BURHAN

Ordre et opérations : exercices, niveau examen

3ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/3ac/mathematiques/ordre-et-operations/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Ordre et opérations	Niveau examen	5

Exercice 1 5 pts

Deux façons d'encadrer une même expression

Dans une chambre froide, la température a, en degrés Celsius, reste comprise entre -2 et 1 : $-2 \leq a \leq 1$. Un technicien étudie deux expressions calculées à partir de a.

1. 0,5 pts

Encadrer $4a - 3$.

INDICE

Début : demande-toi quelle opération fait passer de a à $4a - 3$. Fais une règle par ligne.

CORRIGÉ

On passe de a à $4a - 3$ en deux étapes : multiplier par 4, puis retirer 3.

Multiplier par 4. Le nombre 4 est strictement positif. Par la propriété ordre et multiplication, le sens se conserve : $-8 \leq 4a \leq 4$.

Retirer 3. D'après la propriété ordre et addition, on retire 3 à chaque membre : $-8 - 3 = -11$ et $4 - 3 = 1$.

Conclusion. On a $-11 \leq 4a - 3 \leq 1$.

2. 1 pts

Encadrer $1 - 3a$.

INDICE

Attention au signe du nombre par lequel tu multiplies.

CORRIGÉ

On passe de a à $1 - 3a$ en deux étapes : multiplier par -3, puis ajouter 1.

Multiplier par -3. Comme $-3 < 0$, la propriété ordre et multiplication inverse le sens : $6 \geq -3a \geq -3$, c'est-à-dire $-3 \leq -3a \leq 6$.

Ajouter 1. D'après la propriété ordre et addition, on ajoute 1 à chaque membre : $1 - 3 = -2$ et $1 + 6 = 7$.

Conclusion. On a $-2 \leq 1 - 3a \leq 7$.

3. 1 pts

On pose $S = (4a - 3) + (1 - 3a)$. En déduire, à l'aide des questions 1 et 2, un encadrement de S. Donner son amplitude.

INDICE

Outil : deux encadrements de même sens se combinent membre à membre.

CORRIGÉ

Addition. Les encadrements des questions 1 et 2 ont le même sens. Par addition membre à membre :

$$-11 + (-2) \leq S \leq 1 + 7$$

Amplitude. D'après la définition de l'amplitude, elle vaut $8 - (-13) = 21$.

Conclusion. On a $-13 \leq S \leq 8$, encadrement d'amplitude 21.

4. 1,5 pts

Réduire l'expression S, puis encadrer S directement à partir de l'encadrement de a.

INDICE

Début : regroupe les termes en a, puis les nombres.

CORRIGÉ

Réduire. On regroupe les termes en a, puis les nombres :

$$\begin{aligned} S &= 4a - 3a - 3 + 1 \\ &= a - 2 \end{aligned}$$

Encadrer. D'après la propriété ordre et addition, on retire 2 à chaque membre de $-2 \leq a \leq 1$: $-2 - 2 = -4$ et $1 - 2 = -1$.

Conclusion. On a $S = a - 2$ et $-4 \leq S \leq -1$.

5. 1 pts

Lequel des deux encadrements de S est le plus précis ? Peut-on connaître le signe de S ?

INDICE

Piste : calcule l'amplitude de l'encadrement de la question 4, puis regarde la borne de droite de chaque encadrement.

CORRIGÉ

Précision. D'après la définition de l'amplitude, l'encadrement de la question 4 a pour amplitude $-1-(-4)=3$. Comme $3<21$, il est plus précis que celui de la question 3.

Pourquoi. Les expressions $4a-3$ et $1-3a$ dépendent du même nombre a. En ajoutant leurs encadrements séparément, on perd ce lien, et donc de la précision.

Signe. On a $S\leq -1$ et $-1<0$. D'après la transitivité, $S<0$. L'encadrement de la question 3, de -13 à 8, ne permettait pas de le savoir.

Conclusion. L'encadrement direct, d'amplitude 3, est le plus précis. Il permet de connaître le signe de S : S est strictement négatif.

