'un nombre positif

Soit a un nombre positif, c'est-à-dire supérieur ou égal à 0. La **racine carrée** de a est le nombre **positif** dont le carré est égal à a. On la note $\sqrt{a}$; le symbole « $\sqrt{}$ » s'appelle le **radical**.

Ainsi, pour tout nombre positif a, on a $\sqrt{a} \geq 0$ et :

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$$

Un nombre strictement négatif n'a pas de racine carrée : le carré d'un nombre n'est jamais strictement négatif.

Méthode : calculer une racine carrée par la définition

1. **Trouve** le nombre positif qui, élevé au carré, redonne ce qui est écrit sous le radical.
2. **Contrôle** : ton nombre doit être positif, et son carré doit convenir.
3. **Connais** par cœur les carrés parfaits de 1^2 à 12^2, soit de 1 à 144. Un carré parfait est le carré d'un nombre entier.

Exemple

Un décimal. On a $0{,}5 \geq 0$ et $0{,}5^2 = 0{,}25$. D'après la définition, $\sqrt{0{,}25} = 0{,}5$.

Zéro. On a $0 \geq 0$ et $0^2 = 0$. Donc $\sqrt{0} = 0$.

Attention : Un moins sous le radical, ou devant ?

Le nombre $\sqrt{-16}$ n'existe pas. Aucun carré ne vaut -16.

Mais $-\sqrt{16}$ existe : c'est l'opposé de $\sqrt{16}$, soit -4. Repère la place du signe moins.

Propriété : Racine carrée du carré d'un nombre positif

Pour tout nombre positif a :

$$\sqrt{a^2} = a.$$

Avec la définition, on retient donc deux égalités, valables pour tout nombre positif a : $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ et $\sqrt{a^2} = a$.

Exemple

Carré d'une racine. D'après la puissance d'un produit :

$$\begin{aligned}\left(2\sqrt{11}\right)^2 &= 2^2 \times \left(\sqrt{11}\right)^2 \\ &= 4 \times 11 = 44\end{aligned}$$

Racine d'un carré. Le nombre $0{,}7$ est positif. Donc $\sqrt{0{,}7^2} = 0{,}7$.

Attention : Le carré d'un nombre négatif

Calcule $\sqrt{(-8)^2}$ dans l'ordre. D'abord $(-8)^2 = 64$. Ensuite la racine carrée de ce nombre vaut 8.

Le résultat est 8, pas -8 : une racine carrée n'est jamais strictement négative.

L'équation x² = a

Propriété : Équation x² = a

Soit a un nombre.

- Si $a > 0$, l'équation $x^2 = a$ a **deux solutions** : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.
- Si $a = 0$, elle a **une seule solution** : 0.
- Si $a < 0$, elle n'a **aucune solution**.

Méthode : résoudre une équation x² = a

1. **Isole** x^2 : ajoute ou retire le même nombre aux deux membres. Divise ensuite les deux membres par le nombre placé devant x^2.
2. **Lis** le signe du nombre a obtenu.
3. **Choisis** le cas : deux solutions opposées, une seule ou aucune.
4. **Vérifie** chaque solution en calculant son carré.

5. **Conclus** par une phrase.

Exemple

Équation. $x^2 = 121$.

Cas. Le nombre 121 est strictement positif : il y a deux solutions, $\sqrt{121} = 11$ et -11.

Vérification. $11^2 = 121$ et $(-11)^2 = 121$.

Conclusion. Les solutions de l'équation sont 11 et -11.

Exemple

Équation. $4x^2 + 9 = 1$.

Isoler. On retire 9 aux deux membres, puis on divise par 4 :

$$4x^2 = -8$$
$$x^2 = -2$$

Conclusion. Aucun carré n'est strictement négatif : l'équation n'a aucune solution.

Exemple

Équation. $6x^2 = 0$.

Isoler. On divise par 6 : $x^2 = 0$.

Conclusion. Le seul nombre dont le carré vaut 0 est 0. L'équation a une seule solution : 0.

Attention : Ne perds pas une solution

L'équation $x^2 = 0{,}64$ a deux solutions : $0{,}8$ et $-0{,}8$. En effet, $(-0{,}8)^2 = 0{,}64$ aussi. N'oublie pas la solution négative.

Valeur exacte et valeur approchée

À retenir : Deux écritures, deux rôles

L'écriture $\sqrt{44}$ est une valeur exacte. Le nombre lu sur la calculatrice n'en est qu'une valeur approchée.

Garde la valeur exacte dans les calculs. Arrondis seulement à la fin, en disant la précision.

Méthode : obtenir une valeur approchée à la calculatrice

1. **Tape** la touche « $\sqrt{}$ », puis le nombre. Une expression placée sous le radical se tape entre parenthèses.
2. **Lis** l'écran : c'est une valeur approchée.
3. **Arrondis** à la précision demandée, avec le signe $\approx$.
4. **Contrôle** : le carré de ta valeur doit être proche du nombre de départ. Plus tu gardes de chiffres, plus ce carré s'en rapproche.

