BURHAN

Les racines carrées

3ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/3ac/mathematiques/racines-carrees/cours

Chapitre	Semestre
Les racines carrées	Semestre 1

Quel est le côté de ce carré ?

Sur ton cahier, un carré a une aire de 49 cm². Combien mesure son côté ?

Tu cherches un nombre qui, multiplié par lui-même, donne 49. C'est 7, car $7 \times 7 = 49$.

Un autre carré a une aire de 2 cm². Combien mesure son côté ? Cette fois, la réponse ne se devine pas.

Devine : Une prédiction

Un carré a une aire de 2 cm². Que peux-tu dire de la longueur de son côté ?

A. Exactement 1 cm, la moitié de l'aire.

Faux.

Un carré de côté 1 cm a une aire de $1 \times 1 = 1$ cm², pas 2 cm².

B. Exactement 4 cm, le double de l'aire.

Faux.

Un carré de côté 4 cm a une aire de $4 \times 4 = 16$ cm².

C. Un nombre dont le carré vaut exactement 2.

Juste.

Juste : le côté multiplié par lui-même doit donner l'aire.

D. Exactement $1{,}5$ cm, à vue d'œil.

Faux.

Un carré de côté $1{,}5$ cm a une aire de $1{,}5 \times 1{,}5 = 2{,}25$ cm².

Correction

Le côté c vérifie $c \times c = 2$. Essaie deux valeurs :

$$1{,}4 \times 1{,}4 = 1{,}96$$
$$1{,}5 \times 1{,}5 = 2{,}25$$

Aucune ne tombe juste. Ce nombre existe pourtant : c'est la longueur du côté. Tu vas apprendre à lui donner un nom et à calculer avec lui.

Ce nombre s'appelle une racine carrée. Dans ce chapitre, tu apprends à calculer des racines carrées. Tu résous des équations comme $x^2 = 25$.

Tu simplifies des écritures et tu calcules des longueurs exactes. Tu utilises aussi la calculatrice pour obtenir des valeurs approchées.

La racine carrée d'un nombre positif

Le nombre dont on connaît le carré

Rappel de 2e année : le carré d'un nombre x est $x^2 = x \times x$. Par la règle des signes, $(-3)^2 = 9$, comme $3^2 = 9$. Un carré n'est donc jamais strictement négatif.

Devine : Le carré vaut 36

Quels nombres ont pour carré 36 ?

A. Le nombre 6 seulement.

Faux.

$6^2 = 36$, c'est vrai. Mais un autre nombre a aussi pour carré 36.

B. Les nombres 6 et -6.

Juste.

Juste : $6^2 = 36$ et $(-6)^2 = 36$, par la règle des signes.

C. Le nombre -6 seulement.

Faux.

$(-6)^2 = 36$, c'est vrai. Mais $6^2 = 36$ aussi.

D. Le nombre 18, moitié de 36.

Faux.

$18^2 = 324$. Le carré d'un nombre n'est pas son double.

Correction

$6^2 = 36$ et $(-6)^2 = 36$. Deux nombres ont donc pour carré 36.

Un seul est positif : 6. C'est lui qu'on choisit pour définir la racine carrée.

Définition : Racine carrée d'un nombre positif

Soit a un nombre positif, c'est-à-dire supérieur ou égal à 0. La **racine carrée** de a est le nombre **positif** dont le carré est égal à a. On la note $\sqrt{a}$; le symbole « $\sqrt{}$ » s'appelle le **radical**.

Ainsi, pour tout nombre positif a : $\sqrt{a} \geq 0$ et $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.

Un nombre strictement négatif n'a pas de racine carrée : le carré d'un nombre n'est jamais strictement négatif.

Exemple : des carrés parfaits, puis un décimal

En clair. $\sqrt{a}$ répond à la question : quel nombre positif a pour carré a ? Le nombre écrit sous le radical est a, celui dont tu cherches la racine.

Un **carré parfait** est le carré d'un nombre entier : 0, 1, 4, 9, 16, 25, … , 144. Sa racine carrée est un entier.

- $\sqrt{36} = 6$, car 6 est positif et $6^2 = 36$.
- $\sqrt{64} = 8$, car 8 est positif et $8^2 = 64$.
- $\sqrt{81} = 9$ et $\sqrt{0} = 0$, d'après la définition de la racine carrée.
- Avec un nombre décimal : $\sqrt{0{,}16} = 0{,}4$, car $0{,}4$ est positif et $0{,}4^2 = 0{,}16$.

Calculer une racine carrée

Vérifie : Un carré parfait

Que vaut $\sqrt{100}$?

A. 10

Juste.
Juste : 10 est positif et $10^2 = 100$.

B. 50

Faux.
$50^2 = 2\,500$. Tu as pris la moitié de 100.

C. -10

Faux.
$(-10)^2 = 100$, mais une racine carrée est positive.

D. 10 et -10

Faux.
Ce sont les deux nombres dont le carré vaut 100. La racine carrée n'en désigne qu'un.

Correction
D'après la définition, $\sqrt{100}$ est le nombre positif dont le carré est 100.

Or $10 \geq 0$ et $10^2 = 100$. Donc :

$$\sqrt{100} = 10$$

Attention : un signe moins sous le radical

✗ « $\sqrt{-9} = -3$. »

✓ Le nombre $\sqrt{-9}$ n'existe pas : aucun nombre n'a pour carré -9.

En revanche, $-\sqrt{9}$ existe : c'est l'opposé de $\sqrt{9}$, donc $-\sqrt{9} = -3$. Regarde où se trouve le signe moins : sous le radical, ou devant lui.

Méthode : calculer une racine carrée par la définition

1. **Cherche** un nombre positif dont le carré est le nombre sous le radical. Connais les carrés parfaits jusqu'à 144.
2. **Vérifie** les deux conditions de la définition : ce nombre est positif, et son carré est le bon.
3. **Conclus** par une phrase : « Donc $\sqrt{64} = 8$. »
4. **Utilise** directement la définition quand c'est possible : pour tout nombre positif a, $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$. Par exemple, $\left(\sqrt{7}\right)^2 = 7$.

La racine carrée d'un carré

En clair. Pars de 7 : son carré est 49, et $\sqrt{49} = 7$. Pars de 10 : son carré est 100, et $\sqrt{100} = 10$. Tu retrouves chaque fois le nombre positif de départ.

Pourquoi est-ce vrai ? On vérifie les deux conditions de la définition. Ce que l'énoncé suppose s'appelle une **hypothèse** : ici, a est positif.

Propriété : Racine carrée du carré d'un nombre positif

Pour tout nombre positif a :

$$\sqrt{a^2} = a.$$

Avec la définition, on retient donc deux égalités, valables pour tout nombre positif a : $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ et $\sqrt{a^2} = a$.

Démonstration

Étape 1. Le nombre a^2 est positif, car c'est un carré. Il a donc une racine carrée.

Étape 2. Le nombre a est positif, par hypothèse, et son carré est a^2.

Étape 3. D'après la définition de la racine carrée, a est donc la racine carrée de a^2 : $\sqrt{a^2} = a$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Pour montrer qu'un nombre est la racine carrée de b, on vérifie **deux conditions**. Il est positif, et son carré est b.

Ici, a est positif par hypothèse, et son carré est a^2. La définition conclut. Ce geste revient dans tout le chapitre.

Vérifie : Une condition de la preuve

On prend $a = -7$, qui est négatif. Alors $a^2 = 49$. Pourquoi n'a-t-on pas $\sqrt{a^2} = a$?

