BURHAN

Les racines carrées : exercices, application

3ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/3ac/mathematiques/racines-carrees/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Les racines carrées	Application	8

Exercice 1

Des racines carrées à connaître

1.

Calculer $\sqrt{16}$, $\sqrt{144}$, $\sqrt{1}$ et $\sqrt{0{,}09}$.

INDICE

Outil : la définition de la racine carrée. **Début :** cherche un nombre positif dont le carré est 16.

CORRIGÉ

Pour chaque nombre, on cherche un nombre positif dont le carré lui est égal.

Premier nombre. $4 \geq 0$ et $4^2 = 16$, donc $\sqrt{16} = 4$.

Deuxième nombre. $12 \geq 0$ et $12^2 = 144$, donc $\sqrt{144} = 12$.

Troisième nombre. $1 \geq 0$ et $1^2 = 1$, donc $\sqrt{1} = 1$.

Dernier nombre. $0{,}3 \geq 0$ et $0{,}3^2 = 0{,}09$, donc $\sqrt{0{,}09} = 0{,}3$.

Conclusion. $\sqrt{16} = 4$, $\sqrt{144} = 12$, $\sqrt{1} = 1$ et $\sqrt{0{,}09} = 0{,}3$.

2.

Le nombre $\sqrt{-25}$ existe-t-il ? Calculer $-\sqrt{25}$.

INDICE

Point délicat : le moins placé sous le radical change tout.

CORRIGÉ

Sous le radical. D'après la règle des signes, le carré d'un nombre n'est jamais strictement négatif. Aucun nombre n'a donc pour carré -25.

Devant le radical. On a $5 \geq 0$ et $5^2 = 25$, donc $\sqrt{25} = 5$. Le signe moins porte sur ce résultat : $-\sqrt{25} = -5$.

Conclusion. Le nombre $\sqrt{-25}$ n'existe pas, et $-\sqrt{25} = -5$.

Exercice 2

Carré d'une racine, racine d'un carré

1.

Calculer $\left(\sqrt{17}\right)^2$, $\left(\sqrt{2{,}5}\right)^2$ et $\sqrt{9^2}$.

INDICE

Outil : la définition, puis la propriété de la racine carrée du carré d'un nombre positif.

CORRIGÉ

Carrés de racines. D'après la définition, le carré de la racine carrée d'un nombre positif redonne ce nombre. Comme 17 et $2{,}5$ sont positifs, $\left(\sqrt{17}\right)^2 = 17$ et $\left(\sqrt{2{,}5}\right)^2 = 2{,}5$.

Racine d'un carré. Le nombre 9 est positif. D'après la propriété de la racine carrée d'un carré, $\sqrt{9^2} = 9$.

Conclusion. $\left(\sqrt{17}\right)^2 = 17$, $\left(\sqrt{2{,}5}\right)^2 = 2{,}5$ et $\sqrt{9^2} = 9$.

2.

Calculer $\left(-\sqrt{6}\right)^2$ et $\sqrt{(-12)^2}$.

INDICE

Point délicat : le nombre -12 est négatif. Calcule d'abord $(-12)^2$.

CORRIGÉ

Premier calcul. D'après la règle des signes, un nombre et son opposé ont le même carré :

$$\left(-\sqrt{6}\right)^2 = \left(\sqrt{6}\right)^2.$$

D'après la définition, ce carré vaut 6.

Second calcul. On calcule d'abord sous le radical : $(-12)^2 = 144$. Comme $12 \geq 0$ et $12^2 = 144$:

$$\begin{aligned}\sqrt{(-12)^2} &= \sqrt{144} \\ &= 12\end{aligned}$$

Le résultat est positif : ce n'est pas -12.

Conclusion. $\left(-\sqrt{6}\right)^2 = 6$ et $\sqrt{(-12)^2} = 12$.

3.

Calculer $\left(4\sqrt{3}\right)^2$.

INDICE

Outil : la puissance d'un produit, $(ab)^2 = a^2b^2$.

CORRIGÉ

D'après la puissance d'un produit, $\left(4\sqrt{3}\right)^2 = 4^2 \times \left(\sqrt{3}\right)^2$.

D'après la définition, $\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$. Donc :

$$\left(4\sqrt{3}\right)^2 = 16 \times 3 = 48.$$

Conclusion. $\left(4\sqrt{3}\right)^2 = 48$.

Exercice 3

Trois équations, trois cas

1.

Résoudre l'équation $x^2 = 36$.

INDICE

Outil : la propriété de l'équation $x^2 = a$. **Début :** regarde le signe de 36.

CORRIGÉ

Signe. Le nombre 36 est strictement positif. D'après la propriété de l'équation $x^2 = a$, l'équation a deux solutions opposées.

Solutions. On a $6 \geq 0$ et $6^2 = 36$. Les deux solutions sont donc 6 et -6.

Vérification. $6^2 = 36$ et $(-6)^2 = 36$.

Conclusion. Les solutions de l'équation sont 6 et -6.

2.