Exemple

Écran. Pour $\sqrt{44}$, la calculatrice affiche $6{,}633249581$.

Arrondis. À la calculatrice, $\sqrt{44} \approx 6{,}6$ (arrondi au dixième) et $\sqrt{44} \approx 6{,}63$ (arrondi au centième).

Contrôle. $6{,}63^2 = 43{,}9569$. C'est proche de 44, sans lui être égal.

Attention : L'écran ne donne pas la valeur exacte

Pour $\sqrt{19}$, l'écran affiche $4{,}358898944$. N'écris pas de signe égal entre les deux.

Le bon résultat est $\sqrt{19} \approx 4{,}36$, arrondi au centième. D'ailleurs, $4{,}36^2 = 19{,}0096$: ce n'est pas 19.

Produit, quotient et simplification

Propriété : Produit et quotient de deux racines carrées

Soit a et b deux nombres positifs.

- **Produit** : $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.
- **Quotient** : si de plus $b \neq 0$, alors $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Exemple

Produit. D'après la propriété du produit, $\sqrt{6} \times \sqrt{24} = \sqrt{144} = 12$.

Quotient. D'après la propriété du quotient, $\dfrac{\sqrt{52}}{\sqrt{13}} = \sqrt{4} = 2$.

Fraction sous le radical. De même, $\sqrt{\dfrac{16}{9}} = \dfrac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}} = \dfrac{4}{3}$.

Méthode : simplifier une racine carrée

1. **Repère**, sous le radical, son plus grand facteur qui soit un carré parfait.

2. **Écris** le produit de ce carré parfait et d'un entier.
3. **Sépare** avec la propriété du produit, puis remplace la racine du carré parfait.
4. **Contrôle** : sous le radical, il ne reste aucun carré parfait autre que 1.

Exemple

Premier nombre. $44 = 4 \times 11$. Donc :

$$\sqrt{44} = \sqrt{4} \times \sqrt{11} = 2\sqrt{11}$$

Second nombre. $99 = 9 \times 11$. Donc :

$$\sqrt{99} = \sqrt{9} \times \sqrt{11} = 3\sqrt{11}$$

Contrôle. Le nombre 11 n'a aucun carré parfait comme facteur, à part 1.

Attention **: Une somme ne se sépare pas**

Aucune règle ne sépare une somme sous un radical. Par exemple :

$$\sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$
$$\sqrt{25} + \sqrt{144} = 5 + 12 = 17$$

Les deux résultats diffèrent. Seuls le produit et le quotient se séparent.

Calculer avec des racines carrées

Méthode **: calculer avec des racines carrées**

1. **Simplifie** d'abord chaque racine carrée.
2. **Produit** : multiplie entre eux les nombres placés devant les radicaux. Réunis sous un seul radical les nombres placés dessous.
3. **Quotient** : même idée, avec une division.
4. **Somme** : réunis seulement les termes qui portent la même racine. Mets cette racine en facteur, comme avec la distributivité.

Exemple

Calcul. $A = \sqrt{44} + \sqrt{99} - 4\sqrt{11}$.

Simplifier. On a vu que $\sqrt{44} = 2\sqrt{11}$ et $\sqrt{99} = 3\sqrt{11}$.

Réunir. Par la distributivité :

$$\begin{aligned} A &= 2\sqrt{11} + 3\sqrt{11} - 4\sqrt{11} \\ &= (2 + 3 - 4)\sqrt{11} \\ &= \sqrt{11} \end{aligned}$$

Exemple

Calcul. $B = 2\sqrt{6} \times 5\sqrt{6}$.

Regrouper. On regroupe les facteurs :

$$B = (2 \times 5) \times \left(\sqrt{6} \times \sqrt{6}\right)$$

Conclure. D'après la définition, $\sqrt{6} \times \sqrt{6} = 6$. Donc $B = 10 \times 6 = 60$.

Remarque : Des racines différentes restent séparées

L'expression $2\sqrt{11} + \sqrt{7}$ ne se réduit pas. Les racines $\sqrt{11}$ et $\sqrt{7}$ sont différentes. On la laisse ainsi : c'est déjà une écriture exacte.

Un dénominateur sans radical

À retenir : Chasser le radical du dénominateur

Un quotient garde sa valeur si l'on multiplie son numérateur et son dénominateur par un même nombre non nul. On choisit ce nombre pour chasser le radical du dénominateur. Le résultat se calcule plus facilement.

Propriété : Dénominateur rendu rationnel

Soit a un nombre strictement positif et b un nombre. Alors :

$$\frac{b}{\sqrt{a}} = \frac{b\sqrt{a}}{a}.$$

En particulier, $\dfrac{1}{\sqrt{a}} = \dfrac{\sqrt{a}}{a}$ et $\dfrac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$. On dit qu'on a **rendu rationnel le dénominateur** : il ne contient plus de radical.

Méthode : écrire un quotient sans radical au dénominateur

1. **Simplifie** la racine du dénominateur si tu le peux.
2. **Multiplie** numérateur et dénominateur par la racine restée au dénominateur.
3. **Remplace** le produit d'une racine par elle-même par le nombre sous le radical.