A. Parce que $(-7)^2 = -49$.
Faux.
Non : par la règle des signes, $(-7)^2 = 49$.

B. Parce que $\sqrt{49}$ n'existe pas.
Faux.
49 est positif : $\sqrt{49}$ existe, et vaut 7.

C. Parce que 49 n'est pas un carré parfait.
Faux.
Si : $49 = 7^2$.

D. Parce que $\sqrt{49} = 7$, et -7 n'est pas positif.
Juste.
Juste : une racine carrée est toujours positive.

Correction
Le nombre -7 a bien pour carré 49. Mais $\sqrt{49} = 7$, car une racine carrée est positive.

Donc $\sqrt{(-7)^2} = 7$, et non -7. C'est pourquoi la preuve demande a positif : c'est son hypothèse.

Exemple : les deux égalités, et une condition nécessaire

- D'après la **propriété de la racine carrée d'un carré**, $\sqrt{15^2} = 15$ et $\sqrt{2{,}5^2} = 2{,}5$.
- D'après la définition, $\left(\sqrt{11}\right)^2 = 11$.
- **La condition compte.** Avec -3, qui est négatif : $(-3)^2 = 9$ et $\sqrt{9} = 3$. Le résultat n'est pas -3.

Un piège, puis à toi

Attention : le carré d'un nombre négatif sous le radical

✗ « $\sqrt{(-5)^2} = -5$. »

✓ On calcule d'abord sous le radical : $(-5)^2 = 25$. Donc :

$$\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$$

Une racine carrée n'est jamais strictement négative. L'égalité $\sqrt{a^2} = a$ exige un nombre a positif.

À toi : Quatre calculs

Calcule $\sqrt{81}$, $\left(\sqrt{6}\right)^2$, $\sqrt{(-4)^2}$ et $-\sqrt{64}$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Pour chaque écriture, cherche un nombre positif dont le carré convient, ou utilise la définition.

Indice 2

Pour $\sqrt{(-4)^2}$, calcule d'abord le carré sous le radical.

Indice 3

Point délicat : dans $-\sqrt{64}$, le signe moins est devant le radical, pas dessous.

Réponse

$\sqrt{81} = 9$, car 9 est positif et $9^2 = 81$.

D'après la définition, $\left(\sqrt{6}\right)^2 = 6$.

Sous le radical, $(-4)^2 = 16$. Donc :

$$\sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = 4$$

Enfin, $-\sqrt{64}$ est l'opposé de $\sqrt{64} = 8$: $-\sqrt{64} = -8$.

L'équation x² = a

Combien de nombres ont ce carré ?

Devine : Trois carrés donnés

Combien de nombres ont pour carré 25 ? Pour carré -4 ? Pour carré 0 ?

A. Un, puis un, puis un.

Faux.

$5^2 = 25$, mais $(-5)^2 = 25$ aussi.

B. Deux, puis deux, puis aucun.

Faux.

Aucun carré n'est strictement négatif : -4 n'est le carré d'aucun nombre.

C. Deux, puis aucun, puis un seul.

Juste.

Juste : 5 et -5 ; aucun nombre ; seulement 0.

D. Deux, puis un, puis aucun.

Faux.

$0^2 = 0$: le nombre 0 a pour carré 0.

Correction

- $5^2 = 25$ et $(-5)^2 = 25$: deux nombres ont pour carré 25.
- Un carré n'est jamais strictement négatif : aucun nombre n'a pour carré -4.

- Seul 0 a pour carré 0.

Le nombre de solutions dépend du signe du nombre donné.

En clair. L'équation $x^2 = a$ demande les nombres dont le carré est a. Tout dépend du signe de a.

Pourquoi est-ce vrai ? On sépare deux cas : x positif, puis x négatif.

La propriété de l'équation x² = a

Propriété : Équation x² = a

Soit a un nombre.

- Si $a > 0$, l'équation $x^2 = a$ a **deux solutions** : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.
- Si $a = 0$, elle a **une seule solution** : 0.
- Si $a < 0$, elle n'a **aucune solution**.

Démonstration

Étape 1. Cas $a < 0$. Un carré n'est jamais strictement négatif (règle des signes). Aucun nombre x ne vérifie donc $x^2 = a$.

Étape 2. Cas $a \geq 0$. D'après la définition, $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$. Par la règle des signes, $\left(-\sqrt{a}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 = a$. Les nombres $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$ sont donc solutions.

Étape 3. Il n'y en a pas d'autre. Soit x une solution. Si $x \geq 0$, x est un nombre positif dont le carré est a : d'après la définition, $x = \sqrt{a}$. Si $x < 0$, alors $-x > 0$ et $(-x)^2 = x^2 = a$: donc $-x = \sqrt{a}$, c'est-à-dire $x = -\sqrt{a}$.

Étape 4. Si $a > 0$, alors $\sqrt{a} \neq 0$, sinon $a = \left(\sqrt{a}\right)^2 = 0^2 = 0$. Donc $\sqrt{a}$ est strictement positif et $-\sqrt{a}$ est strictement négatif : les deux solutions sont différentes, il y en a deux. Si $a = 0$, alors $\sqrt{0} = 0$ et $-\sqrt{0} = 0$: les deux solutions sont égales, il n'y en a qu'une.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve **sépare deux cas** selon le signe de la solution x. Si x est positif, la définition donne $x = \sqrt{a}$. Si x est négatif, on regarde son opposé $-x$, qui est positif.

Ainsi, on ne perd aucune solution.

Vérifie : Le cas d'une solution négative

Le nombre -5 est une solution de $x^2 = 25$. Quel lien y a-t-il entre -5 et $\sqrt{25}$?

A. -5 est égal à $\sqrt{25}$.

Faux.

Non : $\sqrt{25} = 5$, car une racine carrée est positive.

B. -5 est l'opposé de $\sqrt{25}$.

Juste.

Juste : $\sqrt{25} = 5$, et -5 est son opposé.

C. -5 est le carré de $\sqrt{25}$.

Faux.

D'après la définition, le carré de $\sqrt{25}$ est 25.

D. Aucun : -5 n'est pas une solution.

Faux.

Si : $(-5)^2 = 25$, par la règle des signes.

Correction

Le nombre -5 est négatif. Son opposé, 5, est positif, et $5^2 = (-5)^2 = 25$. D'après la définition, $5 = \sqrt{25}$.

Donc $-5 = -\sqrt{25}$. C'est le second cas de la preuve : une solution négative est l'opposé de $\sqrt{a}$.

Exemple : les trois cas

- $x^2 = 25$. Comme $25 > 0$, d'après la **propriété de l'équation** $x^2 = a$, il y a deux solutions : $\sqrt{25} = 5$ et -5. Vérification : $5^2 = 25$ et $(-5)^2 = 25$.
- $x^2 = 0$ a une seule solution : 0.
- $x^2 = -4$ n'a aucune solution, car $-4 < 0$.

Le signe compte : regarde le signe du nombre donné avant de conclure.

Résoudre une équation x² = a

Méthode : résoudre une équation x² = a

1. **Isole** x^2 dans un membre, comme dans une équation du premier degré.
2. **Regarde le signe** du nombre a obtenu dans l'autre membre.
3. **Conclus** avec la propriété de l'équation $x^2 = a$. Si $a > 0$: deux solutions, $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$. Si $a = 0$: une seule solution, 0. Si $a < 0$: aucune solution.
4. **Vérifie** chaque solution dans l'équation de départ.
5. **Rédige** la conclusion par une phrase.

