BURHAN

Les racines carrées : exercices, entraînement

3ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/3ac/mathematiques/racines-carrees/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Les racines carrées	Entraînement	7

Exercice 1

Simplifier d'abord, réduire ensuite

1.

Écrire $A = \sqrt{27} + \sqrt{48} - 2\sqrt{3}$ sous la forme $a\sqrt{3}$, avec a entier.

INDICE

Début : simplifie chaque racine en cherchant un carré parfait qui divise le nombre. **Ensuite :** les trois termes ont la même racine ; mets-la en facteur.

CORRIGÉ

Simplifier. On a $27 = 9 \times 3$ et $48 = 16 \times 3$. D'après la propriété du produit, $\sqrt{27} = \sqrt{9} \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$ et $\sqrt{48} = \sqrt{16} \times \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$.

Réduire. Les trois termes contiennent $\sqrt{3}$. Par la distributivité, on le met en facteur :

$$\begin{aligned} A &= 3\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} \\ &= (3 + 4 - 2)\sqrt{3} \\ &= 5\sqrt{3} \end{aligned}$$

Conclusion. $A = 5\sqrt{3}$, donc $a = 5$.

2.

Écrire $B = \sqrt{80} - \sqrt{45} + 2\sqrt{125}$ sous la forme $b\sqrt{5}$, avec b entier.

INDICE

Outil : la propriété du produit. **Début :** chaque racine doit devenir un multiple de $\sqrt{5}$. **Point délicat :** garde le facteur 2 devant la dernière racine.

CORRIGÉ

Simplifier. On a $80 = 16 \times 5$, $45 = 9 \times 5$ et $125 = 25 \times 5$. D'après la propriété du produit :

- $\sqrt{80} = 4\sqrt{5}$;
- $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$;
- $\sqrt{125} = 5\sqrt{5}$, donc $2\sqrt{125} = 2 \times 5\sqrt{5} = 10\sqrt{5}$.

Réduire. On obtient $B = 4\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 10\sqrt{5}$. Par la distributivité, on met $\sqrt{5}$ en facteur :

$$B = (4 - 3 + 10)\sqrt{5} = 11\sqrt{5}.$$

Conclusion. $B = 11\sqrt{5}$, donc $b = 11$.

Exercice 2

Multiplier ou diviser, puis simplifier

1.

Calculer $C = \sqrt{6} \times \sqrt{21}$, puis le simplifier.

INDICE

Outil : la propriété du produit. **Ensuite :** simplifie la racine obtenue ; son nombre est divisible par un carré parfait.

CORRIGÉ

Réunir. D'après la propriété du produit, $C = \sqrt{6 \times 21} = \sqrt{126}$.

Simplifier. On cherche un carré parfait qui divise 126 : $126 = 9 \times 14$. D'après la propriété du produit :

$$C = \sqrt{9} \times \sqrt{14} = 3\sqrt{14}.$$

Le nombre $14 = 2 \times 7$ n'a aucun carré parfait comme facteur, sauf 1.

Conclusion. $C = 3\sqrt{14}$.

2.

Calculer $D = \dfrac{\sqrt{96}}{\sqrt{2}}$, puis le simplifier.

INDICE

Outil : la propriété du quotient. **Ensuite :** simplifie la racine obtenue.

CORRIGÉ

Réunir. D'après la propriété du quotient :

$$D = \sqrt{\frac{96}{2}} = \sqrt{48}.$$

Simplifier. $48 = 16 \times 3$. D'après la propriété du produit :

$$D = \sqrt{16} \times \sqrt{3} = 4\sqrt{3}.$$

Conclusion. $D = 4\sqrt{3}$.

3.

Calculer $E = 2\sqrt{7} \times 3\sqrt{14}$, puis le simplifier.

INDICE

Début : regroupe 2×3 d'un côté, $\sqrt{7} \times \sqrt{14}$ de l'autre. **Point délicat :** pour simplifier la racine obtenue, divise d'abord son nombre par 2.