4. **Simplifie** la fraction obtenue.

Exemple

Cas simple. On multiplie le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{11}$:

$$\frac{3}{\sqrt{11}} = \frac{3 \times \sqrt{11}}{\sqrt{11} \times \sqrt{11}} = \frac{3\sqrt{11}}{11}$$

Cas particulier. D'après la propriété du dénominateur rendu rationnel, $\frac{7}{\sqrt{7}} = \sqrt{7}$.

Avec un facteur. On multiplie encore par $\sqrt{11}$:

$$\frac{22}{3\sqrt{11}} = \frac{22\sqrt{11}}{3 \times 11} = \frac{22\sqrt{11}}{33} = \frac{2\sqrt{11}}{3}$$

Exemple

Calcul. Écris $\frac{1}{\sqrt{44}}$ sans radical au dénominateur.

Simplifier d'abord. $\sqrt{44} = 2\sqrt{11}$, donc $\frac{1}{\sqrt{44}} = \frac{1}{2\sqrt{11}}$.

Multiplier. On multiplie le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{11}$:

$$\frac{1}{2\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{11}}{2 \times 11} = \frac{\sqrt{11}}{22}$$

Racines carrées et longueurs

Méthode : une longueur exacte

1. **Rappel de 2e année** : dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est la somme des carrés des deux autres côtés.
2. **Calcule** le carré de la longueur cherchée. Pour l'hypoténuse, additionne les deux carrés. Pour un côté de l'angle droit, soustrais : $AB^2 = BC^2 - AC^2$ si l'hypoténuse est $[BC]$.
3. **Prends** la racine carrée : une longueur est positive.
4. **Simplifie** la racine, puis donne une valeur approchée si on la demande.

Exemple

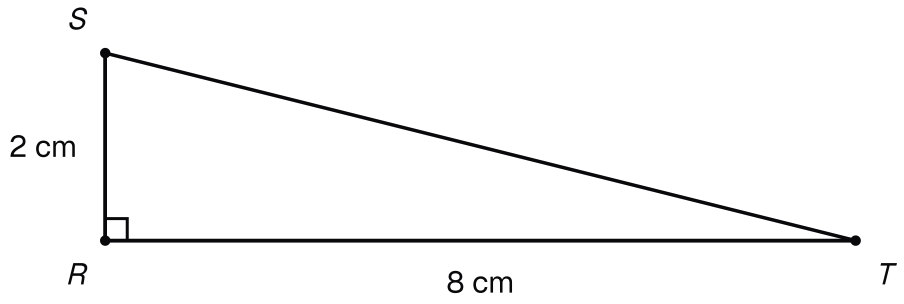
Figure. Un triangle RST est rectangle en R, avec $RS = 2$ cm et $RT = 8$ cm. Trace-le sur ton cahier.

Pythagore. D'après le théorème de Pythagore :

$$ST^2 = 2^2 + 8^2 = 4 + 64 = 68$$

Valeur exacte. ST est positif et $68 = 4 \times 17$, donc $ST = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$ cm.

Valeur approchée. À la calculatrice, $ST \approx 8{,}25$ cm, arrondi au centième.



Triangle RST à tracer : angle droit en R, RS = 2 cm et RT = 8 cm, l'hypoténuse ST restant à calculer.

Remarque : Une longueur n'est jamais négative

Pour une longueur, on garde seulement la solution positive de l'équation $x^2 = a$. La solution négative ne mesure rien. Dis-le dans ta phrase de conclusion.

Quelle règle pour quel calcul ?

Méthode : Quelle règle pour quel calcul ?

- **Racine d'un carré parfait** : la définition.
- **Carré d'une racine, racine d'un carré** : on retrouve le nombre positif de départ.
- **Équation** $x^2 = a$: regarde le signe de a.
- **Produit ou quotient** : réunis ou sépare sous un même radical.
- **Simplifier** : le plus grand carré parfait facteur.
- **Somme** : seulement des termes avec la même racine.
- **Dénominateur** : multiplie le numérateur et le dénominateur par la racine du dénominateur.
- **Valeur approchée** : à la fin, avec la précision.

Définition, a positif

$$\sqrt{a} \geq 0 \text{ et } \left(\sqrt{a}\right)^2 = a$$

Racine d'un carré, a positif

$$\sqrt{a^2} = a$$

Produit, a et b positifs

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

Quotient, a positif et b strictement positif

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Dénominateur, a strictement positif

$$\frac{b}{\sqrt{a}} = \frac{b\sqrt{a}}{a}$$

Équation, a strictement positif

$x^2 = a$ a exactement deux solutions : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$

Équation, a nul

$x^2 = 0$ a une seule solution : 0

Équation, a strictement négatif

$x^2 = a$ n'a aucune solution

À retenir : Rédiger en devoir

Nomme la règle à chaque étape : « d'après la propriété du produit ». Vérifie chaque solution d'une équation, puis conclus par une phrase. Donne toujours la précision d'une valeur approchée et l'outil employé.