Exemple : isoler x², puis résoudre

Résolvons $3x^2 = 48$.

- On divise les deux membres par 3 (rappel de 1re année : c'est permis, car $3 \neq 0$). On obtient $x^2 = 16$.
- Comme $16 > 0$, l'équation a deux solutions : $\sqrt{16} = 4$ et -4.
- Vérification : $3 \times 4^2 = 48$ et $3 \times (-4)^2 = 48$.

Les solutions de l'équation sont 4 et -4. Avec $3x^2 + 2 = 50$, on retirerait d'abord 2 aux deux membres : on retrouverait $3x^2 = 48$.

Vérifie : Une équation à regarder de près

Combien de solutions a l'équation $x^2 + 16 = 0$?

A. Deux : 4 et -4.

Faux.
$4^2 + 16 = 32$, pas 0.

B. Une seule : -4.

Faux.
$(-4)^2 + 16 = 32$: ce n'est pas une solution.

C. Une seule : 0.

Faux.
$0^2 + 16 = 16$, pas 0.

D. Aucune solution.

Juste.
Juste : $x^2 = -16$, et $-16 < 0$.

Correction

On isole x^2 en retirant 16 aux deux membres : $x^2 = -16$.

Comme $-16 < 0$, d'après la propriété de l'équation $x^2 = a$, il n'y a aucune solution.

Conclusion. L'équation $x^2 + 16 = 0$ n'a aucune solution.

Attention : une équation, deux solutions

✗ « $x^2 = 49$, donc $x = 7$. »

✓ L'équation $x^2 = 49$ a **deux** solutions : 7 et -7, car $(-7)^2 = 49$.

Ne confonds pas avec $\sqrt{49}$, qui est un seul nombre : $\sqrt{49} = 7$. Les solutions de l'équation sont 7 et -7.

À toi, puis le coin examen

À toi : Deux équations

Résous les équations $x^2 - 64 = 0$ et $7x^2 + 14 = 0$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Commence par isoler x^2 dans chaque équation.
Indice 2
Écris chaque étape : retire ou ajoute le même nombre aux deux membres, puis divise par le nombre placé devant x^2.
Indice 3
Point délicat : regarde le signe du nombre obtenu avant de chercher des racines carrées.

Réponse
Première équation. On ajoute 64 aux deux membres : $x^2 = 64$. Comme $64 > 0$, il y a deux solutions : $\sqrt{64} = 8$ et -8.

Vérification : $8^2 - 64 = 0$ et $(-8)^2 - 64 = 0$. Les solutions de l'équation sont 8 et -8.

Seconde équation. On retire 14 aux deux membres, puis on divise par 7 :

$$7x^2 = -14$$
$$x^2 = -2$$

Comme $-2 < 0$, l'équation $7x^2 + 14 = 0$ n'a aucune solution.

Remarque : Coin examen : rédiger une résolution

En devoir, chaque étape est justifiée, et la conclusion est une phrase. Voici une rédaction de $2x^2 - 18 = 0$.

« $2x^2 = 18$, donc $x^2 = 9$. Comme $9 > 0$, d'après la propriété de l'équation $x^2 = a$, l'équation a deux solutions : $\sqrt{9} = 3$ et -3. »

« Vérification : $2 \times 3^2 - 18 = 0$ et $2 \times (-3)^2 - 18 = 0$. Les solutions de l'équation sont 3 et -3. »

Valeurs approchées d'une racine carrée à la calculatrice

La touche √ de la calculatrice

Reviens au carré d'aire 2 cm². Son côté mesure $\sqrt{2}$ cm. Sur la calculatrice, la touche « $\sqrt{}$ » donne $1{,}414213562$.

Ce nombre décimal n'est pas exactement $\sqrt{2}$: son carré n'est pas égal à 2. L'écran montre une **valeur approchée** : un nombre très proche, mais pas égal. La valeur exacte, elle, s'écrit $\sqrt{2}$.

Vérifie : Arrondir un affichage

Pour $\sqrt{5}$, la calculatrice affiche $2{,}236067977$. Quelle est la valeur approchée de $\sqrt{5}$ arrondie au dixième ?

A. $2{,}2$

Juste.
Juste : le chiffre des centièmes est 3, plus petit que 5.

B. $2{,}3$

Faux.
Le chiffre des centièmes est 3, plus petit que 5 : on garde 2 dixièmes.

C. $2{,}24$

Faux.
C'est l'arrondi au centième, pas au dixième.

D. $2{,}236$

Faux.
C'est l'arrondi au millième, pas au dixième.

Correction
Au dixième, on garde un chiffre après la virgule. Le chiffre suivant, celui des centièmes, est 3 : il est plus petit que 5, on n'augmente pas. Donc $\sqrt{5} \approx 2{,}2$ (à la calculatrice, arrondi au dixième).

Une méthode et un piège

Méthode : obtenir une valeur approchée à la calculatrice

1. **Tape** la touche « $\sqrt{}$ », puis le nombre. Si une expression est sous le radical, mets-la entre parenthèses.
2. **Lis** l'affichage : c'est en général une valeur approchée.
3. **Arrondis** à la précision demandée. Écris le signe $\approx$, puis la précision.
4. **Contrôle** : calcule le carré de ta valeur. Il doit être proche du nombre de départ. L'écart diminue quand ta valeur a davantage de décimales.

Exemple : arrondir au dixième, puis au centième

La calculatrice affiche $2{,}645751311$ pour $\sqrt{7}$.

- Au dixième : le chiffre des centièmes est 4, plus petit que 5. Donc $\sqrt{7} \approx 2{,}6$ (à la calculatrice, arrondi au dixième).
- Au centième : on regarde ensuite les millièmes. Leur chiffre est 5, donc on augmente le chiffre des centièmes : $\sqrt{7} \approx 2{,}65$ (à la calculatrice, arrondi au centième).
- Contrôle : $2{,}65^2 = 7{,}0225$, proche de 7.

Attention : l'écran ne donne pas la valeur exacte

✗ « $\sqrt{3} = 1{,}732050808$. »

✓ L'écran affiche une valeur approchée de $\sqrt{3}$. On écrit $\sqrt{3} \approx 1{,}73$ (arrondi au centième).

Dans un calcul exact, on garde $\sqrt{3}$. En effet, $\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$ exactement, alors que $1{,}73^2 = 2{,}9929$.

Contrôler, puis à toi

Vérifie : Un arrondi à contrôler

Un camarade écrit : « $\sqrt{6}$ vaut environ $2{,}6$, arrondi au dixième ». Que penses-tu de sa réponse ?

A. Elle est juste : $2{,}6$ convient.

Faux.
Contrôle : $2{,}6^2 = 6{,}76$, trop loin de 6.

B. Elle est fausse : c'est $2{,}4$.

Juste.
Juste : l'écran affiche $2{,}449489743$.

C. Elle est fausse : c'est 3, moitié de 6.

Faux.
$3^2 = 9$. La racine carrée n'est pas la moitié.

D. Elle est juste : l'écran affiche $2{,}6$.

Faux.
L'écran affiche $2{,}449489743$ pour $\sqrt{6}$, pas $2{,}6$.

Correction

Contrôle par le carré : $2{,}6^2 = 6{,}76$, trop loin de 6. La réponse du camarade est donc fausse.