CORRIGÉ

Regrouper. On réunit les entiers d'un côté, les radicaux de l'autre. D'après la propriété du produit, $\sqrt{7} \times \sqrt{14} = \sqrt{98}$, donc :

$$\begin{aligned} E &= (2 \times 3) \times \left(\sqrt{7} \times \sqrt{14}\right) \\ &= 6\sqrt{98} \end{aligned}$$

Simplifier. On a $98 = 7^2 \times 2$. D'après la propriété du produit, $\sqrt{98} = \sqrt{7^2} \times \sqrt{2} = 7\sqrt{2}$, car 7 est positif.

Conclusion. $E = 6 \times 7\sqrt{2} = 42\sqrt{2}$.

Exercice 3

Isoler le carré, puis résoudre

1.

Résoudre l'équation $5x^2 = 80$.

INDICE

Début : divise les deux membres par 5.

CORRIGÉ

Isoler x^2. On divise les deux membres par 5 :

$$\begin{aligned} 5x^2 &= 80 \\ x^2 &= 16 \end{aligned}$$

Résoudre. Le nombre 16 est strictement positif. D'après la propriété de l'équation $x^2 = a$, il y a deux solutions opposées. Comme $4 \geq 0$ et $4^2 = 16$, ce sont 4 et -4.

Vérification. $5 \times 4^2 = 80$ et $5 \times (-4)^2 = 80$.

Conclusion. Les solutions de l'équation sont 4 et -4.

2.

Résoudre l'équation $2x^2 - 1 = 13$.

INDICE

Début : ajoute 1 aux deux membres, puis divise par 2.

CORRIGÉ

Isoler x^2. On ajoute 1 aux deux membres, puis on les divise par 2 :

$$\begin{aligned} 2x^2 - 1 &= 13 \\ 2x^2 &= 14 \\ x^2 &= 7 \end{aligned}$$

Résoudre. Le nombre 7 est strictement positif. D'après la propriété de l'équation $x^2 = a$, les solutions sont $\sqrt{7}$ et $-\sqrt{7}$.

Vérification. $2 \times \left(\sqrt{7}\right)^2 - 1 = 2 \times 7 - 1 = 13$. Le nombre $-\sqrt{7}$ a le même carré, donc il convient aussi.

Conclusion. Les solutions de l'équation sont $\sqrt{7}$ et $-\sqrt{7}$.

3.

Résoudre les équations $x^2 + 12 = 7$ et $3x^2 + 4 = 4$.

INDICE

Point délicat : après avoir isolé x^2, regarde bien le signe du second membre.

CORRIGÉ

Première équation. On retranche 12 aux deux membres : $x^2 = -5$. D'après la règle des signes, un carré n'est jamais strictement négatif. Cette équation n'a aucune solution.

Seconde équation. On retranche 4 aux deux membres, puis on les divise par 3 :

$$3x^2 = 0$$
$$x^2 = 0$$

Le seul nombre dont le carré est nul est 0. Vérification : $3 \times 0^2 + 4 = 4$.

Conclusion. La première équation n'a aucune solution. La seconde équation a une seule solution : 0.

Exercice 4

Un facteur devant la racine du dénominateur

1.

Écrire $\dfrac{9}{2\sqrt{3}}$ et $\dfrac{14}{3\sqrt{7}}$ sans radical au dénominateur, puis simplifier.

INDICE

Outil : multiplie le numérateur et le dénominateur par la racine seule, pas par le facteur entier.

CORRIGÉ

Premier quotient. On multiplie le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{3}$ seulement. D'après la définition, $\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$; on simplifie ensuite par 3 :

$$\begin{aligned}\frac{9}{2\sqrt{3}} &= \frac{9\sqrt{3}}{2 \times 3} \\ &= \frac{9\sqrt{3}}{6} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

Second quotient. De même, avec $\sqrt{7}$, puis en simplifiant par 7 :

$$\begin{aligned}\frac{14}{3\sqrt{7}} &= \frac{14\sqrt{7}}{3 \times 7} \\ &= \frac{14\sqrt{7}}{21} = \frac{2\sqrt{7}}{3}\end{aligned}$$

Conclusion. $\dfrac{9}{2\sqrt{3}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{14}{3\sqrt{7}} = \dfrac{2\sqrt{7}}{3}$.

2.

Simplifier $\sqrt{27}$. En déduire l'écriture de $\dfrac{6}{\sqrt{27}}$ sans radical au dénominateur.