Exercice 2 — 5 pts

Une racine carrée encadrée de plus en plus finement

Un menuisier dispose d'une baguette de bois de 12 cm. Il y découpe trois morceaux de longueur $\sqrt{14}$ cm, le côté d'un carré d'aire 14 cm². Le morceau qui reste mesure $A = 12 - 3\sqrt{14}$, en centimètres. À la calculatrice, on lit $\sqrt{14} \approx 3{,}741657$.

1. — 0,5 pts

Donner les valeurs approchées de $\sqrt{14}$ par défaut et par excès à $0{,}01$ près.

INDICE

Outil : la lecture de la calculatrice, à la précision demandée.

CORRIGÉ

La calculatrice donne $\sqrt{14} \approx 3{,}741657$. On garde deux chiffres après la virgule, puis on ajoute $0{,}01$: $3{,}74 \leq \sqrt{14} \leq 3{,}75$.

Conclusion. D'après la définition de la valeur approchée, à $0{,}01$ près, $3{,}74$ est la valeur approchée de $\sqrt{14}$ par défaut et $3{,}75$ sa valeur approchée par excès.

2. — 1 pts

En déduire un encadrement de A d'amplitude $0{,}03$.

INDICE

Attention : A contient $-3\sqrt{14}$. Surveille le sens à chaque ligne.

CORRIGÉ

On passe de $\sqrt{14}$ à $A = 12 - 3\sqrt{14}$ en deux étapes : multiplier par -3, puis ajouter 12.

Multiplier par -3. Comme $-3 < 0$, on inverse le sens, d'après la propriété ordre et multiplication. Avec $-3 \times 3{,}74 = -11{,}22$ et $-3 \times 3{,}75 = -11{,}25$, on obtient $-11{,}25 \leq -3\sqrt{14} \leq -11{,}22$.

Ajouter 12. D'après la propriété ordre et addition : $12 - 11{,}25 = 0{,}75$ et $12 - 11{,}22 = 0{,}78$.

Amplitude. D'après la définition de l'amplitude, elle vaut $0{,}78 - 0{,}75 = 0{,}03$.

Conclusion. On a $0{,}75 \leq A \leq 0{,}78$, encadrement d'amplitude $0{,}03$: le morceau restant mesure entre $0{,}75$ cm et $0{,}78$ cm.

3. 1 pts

Le menuisier veut tailler dans ce morceau une cale de $\frac{7}{9}$ cm. L'encadrement de la question 2 permet-il de comparer A et $\frac{7}{9}$?

INDICE

Piste : place $\frac{7}{9}$ par rapport à $0{,}75$ et à $0{,}78$; multiplie par 9 pour comparer.

CORRIGÉ

On place $\frac{7}{9}$ par rapport aux bornes $0{,}75$ et $0{,}78$.

Borne de gauche. On a $9 \times 0{,}75 = 6{,}75$ et $6{,}75 < 7$. On divise par 9, nombre strictement positif : d'après la propriété ordre et multiplication, $0{,}75 < \frac{7}{9}$.

Borne de droite. On a $7 < 7{,}02$ et $7{,}02 = 9 \times 0{,}78$. On divise encore par 9 : $\frac{7}{9} < 0{,}78$.

Conclusion. Le nombre $\frac{7}{9}$ est situé entre les bornes de l'encadrement de A. Cet encadrement ne permet donc pas de comparer A et $\frac{7}{9}$.

4. 1,5 pts

Recommencer avec un encadrement de $\sqrt{14}$ à $0{,}001$ près : donner l'encadrement de A obtenu avec cette précision.

INDICE

Début : à la calculatrice, $3{,}741 \leq \sqrt{14} \leq 3{,}742$. Refais les deux étapes de la question 2.

CORRIGÉ

Racine à $0{,}001$ près. À la calculatrice : $3{,}741 \leq \sqrt{14} \leq 3{,}742$.

