BURHAN

Résumé : Ordre et opérations

3ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/3ac/mathematiques/ordre-et-operations/resume

Chapitre	Semestre
Ordre et opérations	Semestre 1

Comparer deux nombres

> **À retenir : Des propriétés admises**
>
> Dans ce chapitre, toutes les propriétés sont admises. Tu les as d'abord observées sur des nombres. Ce Résumé rassemble leurs énoncés, les méthodes et les pièges à éviter.

Propriété : Comparer deux nombres par leur différence

Pour comparer deux nombres a et b, on étudie le signe de leur différence $a - b$:

- si $a - b > 0$, alors $a > b$;
- si $a - b < 0$, alors $a < b$;
- si $a - b = 0$, alors $a = b$.

Propriété : Transitivité

Soit a, b et c trois nombres. Si $a < b$ et $b < c$, alors $a < c$.

La propriété reste vraie avec $\leq$. Si l'une des deux inégalités est stricte, la conclusion est stricte : si $a \leq b$ et $b < c$, alors $a < c$.

Elle permet de comparer deux nombres grâce à un **nombre intermédiaire** placé entre eux.

Méthode : choisir comment comparer

1. **Différence** : si $a - b$ se calcule simplement, étudie son signe.
2. **Carrés** : pour deux nombres positifs ou nuls écrits avec des racines carrées, compare leurs carrés.
3. **Inverses** : pour deux fractions de même numérateur strictement positif et de dénominateurs strictement positifs, compare les dénominateurs. Le sens change.
4. **Nombre intermédiaire** : sinon, trouve un nombre placé entre les deux. Termine par la transitivité.

Exemple

Énoncé. Compare $\frac{5}{8}$ et $\frac{7}{11}$.

Différence. On réduit au dénominateur commun 88 :

$$\begin{aligned}\frac{5}{8}-\frac{7}{11} &= \frac{55-56}{88}\\ &= -\frac{1}{88}\end{aligned}$$

Conclusion. On a $-\frac{1}{88}<0$. D'après la comparaison par la différence, $\frac{5}{8}<\frac{7}{11}$.

Exemple

Énoncé. Compare $\frac{23}{6}$ et $\sqrt{17}$.

Premier nombre. On a $\frac{23}{6}=4-\frac{1}{6}$, donc $\frac{23}{6}<4$.

Second nombre. On a $16<17$. D'après la propriété ordre, carrés et racines carrées, $\sqrt{16}<\sqrt{17}$, soit $4<\sqrt{17}$.

Conclusion. Le nombre 4 sert d'intermédiaire. Par transitivité, $\frac{23}{6}<\sqrt{17}$.

Ordre, addition et multiplication

À retenir : Les membres d'une inégalité

Les deux côtés d'une inégalité s'appellent ses **membres**. Dans $a\leq 6$, le membre de gauche est a, celui de droite est 6. Opérer « membre à membre » sur deux inégalités, c'est combiner entre eux leurs membres de gauche, puis leurs membres de droite.

Propriété : Ordre et addition

Soit a, b et c trois nombres. Si $a\leq b$, alors $a+c\leq b+c$ et $a-c\leq b-c$.

Ajouter ou soustraire un même nombre aux deux membres d'une inégalité **conserve son sens**. La propriété reste vraie avec $<$.

Propriété : Ordre et multiplication

Soit a, b et c trois nombres, avec $a\leq b$.

- Si $c>0$, alors $ac\leq bc$: multiplier les deux membres par un nombre **strictement positif** conserve le sens.
- Si $c<0$, alors $ac\geq bc$: multiplier les deux membres par un nombre **strictement négatif** change le sens.

Diviser par c, c'est multiplier par $\frac{1}{c}$, qui a le même signe que c : la même règle s'applique à la division.

Méthode : transformer une inégalité

1. Pars de l'inégalité que tu connais.
2. Fais **un seul calcul par ligne** sur les deux membres : ajouter ou soustraire un nombre, multiplier ou diviser par un nombre non nul.
3. Note à côté de chaque ligne la règle utilisée.
4. Avant d'écrire le symbole, regarde le signe du nombre. Strictement positif : le sens reste. Strictement négatif : le sens s'inverse.

Exemple

Énoncé. On sait que $a \leq 6$. Que dire de $a - 9$ et de $-\frac{a}{3}$?