INDICE

Début : simplifie d'abord $\sqrt{27}$ avec la propriété du produit. **Ensuite :** simplifie la fraction avant de multiplier.

CORRIGÉ

Simplifier la racine. $27 = 9 \times 3$. D'après la propriété du produit, $\sqrt{27} = \sqrt{9} \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$.

Simplifier la fraction. On remplace $\sqrt{27}$ par $3\sqrt{3}$, puis on simplifie par 3 :

$$\frac{6}{\sqrt{27}} = \frac{6}{3\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Dénominateur. D'après la propriété du dénominateur rendu rationnel :

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

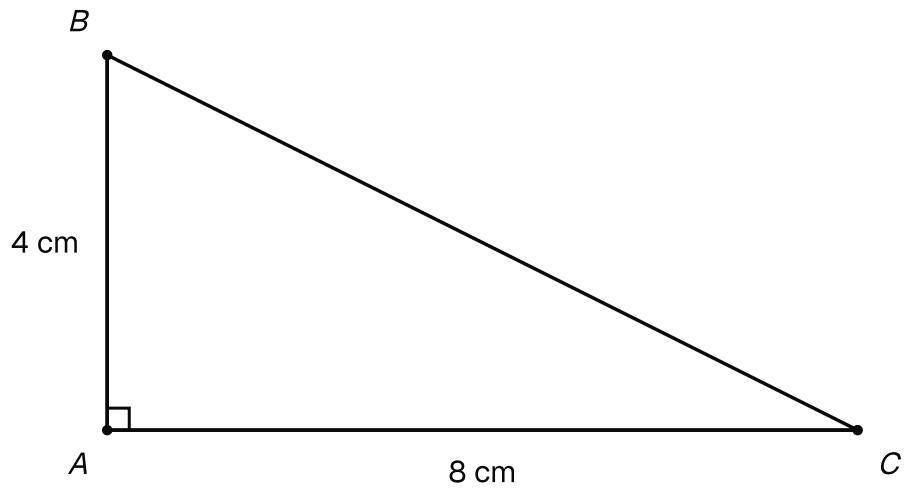
Conclusion. $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ et $\dfrac{6}{\sqrt{27}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Exercice 5

Deux triangles rectangles sur le cahier

1.

Le triangle ABC est rectangle en A, avec $AB = 4$ cm et $AC = 8$ cm. Trace-le sur ton cahier. Calculer la longueur exacte BC, sous la forme $a\sqrt{b}$.



Les données de la question 1 : ABC rectangle en A, avec AB = 4 cm et AC = 8 cm.

INDICE

Outil : le théorème de Pythagore. **Ensuite :** cherche le plus grand carré parfait qui divise BC^2.

CORRIGÉ

Pythagore. Le triangle ABC est rectangle en A : son hypoténuse est $[BC]$. D'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 \\ &= 16 + 64 = 80 \end{aligned}$$

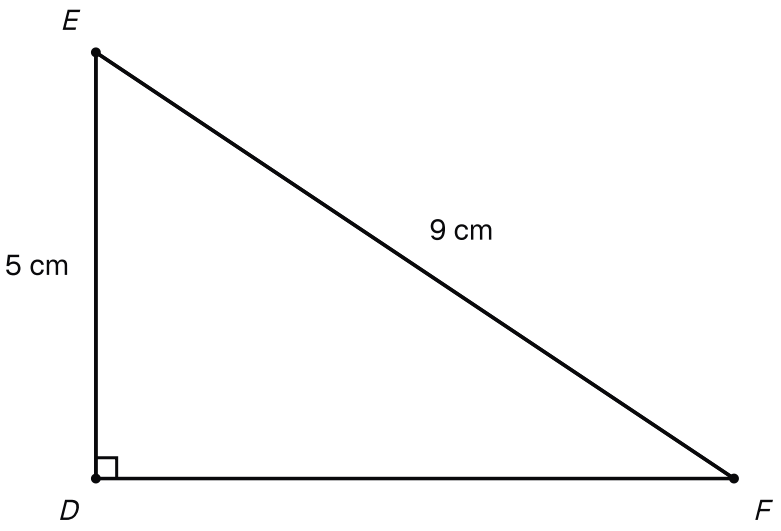
Longueur. BC est une longueur, donc un nombre positif : $BC = \sqrt{80}$.