La calculatrice affiche $2{,}449489743$ pour $\sqrt{6}$. Le chiffre des centièmes est 4. Donc $\sqrt{6} \approx 2{,}4$ (à la calculatrice, arrondi au dixième).

Contrôle : $2{,}4^2 = 5{,}76$, plus proche de 6.

À toi : Une valeur approchée

Donne une valeur approchée de $\sqrt{11}$ arrondie au centième, puis contrôle-la par le carré. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Utilise la touche « $\sqrt{}$ » de ta calculatrice.
Indice 2
Garde deux chiffres après la virgule, puis regarde le chiffre des millièmes.
Indice 3
Point délicat : écris $\approx$, jamais $=$, et dis la précision.

Réponse
La calculatrice affiche $3{,}31662479$. Le chiffre des millièmes est 6 : on augmente le chiffre des centièmes. Donc $\sqrt{11} \approx 3{,}32$ (à la calculatrice, arrondi au centième).

Contrôle : $3{,}32^2 = 11{,}0224$, proche de 11.

Produit et quotient de deux racines carrées

Un produit de racines carrées

Devine : Deux calculs

Calcule $\sqrt{4} \times \sqrt{9}$, puis $\sqrt{4 \times 9}$. Qu'obtiens-tu ?

A. 6, puis 18.
Faux.
$4 \times 9 = 36$, et $\sqrt{36} = 6$: la racine carrée n'est pas la moitié.

B. 36, puis 6.
Faux.
$\sqrt{4} \times \sqrt{9} = 2 \times 3 = 6$, pas 36.

C. 6, puis 6.
Juste.
Juste : les deux calculs donnent le même nombre.

D. 5, puis 6.
Faux.
$\sqrt{4} \times \sqrt{9} = 2 \times 3$: c'est un produit, pas une somme.

Correction
On calcule les deux nombres :

$$\sqrt{4} \times \sqrt{9} = 2 \times 3 = 6$$
$$\sqrt{4 \times 9} = \sqrt{36} = 6$$

Les deux résultats sont égaux.

En clair. Le quotient se comporte de la même façon :

$$\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{25}} = \frac{10}{5} = 2$$
$$\sqrt{\frac{100}{25}} = \sqrt{4} = 2$$

Ce n'est pas un hasard.

Pourquoi est-ce vrai ? On vérifie que $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ remplit les deux conditions de la définition.

La propriété du produit et du quotient

Propriété : Produit et quotient de deux racines carrées

Soit a et b deux nombres positifs.

- **Produit** : $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.
- **Quotient** : si de plus $b \neq 0$, alors $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Démonstration

Étape 1. Le nombre $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ est positif : c'est le produit de deux nombres positifs.

Étape 2. Par la puissance d'un produit, puis par la définition, son carré est $\left(\sqrt{a} \times \sqrt{b}\right)^2 = (\sqrt{a})^2 \times \left(\sqrt{b}\right)^2 = a \times b$.

Étape 3. D'après la définition, $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ est donc la racine carrée de $a \times b$.

Étape 4. Quotient. Comme $b \neq 0$, on a $\sqrt{b} \neq 0$ (sinon $b = 0^2 = 0$). Le nombre $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ est positif, comme quotient d'un nombre positif par un nombre strictement positif, et, par la puissance d'un quotient, son carré est $\frac{(\sqrt{a})^2}{\left(\sqrt{b}\right)^2} = \frac{a}{b}$. D'après la définition, il est égal à $\sqrt{\frac{a}{b}}$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On retrouve le geste de la définition. On montre qu'un nombre est **positif**, puis que **son carré** est le bon.

Pour le carré, on utilise la puissance d'un produit, vue en 2e année :

$$\left(\sqrt{a} \times \sqrt{b}\right)^2$$
$$= (\sqrt{a})^2 \times \left(\sqrt{b}\right)^2$$

Pour le quotient, on vérifie en plus que $\sqrt{b}$ n'est pas nul.

Vérifie : Une condition à ne pas oublier

On a $(-8)^2 = 64$, mais $\sqrt{64} = 8$. Pour dire qu'un nombre est la racine carrée de 64, que faut-il vérifier en plus de son carré ?

A. Qu'il est positif.

Juste.
Juste : d'après la définition, une racine carrée est positive.

B. Qu'il est entier.

Faux.
$\sqrt{2}$ n'est pas un entier, et c'est pourtant une racine carrée.

C. Qu'il est pair.

Faux.
$\sqrt{81} = 9$, et 9 est impair.

D. Rien : le carré suffit.

Faux.
-8 a pour carré 64, mais ce n'est pas $\sqrt{64}$.

Correction
Avoir le bon carré ne suffit pas : -8 a pour carré 64, mais $\sqrt{64} = 8$.

D'après la définition, une racine carrée est aussi **positive**. C'est pourquoi la preuve vérifie d'abord que $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ est positif, puis calcule son carré.

Exemple : les conditions comptent

- D'après la propriété du produit, $\sqrt{4 \times 7} = \sqrt{4} \times \sqrt{7} = 2\sqrt{7}$.
- **Des nombres positifs.** On a $(-4) \times (-9) = 36$, et $\sqrt{36} = 6$. Pourtant, $\sqrt{-4}$ et $\sqrt{-9}$ n'existent pas : la propriété ne s'applique pas.
- **Un dénominateur non nul.** Le quotient $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{0}}$ n'a pas de sens, car $\sqrt{0} = 0$.

Calculer avec le produit et le quotient

Exemple : réunir sous un même radical

D'après la propriété du produit :

$$\begin{aligned}\sqrt{2} \times \sqrt{8} &= \sqrt{2 \times 8} \\ &= \sqrt{16} = 4\end{aligned}$$

D'après la propriété du quotient :

$$\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{50}{2}}$$
$$= \sqrt{25} = 5$$

Réunir sous un même radical est utile quand on obtient un carré parfait.

Exemple : séparer un quotient

D'après la propriété du quotient :

$$\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}$$

Contrôle : $\frac{3}{5}$ est positif, et $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$.

Vérifie : Un produit

Que vaut $\sqrt{3} \times \sqrt{12}$?

A. 36

Faux.

$3 \times 12 = 36$, mais il reste à prendre la racine carrée : $\sqrt{36} = 6$.

B. $\sqrt{15}$

Faux.

La propriété du produit multiplie les nombres sous le radical : 3×12, pas $3 + 12$.

C. $3\sqrt{12}$

Faux.

$\sqrt{3}$ n'est pas égal à 3.

D. 6

Juste.

Juste : $\sqrt{3 \times 12} = \sqrt{36} = 6$.

Correction

D'après la propriété du produit :

$$\sqrt{3} \times \sqrt{12} = \sqrt{3 \times 12}$$
$$= \sqrt{36} = 6$$

Vérifie : Un quotient

Que vaut $\sqrt{\frac{49}{4}}$?

A. $\frac{7}{4}$

Faux.

Le dénominateur aussi passe à la racine carrée : $\sqrt{4} = 2$.

B. $\frac{7}{2}$

Juste.

Juste : $\sqrt{49} = 7$ et $\sqrt{4} = 2$.

C. $\frac{49}{2}$

Faux.

Le numérateur aussi passe à la racine carrée : $\sqrt{49} = 7$.

Correction

D'après la propriété du quotient :

$$\sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{4}} = \frac{7}{2}$$

Et pour une somme ?

Devine : Une somme

Calcule $\sqrt{36} + \sqrt{64}$, puis $\sqrt{36 + 64}$. Les deux résultats sont-ils égaux ?