Multiplier par -3. Le multiplicateur -3 est strictement négatif, donc le sens s'inverse (propriété ordre et multiplication) : $-11{,}226 \leq -3\sqrt{14} \leq -11{,}223$.

Ajouter 12. D'après la propriété ordre et addition : $12 - 11{,}226 = 0{,}774$ et $12 - 11{,}223 = 0{,}777$.

Conclusion. Avec cette précision, on obtient $0{,}774 \leq A \leq 0{,}777$.

5. 1 pts

Comparer A et $\frac{7}{9}$. Le menuisier peut-il tailler sa cale ?

INDICE

Piste : compare la borne de droite de l'encadrement de la question 4 à $\frac{7}{9}$.

CORRIGÉ

Comparer $0{,}777$ et $\frac{7}{9}$. On a $9 \times 0{,}777 = 6{,}993$ et $6{,}993 < 7$. On divise par 9, nombre strictement positif : d'après la propriété ordre et multiplication, $0{,}777 < \frac{7}{9}$.

Enchaîner. D'après la question 4, $A \leq 0{,}777$. Avec $0{,}777 < \frac{7}{9}$, la transitivité donne $A < \frac{7}{9}$.

Conclusion. Le morceau restant mesure moins de $\frac{7}{9}$ cm : le menuisier ne peut pas y tailler sa cale.

Exercice 3 5 pts

La facture d'eau d'une famille

Pendant un mois, une famille de 5 personnes consomme c mètres cubes d'eau, avec $14 \leq c \leq 16$. Le prix moyen du mètre cube est de p dirhams, avec $4{,}5 \leq p \leq 5$. La facture comprend aussi une redevance fixe de 12 dirhams.

1. 0,5 pts

Encadrer le coût cp de l'eau consommée.

INDICE

Outil : l'encadrement d'un produit ; vérifie d'abord le signe des bornes.

CORRIGÉ

Conditions. Les bornes 14, 16, $4{,}5$ et 5 sont strictement positives.

Produit. D'après l'encadrement d'un produit : $14 \times 4{,}5 = 63$ et $16 \times 5 = 80$.

Conclusion. On a $63 \leq cp \leq 80$: l'eau consommée coûte entre 63 et 80 dirhams.

2. 1 pts

En déduire un encadrement du montant $F = cp + 12$ de la facture.

INDICE

Début : quelle opération fait passer de cp à F ?

CORRIGÉ

On passe de cp à F en ajoutant 12.

D'après la propriété ordre et addition, on ajoute 12 à chaque membre de $63 \leq cp \leq 80$: $63 + 12 = 75$ et $80 + 12 = 92$.

Conclusion. On a $75 \leq F \leq 92$: la facture est comprise entre 75 et 92 dirhams.

3. 1 pts

Encadrer la consommation moyenne par personne, $\dfrac{c}{5}$, en mètres cubes.

INDICE

Outil : une division se transforme en multiplication.

CORRIGÉ

Diviser par 5 revient à multiplier par $\dfrac{1}{5}$, nombre strictement positif.

Avec la propriété ordre et multiplication, on divise chaque membre de $14 \leq c \leq 16$ par 5 sans changer le sens : $\dfrac{14}{5} = 2{,}8$ et $\dfrac{16}{5} = 3{,}2$.

Conclusion. On a $2{,}8 \leq \dfrac{c}{5} \leq 3{,}2$: chaque personne consomme en moyenne entre $2{,}8$ et $3{,}2$ mètres cubes.

4. 1,5 pts

Le mois suivant, la famille consomme k mètres cubes, avec $15 \leq k \leq 17$. Elle paie N dirhams pour l'eau seule, avec $81 \leq N \leq 85$. Encadrer le prix moyen $\dfrac{N}{k}$ du mètre cube.

INDICE

Méthode : encadre d'abord $\dfrac{1}{k}$, puis applique l'encadrement d'un produit à $N \times \dfrac{1}{k}$.

CORRIGÉ

On écrit $\dfrac{N}{k} = N \times \dfrac{1}{k}$.