Simplifier. $80 = 16 \times 5$. D'après la propriété du produit, $BC = \sqrt{16} \times \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$ cm.

Conclusion. La longueur exacte est $BC = 4\sqrt{5}$ cm.

2.

Le triangle DEF est rectangle en D, avec $EF = 9$ cm et $DE = 5$ cm. Calculer la longueur exacte DF, sous la forme $a\sqrt{b}$.



Les données de la question 2 : DEF rectangle en D, l'hypoténuse EF mesure 9 cm et le côté DE 5 cm.

INDICE

Outil : le théorème de Pythagore. **Point délicat :** l'hypoténuse est EF. Écris l'égalité de Pythagore, puis isole DF^2 par une soustraction.

CORRIGÉ

Pythagore. Le triangle DEF est rectangle en D : son hypoténuse est $[EF]$. D'après le théorème de Pythagore, $EF^2 = DE^2 + DF^2$, soit $81 = 25 + DF^2$.

Isoler DF^2. On retranche 25 aux deux membres : $DF^2 = 81 - 25$, donc $DF^2 = 56$.

Longueur. DF est positive, donc $DF = \sqrt{56}$.

Simplifier. $56 = 4 \times 14$. D'après la propriété du produit, $DF = \sqrt{4} \times \sqrt{14}$, donc $DF = 2\sqrt{14}$ cm.

Conclusion. La longueur exacte est $DF = 2\sqrt{14}$ cm.

3.

Donner des valeurs approchées de BC et de DF, arrondies au dixième.

INDICE

Outil : la calculatrice, avec la touche « $\sqrt{}$ ».

CORRIGÉ

On utilise la calculatrice avec les valeurs exactes trouvées :

- $BC = 4\sqrt{5} \approx 8{,}9$ cm, arrondi au dixième ;
- $DF = 2\sqrt{14} \approx 7{,}5$ cm, arrondi au dixième.

Conclusion. BC mesure environ $8{,}9$ cm et DF environ $7{,}5$ cm.

Exercice 6

Une échelle contre un mur

Une échelle de 6 m est posée contre un mur vertical. Son pied est sur le sol horizontal, à 2 m du mur.

On note h la hauteur, en mètres, où l'échelle touche le mur. Fais un schéma sur ton cahier.

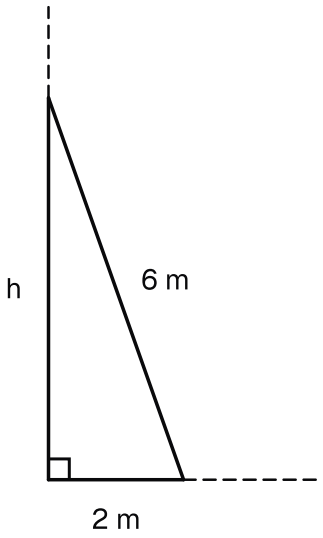


Schéma de l'échelle : 6 m entre le sol et le mur, le pied posé à 2 m du mur, et la hauteur h inconnue.

1.

Expliquer pourquoi $h^2 = 32$.

INDICE

Outil : le théorème de Pythagore. **Début :** cherche où se trouve l'angle droit, et quel segment est l'hypoténuse.

CORRIGÉ

Angle droit. Le mur est vertical et le sol horizontal : ils sont perpendiculaires. Le mur, le sol et l'échelle forment donc un triangle rectangle au pied du mur, dont l'échelle est l'hypoténuse.

Pythagore. Les côtés de l'angle droit mesurent h et 2 ; l'hypoténuse mesure 6. D'après le théorème de Pythagore, $h^2 + 2^2 = 6^2$.

On retranche 2^2 aux deux membres : $h^2 = 36 - 4 = 32$.

Conclusion. La hauteur h vérifie bien $h^2 = 32$.

2.

En déduire la valeur exacte de h, sous la forme $a\sqrt{2}$.