Soustraire 9. D'après la propriété ordre et addition, $a - 9 \leq 6 - 9$, soit $a - 9 \leq -3$.

Diviser par -3. On a $-3 < 0$. D'après la propriété ordre et multiplication, le sens change : $-\frac{a}{3} \geq -2$.

Attention : Le signe du multiplicateur

De $y > -4$, on ne peut pas tirer $-5y > 20$. Le nombre -5 est strictement négatif, donc le sens change : $-5y < 20$. Contrôle avec $y = 0$: on obtient $-5 \times 0 = 0$, plus petit que 20.

Additionner, multiplier membre à membre

Propriété : Additionner membre à membre

Soit a, b, c et d quatre nombres. Si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors $a + c \leq b + d$.

On peut additionner membre à membre deux inégalités **de même sens**.

Propriété : Multiplier membre à membre des nombres positifs ou nuls

Soit a, b, c et d quatre nombres. Si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$, alors $ac \leq bd$.

Cette règle exige que **les quatre nombres soient positifs ou nuls**.

Exemple

Addition. Si $m \leq 7$ et $n \leq 2$, alors $m + n \leq 9$, par addition membre à membre.

Multiplication. Si $0 \leq u \leq 3$ et $0 \leq v \leq 5$, alors $uv \leq 15$. Les nombres u, 3, v et 5 sont positifs ou nuls : la multiplication membre à membre s'applique.

Attention : Des négatifs dans un produit membre à membre

On a $-3 \leq -2$ et $-7 \leq 1$. Pourtant, $(-3) \times (-7) = 21$ dépasse $(-2) \times 1 = -2$. Avant de multiplier membre à membre, contrôle le signe des quatre nombres.

Carrés, racines carrées, inverses

Propriété : Ordre, carrés et racines carrées

Soit a et b deux nombres **positifs ou nuls**.

- Si $a \leq b$, alors $a^2 \leq b^2$ et $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.
- Réciproquement, si $a^2 \leq b^2$, ou si $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$, alors $a \leq b$.

Deux nombres positifs ou nuls, leurs carrés et leurs racines carrées sont rangés dans le même ordre. La propriété reste vraie avec $<$.

Exemple

Énoncé. Compare $3\sqrt{10}$ et $4\sqrt{6}$.

Signe. Les deux nombres sont strictement positifs.

Carrés. On calcule le carré de chacun :

$$(3\sqrt{10})^2 = 9 \times 10 = 90$$
$$(4\sqrt{6})^2 = 16 \times 6 = 96$$

Conclusion. Comme $90 < 96$, d'après la propriété ordre, carrés et racines carrées, $3\sqrt{10} < 4\sqrt{6}$.

Attention : Carrés de nombres négatifs

Pour des nombres négatifs, passer aux carrés peut inverser l'ordre. On a $-9 < -1$, alors que $(-9)^2 = 81$ et $(-1)^2 = 1$. Regarde d'abord le signe des deux nombres.

Propriété : Ordre et inverses

Soit a et b deux nombres non nuls **de même signe**. Si $a \leq b$, alors $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$.

Passer aux inverses de deux nombres de même signe **change le sens** de l'inégalité. La propriété reste vraie avec $<$.

Exemple

Énoncé. Compare $\frac{5}{13}$ et $\frac{5}{12}$.

Inverses. On a $0 < 12 < 13$. D'après la propriété ordre et inverses, $\frac{1}{12} > \frac{1}{13}$.

Multiplier par 5. On a $5 > 0$, donc le sens se conserve : $\frac{5}{12} > \frac{5}{13}$.

Attention : Inverses : le sens change

De $2 < 8$, on tire $\frac{1}{2} > \frac{1}{8}$. Écrire $\frac{1}{2} < \frac{1}{8}$ est faux : la moitié d'une galette est plus grosse que son huitième.

Remarque : Deux nombres de signes contraires

La propriété ordre et inverses demande deux nombres de même signe. Avec $-2 < 4$, on a $-\frac{1}{2} < \frac{1}{4}$: ici, le sens ne change pas. Un nombre strictement négatif reste plus petit qu'un nombre strictement positif.

Encadrer un nombre, une expression

Définition : Encadrement et amplitude

Soit x un nombre. Écrire $a \leq x \leq b$, c'est **encadrer** x entre les nombres a et b.

