BURHAN

Ordre et opérations : exercices, entraînement

3ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/3ac/mathematiques/ordre-et-operations/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Ordre et opérations	Entraînement	7

Exercice 1

Choisir sa technique de comparaison

Pour chaque question, commence par dire quelle technique tu choisis, puis compare les deux nombres.

1.

Comparer $\frac{13}{7}$ et $\frac{15}{8}$.

INDICE

Piste : la différence se calcule vite avec le dénominateur 56.

CORRIGÉ

Technique. Les deux nombres sont des fractions : leur différence se calcule vite, avec le dénominateur commun 56.

Différence.

$$\begin{aligned}\frac{13}{7}-\frac{15}{8} &= \frac{104-105}{56}\\ &= -\frac{1}{56}\end{aligned}$$

Cette différence est strictement négative.

Conclusion. D'après la comparaison par la différence, $\frac{13}{7} < \frac{15}{8}$.

2.

Comparer $2\sqrt{13}$ et $3\sqrt{6}$.

INDICE

Piste : deux nombres strictement positifs écrits avec des racines carrées : pense à leurs carrés.

CORRIGÉ

Technique. Les nombres $2\sqrt{13}$ et $3\sqrt{6}$ sont strictement positifs : on compare leurs carrés.

Carrés.

- $(2\sqrt{13})^2 = 4\times 13 = 52$;
- $(3\sqrt{6})^2 = 9\times 6 = 54$.

On a $52 < 54$.

Conclusion. D'après la propriété ordre, carrés et racines carrées, $2\sqrt{13} < 3\sqrt{6}$.

3.

Comparer $\frac{41}{7}$ et $\sqrt{37}$.

INDICE

Piste : cherche un nombre entier placé entre les deux nombres.

CORRIGÉ

Technique. On place un nombre intermédiaire entre les deux : l'entier 6.

Comparer $\frac{41}{7}$ et 6. La différence vaut $\frac{41}{7} - 6 = \frac{41 - 42}{7} = -\frac{1}{7}$; elle est strictement négative. D'après la comparaison par la différence, $\frac{41}{7} < 6$.

Comparer 6 et $\sqrt{37}$. On a $6 = \sqrt{36}$. Les nombres 36 et 37 sont strictement positifs et $36 < 37$. D'après la propriété ordre, carrés et racines carrées, $\sqrt{36} < \sqrt{37}$, c'est-à-dire $6 < \sqrt{37}$.

Conclusion. D'après la transitivité, $\frac{41}{7} < \sqrt{37}$.

4.

En déduire la comparaison de $\frac{1}{2\sqrt{13}}$ et $\frac{1}{3\sqrt{6}}$.

INDICE

Piste : utilise le résultat de la question 2, puis passe aux inverses.

CORRIGÉ

D'après la question 2, $0 < 2\sqrt{13} < 3\sqrt{6}$: les deux nombres sont strictement positifs, donc de même signe.

La propriété ordre et inverses s'applique : entre les inverses, l'inégalité change de sens.

Conclusion. On a $\frac{1}{2\sqrt{13}} > \frac{1}{3\sqrt{6}}$.

Exercice 2

Encadrer deux expressions du premier degré

Soit x un nombre tel que $1{,}2 \leq x \leq 1{,}5$.

1.

Encadrer $3x - 2$.

INDICE

Méthode : une règle par étape. Multiplie par 3, puis retire 2.

CORRIGÉ

On passe de x à $3x - 2$ en deux étapes : multiplier par 3, puis retirer 2.

Multiplier par 3. Comme $3 > 0$, la propriété ordre et multiplication garde le sens de chaque inégalité :

$$3{,}6 \leq 3x \leq 4{,}5$$

Retirer 2. D'après la propriété ordre et addition, on retire 2 à chaque membre sans changer le sens : $3{,}6 - 2 = 1{,}6$ et $4{,}5 - 2 = 2{,}5$.

Conclusion. On a $1{,}6 \leq 3x - 2 \leq 2{,}5$.

2.

Encadrer $5 - 2x$.

INDICE

Méthode : multiplie par -2 en surveillant le sens, puis ajoute 5.

CORRIGÉ

On passe de x à $5 - 2x$ en deux étapes : multiplier par -2, puis ajouter 5.

Multiplier par -2. Comme $-2 < 0$, la propriété ordre et multiplication inverse le sens de chaque inégalité :

$$-2{,}4 \geq -2x \geq -3$$

Dans l'ordre croissant : $-3 \leq -2x \leq -2{,}4$.

Ajouter 5. D'après la propriété ordre et addition, on ajoute 5 à chaque membre : $5 - 3 = 2$ et $5 - 2{,}4 = 2{,}6$.

Conclusion. On a $2 \leq 5 - 2x \leq 2{,}6$.

3.

Calculer l'amplitude de chacun des trois encadrements : celui de x, celui de $3x - 2$ et celui de $5 - 2x$. Que remarques-tu ?