Inverse. Les nombres 15, k et 17 sont strictement positifs : $0 < 15 \leq k \leq 17$. D'après la propriété ordre et inverses, le sens change : $\dfrac{1}{17} \leq \dfrac{1}{k} \leq \dfrac{1}{15}$.

Produit. Les bornes 81, 85, $\dfrac{1}{17}$ et $\dfrac{1}{15}$ sont strictement positives. D'après l'encadrement d'un produit, avec $81 \leq N \leq 85$:

$$\frac{81}{17} \leq \frac{N}{k} \leq \frac{85}{15}$$

Simplifier. On a $\dfrac{85}{15} = \dfrac{17 \times 5}{3 \times 5} = \dfrac{17}{3}$.

Conclusion. Le prix moyen vérifie $\dfrac{81}{17} \leq \dfrac{N}{k} \leq \dfrac{17}{3}$.

5. 1 pts

Peut-on affirmer que ce prix moyen dépasse $4{,}5$ dirhams par mètre cube ?

INDICE

Piste : compare $\dfrac{81}{17}$ et $4{,}5$ en multipliant par 17.

CORRIGÉ

Comparer $4{,}5$ et $\dfrac{81}{17}$. On a $17 \times 4{,}5 = 76{,}5$ et $76{,}5 < 81$. On divise par 17, nombre strictement positif : d'après la propriété ordre et multiplication, $4{,}5 < \dfrac{81}{17}$.

Enchaîner. D'après la question 4, $\dfrac{81}{17} \leq \dfrac{N}{k}$. D'après la transitivité, $\dfrac{N}{k} > 4{,}5$.

Conclusion. Oui : on peut affirmer que le prix moyen dépasse $4{,}5$ dirhams par mètre cube.

Exercice 4 5 pts

Une frise de carreaux le long d'un mur

Un carreleur pose une frise : une seule rangée de carreaux carrés, bord à bord, le long d'un mur de 100 cm. Chaque carreau a une aire de 90 cm², donc son côté mesure $s = 3\sqrt{10}$ cm, car $(3\sqrt{10})^2 = 9 \times 10 = 90$.

1. 0,5 pts

Comparer s à $9{,}4$ et à $9{,}5$, puis écrire l'encadrement de s obtenu.

INDICE

Début : les trois nombres sont strictement positifs ; quelle technique de comparaison convient à une racine carrée ?

CORRIGÉ

Les nombres $9{,}4$, s et $9{,}5$ sont strictement positifs : on les compare par leurs carrés.

Carrés.

- $9{,}4^2 = 88{,}36$;
- $s^2 = 90$;
- $9{,}5^2 = 90{,}25$.

On a $88{,}36 < 90 < 90{,}25$.

Conclusion. D'après la propriété ordre, carrés et racines carrées, les trois nombres sont rangés comme leurs carrés : $9{,}4 < s < 9{,}5$.

2. 1 pts

En déduire un encadrement de $\dfrac{1}{s}$ par deux fractions.

INDICE

Attention : surveille le sens en passant aux inverses. Écris $\dfrac{1}{9{,}5}$ et $\dfrac{1}{9{,}4}$ sous forme de fractions d'entiers.

CORRIGÉ

Inverses. Les nombres $9{,}4$, s et $9{,}5$ sont strictement positifs, donc de même signe. D'après la propriété ordre et inverses, le sens change : $\dfrac{1}{9{,}5} < \dfrac{1}{s} < \dfrac{1}{9{,}4}$.

Fractions. On multiplie le numérateur et le dénominateur par 10, puis on simplifie :

- $\dfrac{1}{9{,}5} = \dfrac{10}{95} = \dfrac{2}{19}$;
- $\dfrac{1}{9{,}4} = \dfrac{10}{94} = \dfrac{5}{47}$.

Conclusion. On a $\dfrac{2}{19} < \dfrac{1}{s} < \dfrac{5}{47}$.

