BURHAN

Les racines carrées : exercices, niveau examen

3ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/3ac/mathematiques/racines-carrees/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Les racines carrées	Niveau examen	5

Exercice 1 5 pts

Niveau examen : une expression à simplifier

On pose :

$$A = \sqrt{63} + \sqrt{112} - 5\sqrt{7}.$$

1. 1,5 pts

Écrire $\sqrt{63}$ et $\sqrt{112}$ sous la forme $a\sqrt{7}$, avec a entier. On donne $112 = 16 \times 7$.

INDICE

Outil : la propriété du produit. **Début :** pour 63, cherche un carré parfait qui divise ce nombre.

CORRIGÉ

Premier nombre. On cherche un carré parfait qui divise 63 : $63 = 9 \times 7$. D'après la propriété du produit, $\sqrt{63} = \sqrt{9} \times \sqrt{7} = 3\sqrt{7}$.

Second nombre. Avec la donnée $112 = 16 \times 7$, la même propriété donne $\sqrt{112} = \sqrt{16} \times \sqrt{7} = 4\sqrt{7}$.

Conclusion. $\sqrt{63} = 3\sqrt{7}$ et $\sqrt{112} = 4\sqrt{7}$.

2. 1 pts

En déduire l'écriture de A sous la forme $a\sqrt{7}$.

INDICE

Outil : la distributivité, pour réunir les termes en $\sqrt{7}$.

CORRIGÉ

Avec la question 1, $A = 3\sqrt{7} + 4\sqrt{7} - 5\sqrt{7}$.

Les trois termes contiennent $\sqrt{7}$. Par la distributivité, on le met en facteur :

$$A = (3 + 4 - 5)\sqrt{7} = 2\sqrt{7}.$$

Conclusion. $A = 2\sqrt{7}$.

3. 1 pts

Calculer A^2. Le résultat est-il un nombre entier ?

INDICE

Outil : la puissance d'un produit, puis la définition de la racine carrée.

CORRIGÉ

D'après la puissance d'un produit, $A^2 = \left(2\sqrt{7}\right)^2 = 2^2 \times \left(\sqrt{7}\right)^2$.

D'après la définition, $\left(\sqrt{7}\right)^2 = 7$. Donc :

$$A^2 = 4 \times 7 = 28.$$

Conclusion. $A^2 = 28$: c'est un nombre entier.

4. 1,5 pts

Un rectangle a pour longueur A et pour largeur $\dfrac{21}{A}$. Écrire sa largeur sans radical au dénominateur.

Calculer ensuite son aire de deux façons : avec cette nouvelle écriture, puis directement avec $A \times \dfrac{21}{A}$. Les deux résultats sont-ils égaux ?

INDICE

Début : utilise la forme de A trouvée à la question 2.

CORRIGÉ

Largeur. Avec la question 2, $\dfrac{21}{A} = \dfrac{21}{2\sqrt{7}}$. On multiplie le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{7}$, puis on simplifie par 7 :

$$\begin{aligned}\frac{21}{2\sqrt{7}} &= \frac{21\sqrt{7}}{2 \times 7} \\ &= \frac{21\sqrt{7}}{14} = \frac{3\sqrt{7}}{2}\end{aligned}$$

Première façon. L'aire vaut longueur fois largeur :

$$\begin{aligned}&2\sqrt{7} \times \frac{3\sqrt{7}}{2} \\ &= \frac{2 \times 3}{2} \times \left(\sqrt{7}\right)^2 \\ &= 3 \times 7 = 21\end{aligned}$$

Seconde façon. $A = 2\sqrt{7}$ n'est pas nul, car $\sqrt{7}$ n'est pas nul. On peut donc simplifier par A : $A \times \dfrac{21}{A} = 21$.

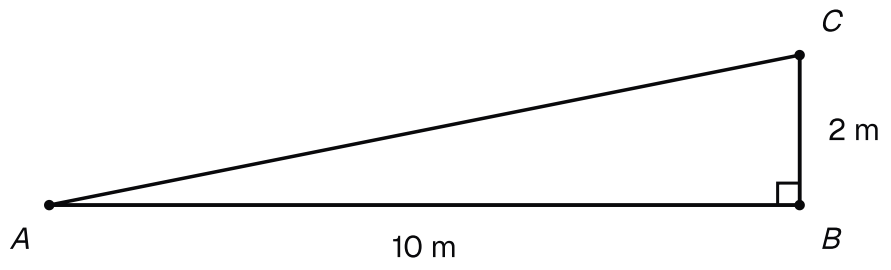
Conclusion. La largeur s'écrit $\dfrac{3\sqrt{7}}{2}$. Les deux calculs donnent 21 : les deux résultats sont égaux.