INDICE

Piste : compare chaque amplitude à celle de l'encadrement de x.

CORRIGÉ

D'après la définition de l'amplitude, on retire la borne de gauche de la borne de droite.

- Pour x : $1{,}5 - 1{,}2 = 0{,}3$.
- Pour $3x - 2$: $2{,}5 - 1{,}6 = 0{,}9$.
- Pour $5 - 2x$: $2{,}6 - 2 = 0{,}6$.

Remarque. On a $0{,}9 = 3 \times 0{,}3$ et $0{,}6 = 2 \times 0{,}3$.

Conclusion. Les amplitudes valent $0{,}3$, $0{,}9$ et $0{,}6$. Multiplier par 3 ou par -2 multiplie l'amplitude par 3 ou par 2 ; ajouter ou retirer un nombre ne la change pas.

Exercice 3

La masse volumique d'une pièce de métal

En sciences physiques, un élève pèse une petite pièce de métal et mesure son volume. Il obtient une masse m, en grammes, et un volume V, en centimètres cubes, avec $94 \leq m \leq 96$ et $12 \leq V \leq 13$. La masse volumique de la pièce est $\rho = \dfrac{m}{V}$, en grammes par centimètre cube.

1.

Encadrer $\dfrac{1}{V}$.

INDICE

Outil : la propriété ordre et inverses ; regarde le signe des bornes.

CORRIGÉ

Les nombres 12, V et 13 sont strictement positifs : $0 < 12 \leq V \leq 13$.

D'après la propriété ordre et inverses, passer aux inverses de nombres de même signe change le sens.

Conclusion. On a $\dfrac{1}{13} \leq \dfrac{1}{V} \leq \dfrac{1}{12}$.

2.

En déduire un encadrement de ρ.

INDICE

Outil : l'encadrement d'un produit, appliqué à $m \times \dfrac{1}{V}$.

CORRIGÉ

On écrit $\rho = m \times \dfrac{1}{V}$.

Conditions. Les bornes 94, 96, $\dfrac{1}{13}$ et $\dfrac{1}{12}$ sont strictement positives.

Produit. D'après l'encadrement d'un produit, on combine $94 \leq m \leq 96$ et l'encadrement de $\dfrac{1}{V}$ de la question 1 :

$$\frac{94}{13} \leq \rho \leq \frac{96}{12}$$

Conclusion. Comme $\dfrac{96}{12} = 8$, on a $\dfrac{94}{13} \leq \rho \leq 8$.

3.

La masse volumique du fer est d'environ $7{,}87$ grammes par centimètre cube. La pièce peut-elle être en fer ?

INDICE

Piste : place $7{,}87$ par rapport aux bornes $\dfrac{94}{13}$ et 8. Pour comparer à $\dfrac{94}{13}$, multiplie par 13.

CORRIGÉ

On place $7{,}87$ par rapport aux deux bornes de l'encadrement de ρ.

Borne de gauche. On a $13 \times 7{,}87 = 102{,}31$ et $94 < 102{,}31$. On divise par 13, nombre strictement positif : d'après la propriété ordre et multiplication, $\dfrac{94}{13} < 7{,}87$.

Borne de droite. On a $7{,}87 < 8$.

Conclusion. Le nombre $7{,}87$ est compris entre $\dfrac{94}{13}$ et 8 : il est dans l'encadrement de ρ, donc la pièce peut être en fer.

4.

Celle de l'aluminium est d'environ $2{,}70$ grammes par centimètre cube. La pièce peut-elle être en aluminium ?

INDICE

Piste : trouve un nombre entier placé entre $2{,}70$ et $\dfrac{94}{13}$.

CORRIGÉ

On cherche un nombre intermédiaire entre $2{,}70$ et $\dfrac{94}{13}$: l'entier 7.

Comparer 7 et $\dfrac{94}{13}$. On a $13 \times 7 = 91$ et $91 < 94$. On divise par 13, nombre strictement positif : d'après la propriété ordre et multiplication, $7 < \dfrac{94}{13}$.

Enchaîner. On a $2{,}70 < 7$, puis $7 < \dfrac{94}{13}$, puis $\dfrac{94}{13} \leq \rho$. D'après la transitivité, $\rho > 2{,}70$.

Conclusion. La masse volumique de la pièce dépasse celle de l'aluminium : la pièce n'est pas en aluminium.

Exercice 4

Une randonnée mesurée sur une carte

Sur une carte, 1 cm représente $0{,}5$ km. Une randonnée comporte deux tronçons. Sur la carte, le premier mesure a cm et le second b cm, avec $7{,}4 \leq a \leq 7{,}6$ et $4{,}8 \leq b \leq 5$.

1.

Encadrer la longueur réelle $0{,}5a$ du premier tronçon, en kilomètres.

INDICE

Outil : la propriété ordre et multiplication, avec un multiplicateur strictement positif.