A. Oui, ils valent tous deux 14.

Faux.

$\sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$.

B. Oui, ils valent tous deux 10.

Faux.

$\sqrt{36} + \sqrt{64} = 6 + 8 = 14$.

C. Non : 14 d'un côté, 10 de l'autre.

Juste.

Juste : $6 + 8 = 14$, et $\sqrt{100} = 10$.

D. Oui, car 36 et 64 sont des carrés parfaits.

Faux.

Cela ne crée aucune règle pour la somme : on trouve 14 et 10.

Correction

On calcule les deux nombres :

$$\sqrt{36} + \sqrt{64} = 6 + 8 = 14$$
$$\sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$$

Les deux résultats sont différents : il n'existe pas de propriété de la somme.

Attention : la racine carrée d'une somme

✗ « $\sqrt{9+16} = \sqrt{9} + \sqrt{16} = 7$. »

✓ On calcule d'abord sous le radical :

$$\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

En général, $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Seuls le produit et le quotient se séparent. Il n'y a pas de règle pour une somme, ni pour une différence.

À toi, puis le coin examen

À toi : Trois calculs

Calcule $\sqrt{5} \times \sqrt{20}$, $\dfrac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$ et $\sqrt{\dfrac{16}{81}}$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Pour les deux premiers calculs, réunis sous un même radical.
Indice 2
Tu obtiens un seul radical, dont le nombre est un carré parfait que tu connais.
Indice 3
Point délicat : pour le troisième, sépare le numérateur et le dénominateur avec la propriété du quotient.

Réponse
D'après la propriété du produit :

$$\sqrt{5} \times \sqrt{20} = \sqrt{100} = 10$$

D'après la propriété du quotient :

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}} &= \sqrt{\frac{72}{2}} \\ &= \sqrt{36} = 6 \end{aligned}$$

La propriété du quotient donne aussi :

$$\sqrt{\frac{16}{81}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{81}} = \frac{4}{9}$$

Remarque : Coin examen : nommer la propriété

En devoir, chaque égalité est justifiée par une règle nommée. Par exemple :

« D'après la propriété du produit, $\sqrt{2} \times \sqrt{18} = \sqrt{2 \times 18} = \sqrt{36}$. D'après la définition de la racine carrée, $\sqrt{36} = 6$, car 6 est positif et $6^2 = 36$. »

Une règle par étape : ton calcul se suit sans effort.

Simplifier une racine carrée et calculer

Un carré parfait caché

En clair. Le nombre 12 n'est pas un carré parfait. Mais il cache un carré parfait : $12 = 4 \times 3$. D'après la propriété du produit :

$$\sqrt{12} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

L'écriture $2\sqrt{3}$ est plus simple : le nombre sous le radical est plus petit.

Devine : À ton tour de le trouver

Écris $\sqrt{8}$ sous la forme $a\sqrt{2}$, avec a entier.

A. $4\sqrt{2}$

Faux.
$8 = 4 \times 2$, mais il faut prendre la racine carrée de 4 : $\sqrt{4} = 2$.

B. $3\sqrt{2}$

Faux.
$3\sqrt{2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = \sqrt{18}$, pas $\sqrt{8}$.

C. $2\sqrt{2}$

Juste.
Juste : $8 = 4 \times 2$ et $\sqrt{4} = 2$.

Correction
$8 = 4 \times 2$, et 4 est un carré parfait. D'après la propriété du produit :

$$\sqrt{8} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

Simplifier une racine carrée

Méthode : simplifier une racine carrée

1. **Décompose** le nombre sous le radical en un produit : un carré parfait, le plus grand possible, fois un entier. Par exemple, $72 = 36 \times 2$.
2. **Sépare** avec la propriété du produit : $\sqrt{72} = \sqrt{36} \times \sqrt{2}$.
3. **Remplace** la racine carrée du carré parfait : $\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$.
4. **Vérifie** qu'il ne reste sous le radical aucun carré parfait autre que 1. Avec $72 = 4 \times 18$, tu obtiendrais $2\sqrt{18}$: il faudrait encore simplifier $\sqrt{18}$.

Exemple : simplifier deux racines carrées

- $50 = 25 \times 2$. D'après la propriété du produit, $\sqrt{50} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$.
- $75 = 25 \times 3$. De même, $\sqrt{75} = \sqrt{25} \times \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$.

Sous le radical, il reste 2 et 3 : aucun carré parfait autre que 1 ne les divise.

Vérifie : Le plus grand carré parfait

Quel est le plus grand carré parfait qui divise 90 ?

A. 4

Faux.
$90 \div 4 = 22{,}5$: 4 ne divise pas 90.

B. 25

Faux.
$90 \div 25 = 3{,}6$: 25 ne divise pas 90.

C. 36

Faux.
$90 \div 36 = 2{,}5$: 36 ne divise pas 90.

D. 9

Juste.
Juste : $90 = 9 \times 10$.

Correction
$90 = 9 \times 10$, et aucun carré parfait autre que 1 ne divise 10. D'après la propriété du produit :

$$\sqrt{90} = \sqrt{9} \times \sqrt{10} = 3\sqrt{10}$$

Réduire une somme

Rappel de 1re année : la distributivité permet de factoriser. Pour tous les nombres a, b et k :

$$a \times k + b \times k = (a + b) \times k$$

Ainsi, $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = (3 + 5)\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$.

Méthode : calculer avec des racines carrées

1. **Simplifie** d'abord chaque racine carrée.
2. **Pour un produit ou un quotient**, utilise la propriété du produit ou celle du quotient. Réunis sous un même radical si tu obtiens un carré parfait. Sépare si les nombres sont des carrés parfaits.

3. **Dans un produit**, multiplie entre eux les **coefficients**, c'est-à-dire les nombres placés devant les radicaux.
4. **Pour une somme ou une différence**, réunis seulement les termes qui ont la même racine carrée. Mets cette racine carrée en facteur.
5. **Laisse** une somme comme $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ telle quelle : elle ne se réduit pas.

Exemple : réduire une somme

Par la distributivité :

$$\begin{aligned} &2\sqrt{3}+5\sqrt{3}-\sqrt{3} \\ &=(2+5-1)\sqrt{3} \\ &=6\sqrt{3} \end{aligned}$$

Le terme $-\sqrt{3}$ compte pour $-1\times\sqrt{3}$.

Exemple : simplifier, puis réduire

Calculons $\sqrt{8}+\sqrt{18}$. D'après la propriété du produit, $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ et $\sqrt{18}=\sqrt{9}\times\sqrt{2}=3\sqrt{2}$. Par la distributivité :

$$\begin{aligned} \sqrt{8}+\sqrt{18} &= 2\sqrt{2}+3\sqrt{2} \\ &= 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

De même, $\sqrt{12}+\sqrt{75}=2\sqrt{3}+5\sqrt{3}=7\sqrt{3}$.

Attention : additionner des termes semblables

✗ « $3\sqrt{2}+5\sqrt{2}=8\sqrt{4}$. »

✓ On additionne les coefficients, et la racine carrée ne change pas : $3\sqrt{2}+5\sqrt{2}=8\sqrt{2}$. C'est la distributivité, comme 3 cahiers et 5 cahiers font 8 cahiers.

D'ailleurs, $8\sqrt{4}=16$: ce n'est pas la même valeur.