Le nombre $b - a$ s'appelle l'**amplitude** de l'encadrement. Plus l'amplitude est petite, plus l'encadrement est précis. On encadre aussi avec des inégalités strictes, comme $a < x < b$.

Exemple

Dans l'encadrement $2 \leq x \leq 3$, les nombres 2 et 3 s'appellent les **bornes**. Cet encadrement a pour amplitude $3 - 2 = 1$. L'encadrement $2{,}3 \leq x \leq 2{,}4$ a pour amplitude $0{,}1$: il est plus précis. Place ces bornes sur une droite graduée dans ton cahier pour le voir.

Exemple

Énoncé. On sait que $-1 \leq t \leq 4$. Encadre $6 - 2t$.

Multiplier par -2. D'après la propriété ordre et multiplication, le sens change : $2 \geq -2t \geq -8$, soit $-8 \leq -2t \leq 2$.

Ajouter 6. D'après la propriété ordre et addition, le sens reste : $-2 \leq 6 - 2t \leq 8$.

Amplitude. Elle vaut $8 - (-2) = 10$, le double de l'amplitude 5 de départ.

Encadrer une somme, une différence

Propriété : Encadrer une somme et une différence

Soit x et y deux nombres. Si $a \leq x \leq b$ et $c \leq y \leq d$, alors :

- $a + c \leq x + y \leq b + d$;
- $a - d \leq x - y \leq b - c$.

Pour la différence, on encadre d'abord l'opposé $-y$: $-d \leq -y \leq -c$. On additionne ensuite membre à membre avec l'encadrement de x.

Méthode : somme et différence

1. Écris l'encadrement de x, puis celui de y juste en dessous.
2. **Somme** : additionne les bornes situées du même côté.
3. **Différence** $x - y$: multiplie l'encadrement de y par -1. Le sens s'inverse ; récris-le dans l'ordre croissant.
4. Additionne enfin l'encadrement de x et celui de $-y$.

Exemple

Données. $3 \leq m \leq 5$ et $1 \leq n \leq 2$.

Somme. Par addition membre à membre : $4 \leq m + n \leq 7$.

Différence. D'après la propriété ordre et multiplication, $-2 \leq -n \leq -1$. Par addition membre à membre avec l'encadrement de m : $1 \leq m - n \leq 4$.

Attention : Ne pas soustraire les bornes

Avec ces mêmes données, écrire $3 - 1 \leq m - n \leq 5 - 2$, soit $2 \leq m - n \leq 3$, est faux. Pour $m = 3$ et $n = 2$, la différence $m - n$ vaut 1, moins que 2.

Encadrer un produit, un quotient

Propriété : Encadrer un produit et un quotient de nombres strictement positifs

Soit x et y deux nombres. Si $0 < a \leq x \leq b$ et $0 < c \leq y \leq d$, alors :

- $ac \leq xy \leq bd$;
- $\frac{a}{d} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{b}{c}$.

Pour le quotient, on encadre d'abord l'inverse $\frac{1}{y}$: $\frac{1}{d} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{c}$. On multiplie ensuite membre à membre avec l'encadrement de x.

Méthode : produit et quotient

1. Contrôle d'abord que les quatre bornes sont strictement positives. Sinon, la règle ne s'applique pas.
2. **Produit** : multiplie entre elles les bornes de gauche, puis celles de droite.
3. **Quotient** $\frac{x}{y}$: encadre $\frac{1}{y}$ en passant aux inverses, avec changement de sens.
4. Multiplie enfin l'encadrement de x par celui de $\frac{1}{y}$.

Exemple

Données. $3 \leq m \leq 5$ et $1 \leq n \leq 2$: toutes les bornes sont strictement positives.

Produit. Par multiplication membre à membre : $3 \leq mn \leq 10$.

Quotient. D'après la propriété ordre et inverses, $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{n} \leq 1$. Par multiplication membre à membre : $\frac{3}{2} \leq \frac{m}{n} \leq 5$.

Attention : Ne pas diviser les bornes

Diviser les bornes donnerait $\frac{3}{1} \leq \frac{m}{n} \leq \frac{5}{2}$. C'est absurde : 3 est plus grand que $\frac{5}{2}$. Pour $m = 3$ et $n = 2$, on trouve d'ailleurs $\frac{m}{n} = \frac{3}{2}$, moins que 3.