Résoudre l'équation $x^2 = -81$.

INDICE

Point délicat : le second membre est strictement négatif.

CORRIGÉ

Le second membre -81 est strictement négatif. Or, d'après la règle des signes, le carré d'un nombre est toujours positif ou nul.

Aucun nombre x ne vérifie donc $x^2 = -81$.

Conclusion. L'équation n'a aucune solution.

3.

Résoudre l'équation $x^2 = 30$. On donnera les solutions en valeur exacte.

INDICE

Point délicat : 30 n'est pas un carré parfait. Les solutions s'écrivent avec un radical.

CORRIGÉ

Signe. Le nombre 30 est strictement positif. D'après la propriété de l'équation $x^2 = a$, l'équation a deux solutions : $\sqrt{30}$ et $-\sqrt{30}$.

Le nombre 30 n'est pas un carré parfait : on garde ces solutions sous leur forme exacte, avec un radical.

Vérification. $\left(\sqrt{30}\right)^2 = 30$ et $\left(-\sqrt{30}\right)^2 = 30$.

Conclusion. Les solutions de l'équation sont $\sqrt{30}$ et $-\sqrt{30}$.

Exercice 4

Réunir ou séparer avec la propriété du produit

1.

Calculer $\sqrt{3} \times \sqrt{48}$.

INDICE

Outil : la propriété du produit. **Début :** calcule 3×48.

CORRIGÉ

On réunit les deux radicaux grâce à la propriété du produit :

$$\begin{aligned}\sqrt{3} \times \sqrt{48} &= \sqrt{3 \times 48} \\ &= \sqrt{144}\end{aligned}$$

Or $12 \geq 0$ et $12^2 = 144$, donc $\sqrt{144} = 12$.

Conclusion. $\sqrt{3} \times \sqrt{48} = 12$.

2.

Calculer $\sqrt{0{,}4} \times \sqrt{10}$.

INDICE

Outil : la même propriété. **Ensuite :** le produit $0{,}4 \times 10$ est un carré parfait.

CORRIGÉ

D'après la propriété du produit :

$$\begin{aligned}\sqrt{0{,}4} \times \sqrt{10} &= \sqrt{0{,}4 \times 10} \\ &= \sqrt{4} = 2\end{aligned}$$

En effet, $2 \geq 0$ et $2^2 = 4$.

Conclusion. $\sqrt{0{,}4} \times \sqrt{10} = 2$.

3.

Écrire $\sqrt{35}$ comme le produit de deux racines carrées de nombres entiers différents de 1.

INDICE

Début : écris 35 comme un produit de deux entiers.

CORRIGÉ

On décompose 35 en produit de deux entiers différents de 1 : $35 = 5 \times 7$.

D'après la propriété du produit, on peut alors séparer la racine :

$$\sqrt{35} = \sqrt{5} \times \sqrt{7}.$$

Conclusion. $\sqrt{35} = \sqrt{5} \times \sqrt{7}$, où 5 et 7 sont des entiers différents de 1.

Exercice 5

Diviser des racines carrées

1.

Calculer $\dfrac{\sqrt{63}}{\sqrt{7}}$ et $\dfrac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}}$.

INDICE

Outil : la propriété du quotient. **Début :** calcule $63 \div 7$.

CORRIGÉ

Premier quotient. D'après la propriété du quotient :

$$\frac{\sqrt{63}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{63}{7}} = \sqrt{9} = 3.$$

En effet, $3 \geq 0$ et $3^2 = 9$.

Second quotient. De même :

$$\frac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{125}{5}} = \sqrt{25} = 5.$$

En effet, $5 \geq 0$ et $5^2 = 25$.

Conclusion. $\dfrac{\sqrt{63}}{\sqrt{7}} = 3$ et $\dfrac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}} = 5$.

2.

Calculer $\sqrt{\dfrac{25}{144}}$.

INDICE

Outil : la propriété du quotient, pour séparer. **Point délicat :** le numérateur et le dénominateur sont des carrés parfaits.

CORRIGÉ

D'après la propriété du quotient, on sépare le numérateur et le dénominateur :

$$\sqrt{\frac{25}{144}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{144}} = \frac{5}{12}.$$

En effet, $5^2 = 25$ et $12^2 = 144$, avec 5 et 12 positifs.

Conclusion. $\sqrt{\dfrac{25}{144}} = \dfrac{5}{12}$.

Exercice 6

Sortir un carré parfait du radical

1.

Simplifier $\sqrt{28}$, $\sqrt{45}$ et $\sqrt{98}$.

INDICE

Outil : la propriété du produit. **Début :** cherche, parmi 4, 9, 16, 25, 36 et 49, le plus grand carré parfait qui divise le nombre. **Point délicat :** pour 98, divise d'abord par 2.

CORRIGÉ

Pour chaque nombre, on fait apparaître un carré parfait en facteur, puis on applique la propriété du produit.