Des produits, puis à toi

Exemple : des produits avec des racines carrées

D'après la propriété du produit :

$$\begin{aligned} & 3\sqrt{2} \times 4\sqrt{5} \\ &= (3 \times 4) \times \sqrt{2 \times 5} \\ &= 12\sqrt{10} \end{aligned}$$

Par la puissance d'un produit, puis la définition :

$$\begin{aligned} \left(2\sqrt{3}\right)^2 &= 2^2 \times \left(\sqrt{3}\right)^2 \\ &= 4 \times 3 = 12 \end{aligned}$$

D'après la propriété du produit, puis avec $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{3} \times \sqrt{6} &= 2\sqrt{18} \\ &= 2 \times 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2} \end{aligned}$$

Vérifie : Un carré

Que vaut $\left(3\sqrt{2}\right)^2$?

A. 6

Faux.
Il faut élever chaque facteur au carré : $3^2 \times \left(\sqrt{2}\right)^2$.

B. 18

Juste.
Juste : $9 \times 2 = 18$.

C. $9\sqrt{2}$

Faux.
$\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$: le radical disparaît.

D. 36

Faux.
$\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$, pas 4.

Correction
Par la puissance d'un produit, puis par la définition, qui donne $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$:

$$\begin{aligned} \left(3\sqrt{2}\right)^2 &= 3^2 \times \left(\sqrt{2}\right)^2 \\ &= 9 \times 2 = 18 \end{aligned}$$

À toi : Simplifier, puis calculer

Écris $A = \sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{8}$ sous la forme $a\sqrt{2}$. Calcule ensuite $B = 2\sqrt{5} \times \sqrt{20}$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Simplifie d'abord chaque racine carrée de A : cherche un carré parfait facteur.

Indice 2

Les trois racines carrées simplifiées contiennent $\sqrt{2}$: mets-la en facteur par la distributivité.

Indice 3

Point délicat : pour B, réunis $\sqrt{5} \times \sqrt{20}$ sous un même radical, et garde le coefficient 2.

Réponse

D'après la propriété du produit, $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$, $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ et $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Par la distributivité :

$$\begin{aligned} A &= 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 2\sqrt{2} \\ &= (3 + 5 - 2)\sqrt{2} \\ &= 6\sqrt{2} \end{aligned}$$

D'après la propriété du produit, $\sqrt{5} \times \sqrt{20} = \sqrt{100} = 10$. Donc :

$$B = 2 \times 10 = 20$$

Écrire un quotient sans radical au dénominateur

Deux écritures d'un même nombre

En clair. À la calculatrice, $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ affichent tous deux $0{,}7071067812$. La seconde écriture est plus commode. À la main, diviser $1{,}414$ par 2 est facile ; diviser 1 par $1{,}414$ ne l'est pas.

Pourquoi est-ce vrai ? Un quotient garde sa valeur quand son numérateur et son dénominateur sont multipliés par un même nombre non nul.

Devine : Un dénominateur à transformer

On multiplie le numérateur et le dénominateur de $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ par $\sqrt{3}$. Quelle écriture obtient-on ?

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{9}$

Faux.

$\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$, pas 9.

B. $\dfrac{1}{3}$

Faux.

Le numérateur aussi est multiplié : $1 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}$.

C. $\dfrac{3}{\sqrt{3}}$

Faux.

$\dfrac{3}{\sqrt{3}}$ vaut $\sqrt{3}$: ce n'est pas le nombre de départ.

D. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Juste.

Juste : le dénominateur ne contient plus de radical.

Correction

On multiplie le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{3}$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{3}} &= \frac{1 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

En effet, $\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$ d'après la définition. Le dénominateur ne contient plus de radical.

La propriété du dénominateur rendu rationnel

Propriété : Dénominateur rendu rationnel

Soit a un nombre strictement positif et b un nombre. Alors

$$\frac{b}{\sqrt{a}} = \frac{b\sqrt{a}}{a}.$$

En particulier, $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$ et $\frac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$. On dit qu'on a **rendu rationnel le dénominateur** : il ne contient plus de radical.

Démonstration

Étape 1. Un quotient ne change pas quand on multiplie son numérateur et son dénominateur par un même nombre non nul. Ici, ce nombre est $\sqrt{a}$. Il est non nul : sinon, on aurait $a = (\sqrt{a})^2 = 0^2 = 0$, alors que $a \neq 0$.

Étape 2. On obtient $\frac{b}{\sqrt{a}} = \frac{b \times \sqrt{a}}{\sqrt{a} \times \sqrt{a}} = \frac{b\sqrt{a}}{a}$, car $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = (\sqrt{a})^2 = a$ d'après la définition.

Étape 3. Avec $b = 1$, on obtient $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$. Avec $b = a$, on obtient $\frac{a}{\sqrt{a}} = \frac{a\sqrt{a}}{a} = \sqrt{a}$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Le geste : multiplier le numérateur et le dénominateur par **le même nombre non nul**, ici $\sqrt{a}$. Le quotient garde sa valeur.

Au dénominateur, $\sqrt{a} \times \sqrt{a}$ devient a, d'après la définition. Le radical a quitté le dénominateur.

Vérifie : Multiplier par un nombre non nul

Pourquoi ne multiplie-t-on jamais le numérateur et le dénominateur d'une fraction par 0 ?

A. On peut le faire : rien ne change.
Faux.

Avec $\frac{1}{2}$, on obtiendrait $\frac{1 \times 0}{2 \times 0} = \frac{0}{0}$: ce n'est plus un nombre.

B. Le dénominateur deviendrait nul.

Juste.

Juste : on ne divise jamais par 0.

C. Parce que 0 n'est pas positif.

Faux.

0 est positif. Le problème est qu'il est nul.

D. Le quotient doublerait.

Faux.

Rien ne double : on obtiendrait un dénominateur égal à 0.

Correction

Multiplier par 0 rendrait le dénominateur nul : le quotient n'aurait plus de sens.

Dans la preuve, on multiplie par $\sqrt{a}$, qui n'est pas nul. Sinon, on aurait $a = (\sqrt{a})^2 = 0^2 = 0$, alors que $a \neq 0$.

Exemple : un dénominateur racine carrée, et une condition

- D'après la **propriété du dénominateur rendu rationnel**, $\frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$.
- **La condition compte.** Avec $a = 0$, l'écriture $\frac{6}{\sqrt{0}}$ n'a pas de sens : on ne divise pas par 0.

La méthode, cas par cas

Méthode : écrire un quotient sans radical au dénominateur

1. **Simplifie** la racine carrée du dénominateur, si c'est possible.
2. **Multiplie** le numérateur et le dénominateur par la racine carrée qui reste au dénominateur.
3. **Remplace** $\sqrt{a} \times \sqrt{a}$ par a, d'après la définition.
4. **Simplifie** la fraction obtenue, si c'est possible.

Exemple : un dénominateur avec un coefficient

Écrivons $\frac{5}{2\sqrt{5}}$ sans radical au dénominateur. On multiplie le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{5}$, qui est non nul :

$$\frac{5}{2\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{2 \times 5}$$
$$= \frac{5\sqrt{5}}{10} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

À la fin, on a simplifié la fraction par 5.

Exemple : simplifier d'abord le dénominateur

Écrivons $\frac{3}{\sqrt{12}}$ sans radical au dénominateur.

D'après la propriété du produit, $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. Donc $\frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{3}{2\sqrt{3}}$.

On multiplie le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{3}$:

$$\frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2 \times 3}$$
$$= \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Vérifie : Un numérateur entier

Écris $\frac{4}{\sqrt{2}}$ sans radical au dénominateur.