Valeur approchée

Définition : Valeur approchée par défaut, par excès

Soit x un nombre et r un nombre strictement positif, par exemple $0{,}1$ ou $0{,}01$.

Si $a \leq x \leq a + r$, on dit que :

- a est une **valeur approchée de x par défaut** à r près ;
- $a + r$ est une **valeur approchée de x par excès** à r près.

Méthode : valeur approchée

1. Lis l'affichage de la calculatrice.
2. Pour un nombre positif ou nul, garde les chiffres jusqu'à la précision demandée : c'est la valeur par défaut.

3. Ajoute la précision à cette valeur : c'est la valeur par excès.
4. Une somme se traite en additionnant les encadrements de ses deux termes. Leurs amplitudes s'additionnent.

Exemple

Calculatrice. Elle affiche $\sqrt{23} \approx 4{,}7958$.

Encadrement. À $0{,}01$ près : $4{,}79 \leq \sqrt{23} \leq 4{,}80$. Contrôle par les carrés : $4{,}79^2 = 22{,}9441$ et $4{,}80^2 = 23{,}04$.

Conclusion. À $0{,}01$ près, $4{,}79$ est la valeur approchée par défaut de $\sqrt{23}$, et $4{,}80$ sa valeur approchée par excès.

Exemple

Énoncé. Encadre $\sqrt{23} + \sqrt{17}$.

Deux encadrements. À la calculatrice, à $0{,}01$ près :

$$4{,}79 \leq \sqrt{23} \leq 4{,}80$$
$$4{,}12 \leq \sqrt{17} \leq 4{,}13$$

Somme. Par addition membre à membre :

$$8{,}91 \leq \sqrt{23} + \sqrt{17} \leq 8{,}93$$

L'amplitude vaut $0{,}02$, somme des deux amplitudes.

Quelle règle pour quelle question ?

Méthode : un problème d'encadrement

1. Écris chaque mesure sous forme d'encadrement, avec son unité.
2. Note la formule qui donne la grandeur demandée.
3. Encadre cette grandeur ligne après ligne, en citant chaque règle.
4. Termine par une phrase qui contient l'unité.

Exemple

Énoncé. Un carreau carré a un côté c tel que $19{,}5 \leq c \leq 20{,}5$, en centimètres. Encadre son périmètre.

Calcul. Le périmètre vaut $4c$. D'après la propriété ordre et multiplication, avec 4 strictement positif : $78 \leq 4c \leq 82$.

Conclusion. Le périmètre du carreau est compris entre 78 cm et 82 cm.

Méthode : Quelle règle pour quelle question ?

- **Comparer** : signe de la différence ou nombre intermédiaire ; carrés si les nombres sont positifs ou nuls ; inverses s'ils ont le même signe.
- **Ajouter** un même nombre aux deux membres : le sens reste.
- **Multiplier ou diviser** par un nombre non nul : regarde son signe.
- **Encadrer une somme** : addition membre à membre.
- **Encadrer une différence** : passe par l'opposé.
- **Encadrer un produit** : bornes strictement positives, multiplication membre à membre.
- **Encadrer un quotient** : bornes strictement positives, passe par l'inverse.
- **Valeur approchée** : calculatrice, puis encadrement d'amplitude donnée.

Si a est inférieur ou égal à b, pour tout nombre c

$$a + c \leq b + c$$

Si a est inférieur ou égal à b, avec c strictement positif

$$ac \leq bc$$

Si a est inférieur ou égal à b, avec c strictement négatif

$$ac \geq bc$$

Somme, si a ≤ x ≤ b et c ≤ y ≤ d

$$a + c \leq x + y \leq b + d$$

Différence, mêmes hypothèses

$$a - d \leq x - y \leq b - c$$

Produit, bornes strictement positives

$$ac \leq xy \leq bd$$

Quotient, bornes strictement positives

$$\frac{a}{d} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{b}{c}$$

Valeurs approchées à r près, par défaut a et par excès a + r

$$a \leq x \leq a + r$$

À retenir : Rédiger en devoir

Écris une seule règle par ligne et nomme-la : « d'après la propriété ordre et multiplication ». Pour une valeur approchée, indique l'outil et la précision. Termine un problème par une phrase avec l'unité. Contrôle enfin ton encadrement avec une valeur prise entre les bornes.