3. 1 pts

Le nombre $N = \dfrac{100}{s}$ indique combien de fois le côté d'un carreau tient dans la longueur du mur. Encadrer N.

INDICE

Outil : $\dfrac{100}{s} = 100 \times \dfrac{1}{s}$; utilise la question 2.

CORRIGÉ

On écrit $N = 100 \times \dfrac{1}{s}$. Le nombre 100 est strictement positif.

D'après la propriété ordre et multiplication, on multiplie chaque membre de l'encadrement de la question 2 par 100 sans changer le sens : $100 \times \dfrac{2}{19} = \dfrac{200}{19}$ et $100 \times \dfrac{5}{47} = \dfrac{500}{47}$.

Conclusion. On a $\dfrac{200}{19} < N < \dfrac{500}{47}$.

4. 1,5 pts

Comparer $\dfrac{200}{19}$ et 10, puis $\dfrac{500}{47}$ et 11. Combien de carreaux le carreleur doit-il poser pour couvrir toute la longueur du mur ?

INDICE

Méthode : étudie le signe de la différence $\dfrac{200}{19} - 10$, puis celui de $11 - \dfrac{500}{47}$.

CORRIGÉ

Comparer $\dfrac{200}{19}$ et 10.

$$\begin{aligned} \frac{200}{19} - 10 &= \frac{200 - 190}{19} \\ &= \frac{10}{19} \end{aligned}$$

Cette différence est strictement positive. D'après la comparaison par la différence, $\dfrac{200}{19} > 10$.

Comparer $\dfrac{500}{47}$ et 11.

$$\begin{aligned} 11 - \frac{500}{47} &= \frac{517 - 500}{47} \\ &= \frac{17}{47} \end{aligned}$$

Cette différence est strictement positive. D'après la comparaison par la différence, $\dfrac{500}{47} < 11$.

Encadrer N. On a $10 < \dfrac{200}{19}$, $\dfrac{200}{19} < N$, $N < \dfrac{500}{47}$ et $\dfrac{500}{47} < 11$. D'après la transitivité, $10 < N < 11$.

Conclusion. Dix carreaux entiers ne couvrent pas le mur, onze le couvrent. Le carreleur doit poser 11 carreaux : 10 entiers et un onzième coupé.

5. 1 pts

Le carreleur pourrait choisir un autre modèle : des carreaux carrés d'aire 105 cm², de côté d cm. Comparer d et 10, puis dire si dix carreaux de ce modèle suffisent pour couvrir le mur.

INDICE

Piste : compare les carrés, puis compare la longueur de dix carreaux posés bord à bord à 100 cm.

CORRIGÉ

Comparer d et 10. Les nombres d et 10 sont strictement positifs, avec $d^2 = 105$ et $10^2 = 100$. Comme $100 < 105$, d'après la propriété ordre, carrés et racines carrées, $10 < d$.

Longueur de dix carreaux. Le nombre 10 est strictement positif. Par la propriété ordre et multiplication, on multiplie les deux membres de $10 < d$ par 10 : $100 < 10d$.

Conclusion. Dix carreaux de ce modèle, posés bord à bord, mesurent $10d$ cm, donc plus de 100 cm : dix carreaux suffisent pour couvrir le mur.

Exercice 5 5 pts

Le nombre de niveaux d'un immeuble

Un géomètre mesure la hauteur totale H d'un immeuble surmonté d'une antenne, puis la hauteur a de l'antenne seule, en mètres : $31{,}6 \leq H \leq 32$ et $2{,}8 \leq a \leq 3{,}1$. La hauteur de l'immeuble sans l'antenne est $h = H - a$.

1. 0,5 pts

Encadrer $-a$.

INDICE

Début : demande-toi par quel nombre on multiplie a pour obtenir $-a$.

CORRIGÉ

On a $-a = (-1) \times a$, avec $-1 < 0$.

La propriété ordre et multiplication indique que multiplier $2{,}8 \leq a \leq 3{,}1$ par -1 change le sens : $-2{,}8 \geq -a \geq -3{,}1$.