A. $2\sqrt{2}$

Juste.

Juste : $\frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$.

B. $4\sqrt{2}$

Faux.

Le dénominateur devient 2 : il faut encore diviser $4\sqrt{2}$ par 2.

C. 2

Faux.

Le numérateur devient $4\sqrt{2}$: le radical reste au numérateur.

D. $\sqrt{2}$

Faux.

$\frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$, pas $\sqrt{2}$.

Correction

On multiplie le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{2}$, qui est non nul :

$$\frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

À toi, puis le coin examen

À toi : Deux dénominateurs

Écris sans radical au dénominateur : $\dfrac{3}{\sqrt{6}}$ et $\dfrac{10}{3\sqrt{5}}$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Multiplie le numérateur et le dénominateur par la racine carrée du dénominateur.

Indice 2

Pour $\dfrac{10}{3\sqrt{5}}$, multiplie seulement par $\sqrt{5}$: le 3 reste au dénominateur.

Indice 3

Point délicat : simplifie ensuite chaque fraction, sans toucher au nombre sous le radical.

Réponse

Pour le premier, on multiplie par $\sqrt{6}$, puis on simplifie par 3 :

$$\frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Pour le second, on multiplie par $\sqrt{5}$, puis on simplifie par 5 :

$$\begin{aligned}\frac{10}{3\sqrt{5}} &= \frac{10\sqrt{5}}{3\times 5}\\ &= \frac{10\sqrt{5}}{15} = \frac{2\sqrt{5}}{3}\end{aligned}$$

Remarque : Coin examen : rédiger le calcul

En devoir, dis par quoi tu multiplies, et pourquoi c'est permis. Par exemple :

« Le nombre $\sqrt{2}$ est non nul : on multiplie par lui le numérateur et le dénominateur. D'après la propriété du dénominateur rendu rationnel, $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. »

Le dénominateur final est un entier.

Racines carrées et longueurs : problèmes avec des valeurs exactes

Des longueurs exactes

Rappel de 2e année : dans un triangle ABC rectangle en A, le théorème de Pythagore donne :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

Pour un côté de l'angle droit, on soustrait : $AB^2 = BC^2 - AC^2$. Une longueur est positive : si tu connais son carré, la longueur en est la racine carrée.

Devine : La diagonale d'un carré

Fais la figure : un carré a un côté de 1 cm. Combien mesure exactement sa diagonale ?

A. Exactement 2 cm.

Faux.

$1 + 1 = 2$: tu as additionné les côtés. Le théorème de Pythagore additionne leurs carrés.

B. Exactement 1 cm.

Faux.

Le carré de la diagonale vaut $1^2 + 1^2 = 2$, pas 1.

C. Exactement $\sqrt{2}$ cm.

Juste.

Juste : le carré de la diagonale vaut 2.

D. Exactement $1{,}4$ cm.

Faux.

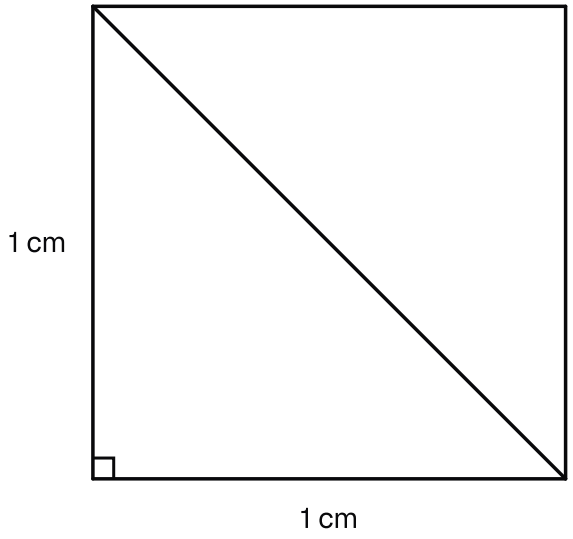
$1{,}4^2 = 1{,}96$, pas 2 : c'est seulement une valeur approchée.

Correction

La diagonale partage le carré en deux triangles rectangles. Notons d sa longueur, en cm. D'après le théorème de Pythagore :

$$d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

La longueur d est positive, donc $d = \sqrt{2}$ cm. C'est le côté du carré d'aire 2 cm² rencontré au début du chapitre.

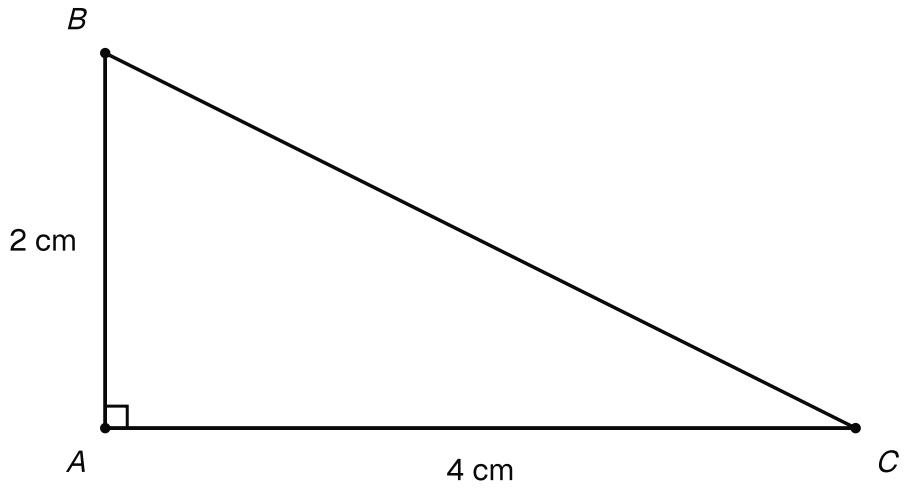


Le carré de côté 1 cm et sa diagonale : elle découpe deux triangles rectangles qui ont deux côtés égaux.

Exemple : une hypoténuse à simplifier

Fais la figure : un triangle ABC rectangle en A, avec $AB = 2$ cm et $AC = 4$ cm.

- D'après le théorème de Pythagore, $BC^2 = 2^2 + 4^2 = 4 + 16 = 20$.
- BC est positif, donc $BC = \sqrt{20}$ cm.
- D'après la propriété du produit, $\sqrt{20} = \sqrt{4} \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$. Donc $BC = 2\sqrt{5}$ cm.

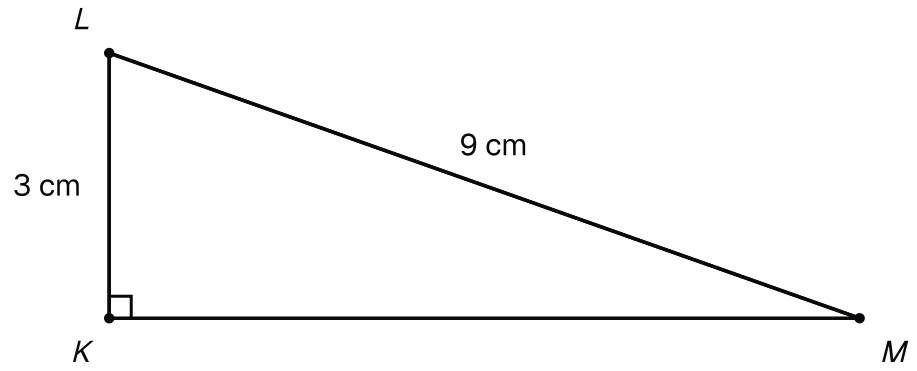


Le triangle ABC de l'exemple : les deux côtés de l'angle droit, 2 cm et 4 cm, partent de A ; BC est le côté calculé.