Exercice 2 5 pts

Niveau examen : deux toboggans

Dans un parc de jeux, un toboggan droit forme, vu de côté, un triangle ABC rectangle en B. La base horizontale mesure $AB = 10$ m et la hauteur $BC = 2$ m.

La glissière est le segment $[AC]$. Fais un schéma sur ton cahier.



Le toboggan vu de côté : base AB de 10 m, hauteur BC de 2 m, angle droit en B et glissière AC.

1. 1,5 pts

Calculer la longueur exacte AC, sous la forme $a\sqrt{26}$.

INDICE

Outil : le théorème de Pythagore. **Début :** repère l'hypoténuse. **Point délicat :** cherche un carré parfait qui divise AC^2.

CORRIGÉ

Pythagore. Le triangle ABC est rectangle en B : son hypoténuse est $[AC]$. D'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 \\ &= 100 + 4 = 104 \end{aligned}$$

Longueur. AC est positive, donc $AC = \sqrt{104}$.

Simplifier. $104 = 4 \times 26$. D'après la propriété du produit, $AC = \sqrt{4} \times \sqrt{26} = 2\sqrt{26}$ m.

Conclusion. La glissière mesure exactement $2\sqrt{26}$ m.

2. 1 pts

En déduire une valeur approchée de AC, arrondie au centième.

INDICE

Outil : la calculatrice, avec la touche « $\sqrt{}$ ».

CORRIGÉ

À la calculatrice, $2\sqrt{26} \approx 10{,}198$. Le chiffre des millièmes est 8 : on passe au centième supérieur, ce qui donne $10{,}20$. Le zéro final indique la précision : on le garde.

Conclusion. $AC = 2\sqrt{26} \approx 10{,}20$ m, arrondi au centième.

3. 1 pts

Écrire le quotient $\dfrac{BC}{AC}$ sans radical au dénominateur.

INDICE

Outil : la propriété du dénominateur rendu rationnel. **Début :** remplace AC par sa valeur exacte. **Point délicat :** simplifie la fraction avant de multiplier.

CORRIGÉ

Simplifier. On remplace BC et AC par leurs valeurs, puis on simplifie par 2 :

$$\frac{BC}{AC} = \frac{2}{2\sqrt{26}} = \frac{1}{\sqrt{26}}.$$

Dénominateur. D'après la propriété du dénominateur rendu rationnel, on multiplie le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{26}$:

$$\frac{1}{\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{26}}{26}.$$

Conclusion. $\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{\sqrt{26}}{26}$.

4. 1,5 pts

Un second toboggan forme aussi, vu de côté, un triangle rectangle : il a la même hauteur de 2 m et une glissière de 5 m.

On note x sa base horizontale, en mètres. Écrire l'équation vérifiée par x. En déduire la valeur exacte de x, puis une valeur approchée au centième.

INDICE

Début : la glissière est encore l'hypoténuse. **Point délicat :** une longueur est positive ; écarte l'autre solution.

CORRIGÉ

Équation. Vu de côté, le second toboggan forme un triangle rectangle dont la glissière est l'hypoténuse. D'après le théorème de Pythagore, $x^2 + 2^2 = 5^2$, soit $x^2 + 4 = 25$. On retranche 4 aux deux membres : x vérifie l'équation $x^2 = 21$.

Résoudre. Le nombre 21 est strictement positif : cette équation a deux solutions, $\sqrt{21}$ et $-\sqrt{21}$. Une longueur est positive, donc on garde $\sqrt{21}$.

Valeur approchée. À la calculatrice, $\sqrt{21} \approx 4{,}583$.

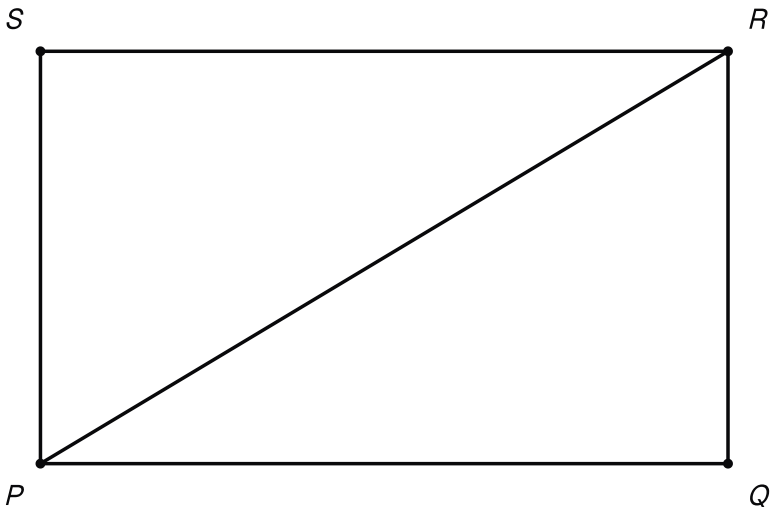
Conclusion. La base mesure $x = \sqrt{21}$ m, et $x \approx 4{,}58$ m, arrondi au centième.