Conclusion. Dans l'ordre croissant, $-3{,}1 \leq -a \leq -2{,}8$.

2. 1 pts

En déduire un encadrement de la hauteur h de l'immeuble sans l'antenne.

INDICE

Outil : écris h comme la somme de H et de $-a$.

CORRIGÉ

On écrit $h = H + (-a)$, avec $31{,}6 \leq H \leq 32$ et $-3{,}1 \leq -a \leq -2{,}8$.

D'après l'encadrement d'une somme, on ajoute les bornes : $31{,}6 - 3{,}1 = 28{,}5$ et $32 - 2{,}8 = 29{,}2$.

Conclusion. On a $28{,}5 \leq h \leq 29{,}2$: sans l'antenne, l'immeuble mesure entre $28{,}5$ m et $29{,}2$ m.

3. 1 pts

Peut-on affirmer que l'antenne mesure moins du dixième de la hauteur totale, c'est-à-dire que $a < \dfrac{H}{10}$?

INDICE

Piste : encadre $\dfrac{H}{10}$, puis cherche un nombre compris entre a et $\dfrac{H}{10}$.

CORRIGÉ

Encadrer $\dfrac{H}{10}$. Diviser par 10 revient à multiplier par $\dfrac{1}{10}$, nombre strictement positif. Par la propriété ordre et multiplication, le sens de $31{,}6 \leq H \leq 32$ se conserve : $3{,}16 \leq \dfrac{H}{10} \leq 3{,}2$.

Nombre intermédiaire. On a $a \leq 3{,}1$, puis $3{,}1 < 3{,}16$, puis $3{,}16 \leq \dfrac{H}{10}$. D'après la transitivité, $a < \dfrac{H}{10}$.

Conclusion. Oui : on peut affirmer que l'antenne mesure moins du dixième de la hauteur totale.

4. 1,5 pts

L'immeuble compte n niveaux, tous de même hauteur e, avec $2{,}9 \leq e \leq 3$, en mètres ; on a donc $n = \dfrac{h}{e}$. Encadrer n.

INDICE

Piste : un quotient de nombres strictement positifs s'encadre en passant par un inverse.

CORRIGÉ

On écrit $n = h \times \dfrac{1}{e}$.

Inverse. Les nombres $2{,}9$, e et 3 sont strictement positifs : $0 < 2{,}9 \leq e \leq 3$. D'après la propriété ordre et inverses, le sens change : $\dfrac{1}{3} \leq \dfrac{1}{e} \leq \dfrac{1}{2{,}9}$, avec $\dfrac{1}{2{,}9} = \dfrac{10}{29}$.

Produit. Les bornes $28{,}5$, $29{,}2$, $\dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{10}{29}$ sont strictement positives. D'après l'encadrement d'un produit, avec l'encadrement de h de la question 2 :

- $28{,}5 \times \dfrac{1}{3} = 9{,}5$;
- $29{,}2 \times \dfrac{10}{29} = \dfrac{292}{29}$.

Conclusion. On a $9{,}5 \leq n \leq \dfrac{292}{29}$.

5. 1 pts

Le nombre n est un entier. Combien l'immeuble compte-t-il de niveaux ?

INDICE

Piste : compare $\dfrac{292}{29}$ et 11 en multipliant par 29, puis cherche les entiers compris entre les bornes.

CORRIGÉ

Borne de droite. On a $29 \times 11 = 319$ et $292 < 319$. On divise par 29, nombre strictement positif : d'après la propriété ordre et multiplication, $\dfrac{292}{29} < 11$.

Encadrement strict. On a $9 < 9{,}5$ et $9{,}5 \leq n$, puis $n \leq \dfrac{292}{29}$ et $\dfrac{292}{29} < 11$. D'après la transitivité, $9 < n < 11$.

Conclusion. Le nombre n est un entier strictement compris entre 9 et 11 : c'est 10, donc l'immeuble compte 10 niveaux.