INDICE

Point délicat : l'équation a deux solutions, mais une hauteur est positive. **Ensuite :** simplifie la racine.

CORRIGÉ

Solution positive. Le nombre 32 est strictement positif : l'équation $h^2 = 32$ a deux solutions, $\sqrt{32}$ et $-\sqrt{32}$. Une hauteur est positive, donc $h = \sqrt{32}$.

Simplifier. $32 = 16 \times 2$. D'après la propriété du produit, $\sqrt{32} = \sqrt{16} \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.

Conclusion. La valeur exacte de la hauteur est $h = 4\sqrt{2}$ m.

3.

Donner une valeur approchée de h arrondie au centième.

INDICE

Outil : la calculatrice.

CORRIGÉ

À la calculatrice, $4\sqrt{2} \approx 5{,}6568$. Le chiffre des millièmes est 6, supérieur à 5 : on passe au centième supérieur.

Conclusion. $h \approx 5{,}66$ m, arrondi au centième.

4.

On recule le pied de l'échelle à 3 m du mur. Calculer la nouvelle hauteur exacte, puis sa valeur approchée au dixième.

INDICE

Début : reprends la même égalité avec 3 à la place de 2.

CORRIGÉ

Pythagore. Le triangle est encore rectangle au pied du mur, et l'échelle mesure toujours 6 m. D'après le théorème de Pythagore, $h^2 + 3^2 = 6^2$, donc $h^2 = 36 - 9 = 27$.

Hauteur exacte. Une hauteur est positive, donc $h = \sqrt{27}$. Comme $27 = 9 \times 3$, la propriété du produit donne $h = \sqrt{9} \times \sqrt{3}$, soit $h = 3\sqrt{3}$ m.

Valeur approchée. À la calculatrice, $3\sqrt{3} \approx 5{,}196$, donc $h \approx 5{,}2$ m, arrondi au dixième.

Conclusion. La nouvelle hauteur vaut exactement $3\sqrt{3}$ m, soit environ $5{,}2$ m.

Exercice 7

Clôturer une parcelle carrée

Un agriculteur possède une parcelle carrée de 108 m². Il veut l'entourer d'un grillage. On note c le côté de la parcelle, en mètres.

1.

Donner la valeur exacte de c, sous la forme $a\sqrt{3}$.

INDICE

Début : $c^2 = 108$ et c est positif. **Outil :** la propriété du produit. **Point délicat :** le plus grand carré parfait qui divise 108 est plus grand que 9.

CORRIGÉ

Définition. L'aire du carré donne $c^2 = 108$. Le côté c est positif, donc $c = \sqrt{108}$.

Simplifier. Le plus grand carré parfait qui divise 108 est 36 : $108 = 36 \times 3 = 6^2 \times 3$. D'après la propriété du produit, et comme 6 est positif :

$$\sqrt{108} = \sqrt{6^2} \times \sqrt{3} = 6\sqrt{3}.$$

Conclusion. Le côté mesure exactement $c = 6\sqrt{3}$ m.

2.

En déduire la longueur exacte du grillage, puis sa valeur approchée au dixième.

INDICE

Début : le périmètre d'un carré vaut quatre fois son côté.

CORRIGÉ

Valeur exacte. Le périmètre d'un carré vaut quatre fois son côté. La longueur du grillage est donc $4 \times 6\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$ m.

Valeur approchée. À la calculatrice, $24\sqrt{3} \approx 41{,}57$. Donc $24\sqrt{3} \approx 41{,}6$ m, arrondi au dixième.

Conclusion. Il faut exactement $24\sqrt{3}$ m de grillage, soit environ $41{,}6$ m.

3.

Le grillage est vendu en rouleaux de 10 m. Combien de rouleaux faut-il acheter ?

INDICE

Point délicat : il faut au moins la longueur du périmètre. Un rouleau entamé compte en entier.

CORRIGÉ

Il faut au moins $41{,}6$ m de grillage environ, et un rouleau entamé s'achète en entier.

- Quatre rouleaux donnent $4 \times 10 = 40$ m : c'est moins que $41{,}6$ m, ce n'est pas assez.
- Cinq rouleaux donnent 50 m : c'est assez.

Conclusion. Il faut acheter 5 rouleaux.