Exercice 3 — 5 pts

Niveau examen : une installation solaire

Sur le toit plat d'un hangar, une installation de panneaux solaires occupe un rectangle $PQRS$. Sa longueur mesure $PQ = \sqrt{150}$ m et sa largeur $QR = \sqrt{54}$ m.

Un câble est tendu selon la diagonale $[PR]$.



L'installation PQRS vue de dessus, avec le câble tendu selon la diagonale [PR].

1. — 1 pts

Écrire PQ et QR sous la forme $a\sqrt{6}$, avec a entier. On donne $150 = 25 \times 6$.

INDICE

Outil : la propriété du produit. **Début :** pour 54, cherche un carré parfait qui divise ce nombre.

CORRIGÉ

Longueur. $150 = 25 \times 6$. D'après la propriété du produit, $PQ = \sqrt{25} \times \sqrt{6} = 5\sqrt{6}$ m.

Largeur. On cherche un carré parfait qui divise 54 : $54 = 9 \times 6$. De même, $QR = \sqrt{9} \times \sqrt{6} = 3\sqrt{6}$ m.

Conclusion. $PQ = 5\sqrt{6}$ m et $QR = 3\sqrt{6}$ m.

2. 1,5 pts

Calculer l'aire exacte de l'installation. Le résultat est-il un nombre entier ?

INDICE

Début : l'aire d'un rectangle vaut longueur fois largeur. **Ensuite :** regroupe les entiers d'un côté, les racines de l'autre.

CORRIGÉ

Produit. L'aire d'un rectangle vaut longueur fois largeur. On regroupe les entiers d'un côté, les radicaux de l'autre :

$$\begin{aligned} & 5\sqrt{6} \times 3\sqrt{6} \\ & = (5 \times 3) \times \left(\sqrt{6} \times \sqrt{6}\right) \end{aligned}$$

Définition. $\sqrt{6} \times \sqrt{6} = \left(\sqrt{6}\right)^2 = 6$.

Conclusion. L'aire vaut $15 \times 6 = 90$ m² : c'est un nombre entier.

3. 1 pts

En déduire le périmètre exact de l'installation, sous la forme $a\sqrt{6}$, puis sa valeur approchée au dixième.

INDICE

Outil : la distributivité, pour réunir les termes en $\sqrt{6}$.

CORRIGÉ

Valeur exacte. Pour un rectangle, on additionne la longueur et la largeur, puis on double. Par la distributivité, $5\sqrt{6} + 3\sqrt{6} = 8\sqrt{6}$. Le périmètre vaut donc $2 \times \left(5\sqrt{6} + 3\sqrt{6}\right) = 2 \times 8\sqrt{6} = 16\sqrt{6}$ m.

Valeur approchée. À la calculatrice, $16\sqrt{6} \approx 39{,}19$. Donc $16\sqrt{6} \approx 39{,}2$ m, arrondi au dixième.

Conclusion. Le périmètre vaut exactement $16\sqrt{6}$ m, soit environ $39{,}2$ m.

4. 1,5 pts

Calculer la longueur exacte du câble PR, puis sa valeur approchée au centième. On donne $204 = 4 \times 51$.

Le câble est vendu en bobines de 15 m. Une seule bobine suffit-elle ?

INDICE

Début : cherche dans le rectangle un triangle rectangle dont $[PR]$ est l'hypoténuse.

CORRIGÉ

Triangle rectangle. $PQRS$ est un rectangle, donc son angle en Q est droit : le triangle PQR est rectangle en Q, d'hypoténuse $[PR]$.

Pythagore. D'après la définition, $PQ^2 = 150$ et $QR^2 = 54$. D'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} PR^2 &= PQ^2 + QR^2 \\ &= 150 + 54 = 204 \end{aligned}$$

Longueur. PR est positive, donc $PR = \sqrt{204}$. Comme $204 = 4 \times 51$, la propriété du produit donne $PR = 2\sqrt{51}$ m.