Premier nombre. $28 = 4 \times 7$, donc :

$$\sqrt{28} = \sqrt{4} \times \sqrt{7} = 2\sqrt{7}.$$

Deuxième nombre. $45 = 9 \times 5$, donc :

$$\sqrt{45} = \sqrt{9} \times \sqrt{5} = 3\sqrt{5}.$$

Troisième nombre. $98 = 2 \times 49 = 7^2 \times 2$. Comme 7 est positif, $\sqrt{7^2} = 7$, donc :

$$\sqrt{98} = \sqrt{7^2} \times \sqrt{2} = 7\sqrt{2}.$$

Contrôle. Les nombres 7, 5 et 2 restés sous les radicaux n'ont aucun carré parfait comme facteur, sauf 1.

Conclusion. $\sqrt{28} = 2\sqrt{7}$, $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ et $\sqrt{98} = 7\sqrt{2}$.

2.

On donne $147 = 7^2 \times 3$. Simplifier $\sqrt{147}$.

INDICE

Outil : la propriété du produit, puis la racine carrée du carré d'un nombre positif.

CORRIGÉ

Avec la donnée $147 = 7^2 \times 3$, la propriété du produit donne :

$$\sqrt{147} = \sqrt{7^2} \times \sqrt{3}.$$

Le nombre 7 est positif, donc $\sqrt{7^2} = 7$.

Conclusion. $\sqrt{147} = 7\sqrt{3}$.

Exercice 7

Chasser le radical du dénominateur

1.

Écrire $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$ sans radical au dénominateur.

INDICE

Outil : la propriété du dénominateur rendu rationnel. **Début :** multiplie le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{5}$.

CORRIGÉ

D'après la propriété du dénominateur rendu rationnel, on multiplie le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{5}$. Comme $\sqrt{5} \times \sqrt{5} = 5$:

$$\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

Le dénominateur 5 est un entier : il n'y a plus de radical au dénominateur.

Conclusion. $\dfrac{3}{\sqrt{5}} = \dfrac{3\sqrt{5}}{5}$.

2.

Écrire $\dfrac{5}{\sqrt{10}}$ et $\dfrac{12}{\sqrt{15}}$ sans radical au dénominateur, puis simplifier.

INDICE

Outil : la même propriété. **Ensuite :** après la multiplication, simplifie la fraction par un diviseur commun.

CORRIGÉ

Premier quotient. D'après la propriété du dénominateur rendu rationnel, on multiplie le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{10}$:

$$\frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{5\sqrt{10}}{10}.$$

On simplifie par 5 : $\dfrac{5}{\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

Second quotient. De même, avec $\sqrt{15}$:

$$\frac{12}{\sqrt{15}} = \frac{12\sqrt{15}}{15}.$$

On simplifie par 3 : $\dfrac{12}{\sqrt{15}} = \dfrac{4\sqrt{15}}{5}$.

Conclusion. $\dfrac{5}{\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$ et $\dfrac{12}{\sqrt{15}} = \dfrac{4\sqrt{15}}{5}$.

Exercice 8

Une plaque de cuivre carrée

Un artisan découpe une plaque de cuivre carrée. Son aire mesure 58 cm². On note c la longueur de son côté, en centimètres.

1.

Donner la valeur exacte de c.

INDICE

Outil : l'aire d'un carré vaut côté fois côté. **Point délicat :** une longueur est positive.

CORRIGÉ

L'aire d'un carré de côté c vaut $c \times c$, donc $c^2 = 58$.

Une longueur est positive. Le nombre c est donc le nombre positif dont le carré vaut 58 : d'après la définition, c'est $\sqrt{58}$.

Conclusion. La valeur exacte du côté est $c = \sqrt{58}$ cm.

2.

La calculatrice affiche $7{,}615773106$ pour $\sqrt{58}$. Donner une valeur approchée de c arrondie au dixième, puis au centième.

INDICE

Outil : l'arrondi d'un nombre décimal. **Point délicat :** l'affichage n'est pas la valeur exacte.

CORRIGÉ

On arrondit l'affichage $7{,}615773106$ de la calculatrice.

Au dixième. Le chiffre des centièmes est 1, inférieur à 5 : on garde $7{,}6$. Donc $c \approx 7{,}6$ cm, arrondi au dixième.

Au centième. On regarde ensuite le chiffre des millièmes : c'est 5, on passe donc au centième supérieur. Donc $c \approx 7{,}62$ cm, arrondi au centième.

Conclusion. Le côté mesure environ $7{,}6$ cm au dixième près, et environ $7{,}62$ cm au centième près.

3.

Contrôler la valeur arrondie au centième en calculant son carré.

INDICE

Début : calcule $7{,}62 \times 7{,}62$.

CORRIGÉ

On calcule le carré de la valeur arrondie, $7{,}62 \times 7{,}62$:

$$7{,}62^2 = 58{,}0644.$$

Ce nombre est très proche de 58, mais il ne lui est pas égal.

Conclusion. $7{,}62$ est une bonne valeur approchée de c, mais ce n'est pas sa valeur exacte $\sqrt{58}$.