Exemple : un côté de l'angle droit

Fais la figure : un triangle KLM rectangle en K, avec $LM = 9$ cm et $KL = 3$ cm.

- L'hypoténuse est LM. D'après le théorème de Pythagore, $LM^2 = KL^2 + KM^2$.
- On soustrait : $KM^2 = 9^2 - 3^2 = 81 - 9 = 72$. KM est positif, donc $KM = \sqrt{72}$ cm.
- D'après la propriété du produit, $\sqrt{72} = \sqrt{36} \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$. Donc $KM = 6\sqrt{2}$ cm.



Ici la longueur connue la plus grande, 9 cm, est l'hypoténuse LM ; le côté KM de l'angle droit est celui qu'on cherche.

Vérifie : Le côté d'un carré

Un carré a une aire de 8 cm². Quelle est la longueur exacte de son côté ?

A. 4 cm

Faux.

$4 \times 4 = 16$: tu as pris la moitié de l'aire.

B. $2\sqrt{2}$ cm

Juste.

Juste : $\left(2\sqrt{2}\right)^2 = 4 \times 2 = 8$.

C. $2{,}8$ cm

Faux.

C'est une valeur approchée : $2{,}8^2 = 7{,}84$, pas 8.

D. $4\sqrt{2}$ cm

Faux.

$\sqrt{4} = 2$, donc $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Correction

Le côté c est positif et $c^2 = 8$. Donc $c = \sqrt{8}$ cm. D'après la propriété du produit :

$$\sqrt{8} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

Le côté mesure $2\sqrt{2}$ cm.

La diagonale d'un écran

Exemple : la diagonale d'un écran

L'écran rectangulaire d'une tablette mesure 20 cm sur 10 cm. Sa diagonale le partage en deux triangles rectangles.

- D'après le théorème de Pythagore, $d^2 = 20^2 + 10^2 = 400 + 100 = 500$. Donc $d = \sqrt{500}$ cm.
- On décompose $500 = 100 \times 5$. D'après la propriété du produit, $d = 10\sqrt{5}$ cm.
- À la calculatrice, $d \approx 22{,}4$ cm (arrondi au dixième).

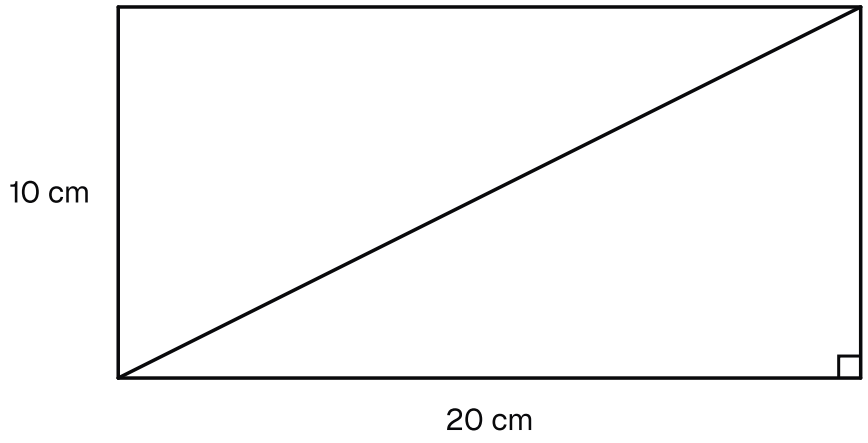


Schéma de l'écran : un rectangle de 20 cm sur 10 cm que la diagonale coupe en deux triangles rectangles superposables.

En clair. La valeur exacte $10\sqrt{5}$ sert aux calculs : on la garde jusqu'au bout. La valeur approchée sert à mesurer ou à acheter. On ne l'écrit qu'à la fin, avec sa précision.

Vérifie : Une autre diagonale

Un rectangle mesure 6 cm sur 2 cm. Quelle est la longueur exacte de sa diagonale ?

A. 8 cm

Faux.
Tu as additionné les côtés. Il faut additionner leurs carrés.

B. $\sqrt{8}$ cm

Faux.
Tu as additionné $6 + 2$ sous le radical. Il faut $6^2 + 2^2$.

C. $4\sqrt{10}$ cm

Faux.
$40 = 4 \times 10$ et $\sqrt{4} = 2$, pas 4.

D. $2\sqrt{10}$ cm

Juste.
Juste : $d^2 = 36 + 4 = 40$.

Correction

Notons d la longueur de la diagonale, en cm. D'après le théorème de Pythagore :

$$d^2 = 6^2 + 2^2 = 36 + 4 = 40$$

La longueur d est positive, donc $d = \sqrt{40}$ cm. D'après la propriété du produit, $\sqrt{40} = \sqrt{4} \times \sqrt{10} = 2\sqrt{10}$. La diagonale mesure $2\sqrt{10}$ cm.

À toi : Un triangle rectangle à deux côtés égaux

Un triangle EFG est rectangle en E, avec $EF = EG = 3$ cm. Calcule la valeur exacte de FG, puis une valeur approchée au dixième. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Fais la figure, puis applique le théorème de Pythagore dans le triangle EFG.

Indice 2

L'hypoténuse est FG, le côté opposé à l'angle droit. Ensuite, cherche un carré parfait facteur pour simplifier.

Indice 3

Point délicat : la valeur approchée vient en dernier, avec $\approx$ et sa précision.

Réponse

D'après le théorème de Pythagore, $FG^2 = 3^2 + 3^2 = 18$. FG est positif, donc $FG = \sqrt{18}$ cm.

D'après la propriété du produit, $\sqrt{18} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$. Donc $FG = 3\sqrt{2}$ cm.

Pour une valeur approchée : $FG \approx 4{,}2$ cm (à la calculatrice, arrondi au dixième).

Ce qu'il faut savoir faire

À retenir : quelle règle pour quel calcul

- **Calculer** $\sqrt{a}$: cherche le nombre positif dont le carré est a.
- **Résoudre** $x^2 = a$: regarde le signe de a. Deux, une ou aucune solution ; conclus par une phrase.
- **Simplifier** : un carré parfait facteur, puis la propriété du produit.
- **Réduire** une somme : seulement les termes qui ont la même racine carrée.
- **Rendre rationnel** un dénominateur : multiplie numérateur et dénominateur par la racine carrée qui figure au dénominateur.
- **Approcher** : la calculatrice, l'arrondi avec sa précision, le contrôle par le carré.

Remarque : Les erreurs à éviter

- $\sqrt{-9}$ n'existe pas, mais $-\sqrt{9} = -3$.
- $\sqrt{(-5)^2} = 5$, jamais -5.
- $\sqrt{9+16} = 5$, et non $\sqrt{9} + \sqrt{16}$.
- $x^2 = 49$ a deux solutions : 7 et -7.
- $\sqrt{3} \approx 1{,}73$ (arrondi au centième) : jamais le signe $=$ devant une valeur affichée.

Le mot du prof. Tu sais maintenant calculer, simplifier et approcher une racine carrée. Garde les valeurs exactes dans tes calculs, et nomme chaque règle. Tu retrouveras les racines carrées avec les identités remarquables, avec le théorème de Pythagore et dans le chapitre « Ordre et opérations ».

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Les racines carrées » (3ac · general · mathematiques)