Valeur approchée. À la calculatrice, $PR \approx 14{,}28$ m, arrondi au centième.

Conclusion. Le câble mesure exactement $2\sqrt{51}$ m, soit environ $14{,}28$ m. C'est moins que 15 m : une seule bobine suffit.

Exercice 4 5 pts

Niveau examen : deux nombres et des équations

On pose :

$$E = \left(\sqrt{21}\right)^2 - \sqrt{(-11)^2}$$

et

$$F = \frac{\sqrt{288}}{\sqrt{2}}.$$

1. 1,5 pts

Calculer E et F.

INDICE

Outil : la définition de la racine carrée, puis la propriété du quotient. **Point délicat :** dans E, calcule d'abord $(-11)^2$.

CORRIGÉ

Nombre E. D'après la définition, $\left(\sqrt{21}\right)^2 = 21$. Pour le second terme, on calcule d'abord sous le radical : $(-11)^2 = 121$ et $\sqrt{121} = 11$, car $11 \geq 0$ et $11^2 = 121$. Donc :

$$E = 21 - 11 = 10.$$

Nombre F. D'après la propriété du quotient :

$$F = \sqrt{\frac{288}{2}} = \sqrt{144} = 12,$$

car $12 \geq 0$ et $12^2 = 144$.

Conclusion. $E = 10$ et $F = 12$.

2. 1 pts

En déduire les solutions de l'équation $x^2 = E$, puis celles de l'équation $x^2 = E - F$.

INDICE

Outil : la propriété de l'équation $x^2 = a$. **Point délicat :** regarde le signe du nombre de droite.

CORRIGÉ

Première équation. Avec la question 1, elle s'écrit $x^2 = 10$. Le nombre 10 est strictement positif : d'après la propriété de l'équation $x^2 = a$, les solutions de l'équation sont $\sqrt{10}$ et $-\sqrt{10}$.

Seconde équation. $E - F = 10 - 12 = -2$, donc elle s'écrit $x^2 = -2$. Or -2 est strictement négatif, et un carré ne l'est jamais : l'équation n'a aucune solution.

Conclusion. L'équation $x^2 = E$ a deux solutions, $\sqrt{10}$ et $-\sqrt{10}$. L'équation $x^2 = E - F$ n'en a aucune.

3. 1 pts

Résoudre l'équation $Fx^2 = 3E$. Écrire ses solutions sans radical au dénominateur.

INDICE

Début : remplace E et F par leurs valeurs, puis isole x^2. **Ensuite :** la propriété du quotient.

CORRIGÉ

Isoler x^2. Avec la question 1, l'équation s'écrit $12x^2 = 30$. On divise les deux membres par 12, puis on simplifie par 6 :

$$x^2 = \frac{30}{12} = \frac{5}{2}.$$

Résoudre. Le nombre $\frac{5}{2}$ est strictement positif : les solutions sont $\sqrt{\frac{5}{2}}$ et $-\sqrt{\frac{5}{2}}$.

Dénominateur. D'après la propriété du quotient, $\sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$. On multiplie le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{2}$; d'après la définition, $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$:

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

Vérification. $12 \times \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 = 12 \times \frac{10}{4} = 30$. L'opposé a le même carré : il convient aussi.

Conclusion. Les solutions de l'équation sont $\frac{\sqrt{10}}{2}$ et $-\frac{\sqrt{10}}{2}$.

4. 1,5 pts

On pose $G = \sqrt{(E-F)^2}$. Calculer G. A-t-on $G = E - F$?

Résoudre ensuite l'équation $x^2 = (E-F)^2$.

INDICE

Début : utilise la valeur de $E - F$ trouvée à la question 2. **Point délicat :** une racine carrée n'est jamais strictement négative.

CORRIGÉ

Calcul de G. Avec la question 2, $E - F = -2$. Donc $(E-F)^2 = (-2)^2 = 4$ et $G = \sqrt{4} = 2$, car $2 \geq 0$ et $2^2 = 4$.

Comparaison. $G = 2$ et $E - F = -2$: on n'a pas $G = E - F$. En effet, l'égalité $\sqrt{a^2} = a$ n'est vraie que pour un nombre a positif, et $E - F$ est strictement négatif.

Équation. Elle s'écrit $x^2 = 4$. Le nombre 4 est strictement positif : les solutions sont $\sqrt{4}$ et $-\sqrt{4}$, soit 2 et -2. Vérification : $2^2 = 4$ et $(-2)^2 = 4$.

Conclusion. $G = 2$, qui n'est pas égal à $E - F$. Les solutions de l'équation sont 2 et -2 : l'une est $E - F$, l'autre est G.

Exercice 5 — 5 pts

Niveau examen : la durée d'une chute

On lâche une petite balle, sans la lancer, d'une hauteur de h mètres. On néglige la résistance de l'air et on admet que la durée de sa chute, en secondes, est :

$$t = \sqrt{\frac{h}{5}}.$$

1. — 1 pts

Calculer la durée de la chute pour une hauteur de 45 m.

INDICE

Début : remplace h par 45 dans la formule, puis calcule le quotient sous le radical.

CORRIGÉ

On remplace h par 45 dans la formule, puis on calcule le quotient sous le radical :

$$t = \sqrt{\frac{45}{5}} = \sqrt{9} = 3.$$

En effet, $3 \geq 0$ et $3^2 = 9$.

Conclusion. La chute dure 3 s.

2. — 1,5 pts

La balle est lâchée d'un balcon situé à 7 m du sol. Écrire la durée de la chute sous la forme d'un quotient sans radical au dénominateur, puis en donner une valeur approchée au centième.

INDICE

Outil : la propriété du quotient. **Ensuite :** rends rationnel le dénominateur.

CORRIGÉ

Quotient. Pour $h = 7$, $t = \sqrt{\frac{7}{5}}$. D'après la propriété du quotient, $t = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$.

Dénominateur. On multiplie le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{5}$. D'après la propriété du produit, $\sqrt{7} \times \sqrt{5} = \sqrt{35}$; d'après la définition, $\sqrt{5} \times \sqrt{5} = 5$. Donc $t = \frac{\sqrt{7} \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{35}}{5}$ s.

Valeur approchée. À la calculatrice, $\frac{\sqrt{35}}{5} \approx 1{,}183$, donc $t \approx 1{,}18$ s, arrondi au centième.

Conclusion. La chute dure $\frac{\sqrt{35}}{5}$ s, soit environ $1{,}18$ s.

3. 1 pts

On lâche la balle d'une hauteur de 28 m, quatre fois plus grande. En déduire la valeur exacte de la durée de la chute. Est-elle quatre fois plus grande que la durée de la question 2 ?

INDICE

Début : écris $\dfrac{28}{5}$ comme le produit de 4 par une fraction.

CORRIGÉ

Produit. $\dfrac{28}{5} = 4 \times \dfrac{7}{5}$. D'après la propriété du produit, et comme $\sqrt{4} = 2$:

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{28}{5}} &= \sqrt{4} \times \sqrt{\frac{7}{5}} \\ &= 2\sqrt{\frac{7}{5}}\end{aligned}$$

Valeur exacte. D'après la question 2, $\sqrt{\dfrac{7}{5}} = \dfrac{\sqrt{35}}{5}$. La durée vaut donc $2 \times \dfrac{\sqrt{35}}{5} = \dfrac{2\sqrt{35}}{5}$ s.

Conclusion. La hauteur est multipliée par 4, mais la durée n'est multipliée que par 2 : elle n'est pas quatre fois plus grande.

4. 1,5 pts

Lâchée du haut d'une falaise, la balle met $3\sqrt{3}$ secondes pour atteindre la mer. Calculer la hauteur de la falaise.

INDICE

Début : calcule t^2 de deux façons : avec la formule, puis avec la durée donnée. **Point délicat :** la puissance d'un produit.

CORRIGÉ

Avec la formule. Le nombre $\dfrac{h}{5}$ est positif. D'après la définition, $t^2 = \left(\sqrt{\dfrac{h}{5}}\right)^2 = \dfrac{h}{5}$.

Avec la durée. D'après la puissance d'un produit, puis la définition :

$$\begin{aligned}t^2 &= \left(3\sqrt{3}\right)^2 = 3^2 \times \left(\sqrt{3}\right)^2 \\ &= 9 \times 3 = 27\end{aligned}$$

Hauteur. Les deux expressions de t^2 sont égales : $\dfrac{h}{5} = 27$. On multiplie les deux membres par 5 : $h = 5 \times 27 = 135$.

Contrôle. $\sqrt{\dfrac{135}{5}} = \sqrt{27}$ et $27 = 9 \times 3$, donc $\sqrt{27} = \sqrt{9} \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$: on retrouve la durée donnée.

Conclusion. La falaise mesure 135 m.