CORRIGÉ

Le multiplicateur $0{,}5$ est strictement positif. Par la propriété ordre et multiplication, on multiplie chaque membre de $7{,}4 \leq a \leq 7{,}6$ par $0{,}5$ sans changer le sens :

- $0{,}5 \times 7{,}4 = 3{,}7$;
- $0{,}5 \times 7{,}6 = 3{,}8$.

Conclusion. On a $3{,}7 \leq 0{,}5a \leq 3{,}8$: le premier tronçon mesure entre $3{,}7$ km et $3{,}8$ km.

2.

Encadrer de même la longueur réelle $0{,}5b$ du second tronçon.

INDICE

Outil : la même règle, appliquée à l'encadrement de b.

CORRIGÉ

On applique la même règle à $4{,}8 \leq b \leq 5$. Le multiplicateur $0{,}5$ est strictement positif, donc la propriété ordre et multiplication conserve le sens :

- $0{,}5 \times 4{,}8 = 2{,}4$;
- $0{,}5 \times 5 = 2{,}5$.

Conclusion. On a $2{,}4 \leq 0{,}5b \leq 2{,}5$: le second tronçon mesure entre $2{,}4$ km et $2{,}5$ km.

3.

Encadrer la longueur totale de la randonnée. Le guide annonce une randonnée de moins de $6{,}5$ km : a-t-il raison ?

INDICE

Outil : l'encadrement d'une somme, puis la transitivité.

CORRIGÉ

Somme. D'après l'encadrement d'une somme, on ajoute les bornes de gauche, $3{,}7 + 2{,}4 = 6{,}1$, et les bornes de droite, $3{,}8 + 2{,}5 = 6{,}3$. On obtient $6{,}1 \leq 0{,}5a + 0{,}5b \leq 6{,}3$.

Comparer à $6{,}5$. On a $0{,}5a + 0{,}5b \leq 6{,}3$ et $6{,}3 < 6{,}5$. D'après la transitivité, $0{,}5a + 0{,}5b < 6{,}5$.

Conclusion. La randonnée mesure entre $6{,}1$ km et $6{,}3$ km, donc moins de $6{,}5$ km : le guide a raison.

Exercice 5

Deux racines carrées encadrées à la calculatrice

À la calculatrice, on lit $\sqrt{5} \approx 2{,}236068$ et $\sqrt{6} \approx 2{,}449490$.

1.

Encadrer $\sqrt{5}$ et $\sqrt{6}$ à $0{,}01$ près.

INDICE

Outil : la définition de la valeur approchée : garde deux décimales, puis ajoute $0{,}01$.

CORRIGÉ

On garde deux chiffres après la virgule, puis on ajoute $0{,}01$:

- $2{,}23 \leq \sqrt{5} \leq 2{,}24$;
- $2{,}44 \leq \sqrt{6} \leq 2{,}45$.

Conclusion. D'après la définition de la valeur approchée, à $0{,}01$ près, $2{,}23$ et $2{,}44$ sont les valeurs par défaut de $\sqrt{5}$ et de $\sqrt{6}$; $2{,}24$ et $2{,}45$ sont leurs valeurs par excès.

2.

En déduire un encadrement de $\sqrt{5} + \sqrt{6}$, puis son amplitude.

INDICE

Outil : l'encadrement d'une somme.

CORRIGÉ

Somme. D'après l'encadrement d'une somme, on ajoute les deux encadrements de la question 1 : $2{,}23 + 2{,}44 = 4{,}67$ et $2{,}24 + 2{,}45 = 4{,}69$.

Amplitude. D'après la définition de l'amplitude, elle vaut $4{,}69 - 4{,}67 = 0{,}02$.

Conclusion. On a $4{,}67 \leq \sqrt{5} + \sqrt{6} \leq 4{,}69$, encadrement d'amplitude $0{,}02$.

3.

Encadrer $\sqrt{6} - \sqrt{5}$.

INDICE

Outil : encadre d'abord $-\sqrt{5}$, puis additionne.

CORRIGÉ

On écrit $\sqrt{6} - \sqrt{5} = \sqrt{6} + (-\sqrt{5})$.

Encadrer $-\sqrt{5}$. On multiplie $2{,}23 \leq \sqrt{5} \leq 2{,}24$ par -1. Comme $-1 < 0$, la propriété ordre et multiplication renverse le sens, d'où $-2{,}24 \leq -\sqrt{5} \leq -2{,}23$.

Somme. D'après l'encadrement d'une somme, avec $2{,}44 \leq \sqrt{6} \leq 2{,}45$: $2{,}44 - 2{,}24 = 0{,}20$ et $2{,}45 - 2{,}23 = 0{,}22$.

Conclusion. On a $0{,}20 \leq \sqrt{6} - \sqrt{5} \leq 0{,}22$.

4.

Comparer $\sqrt{5}+\sqrt{6}$ et $\sqrt{22}$.

INDICE

Piste : compare $4{,}69$ et $\sqrt{22}$ grâce aux carrés, puis utilise la transitivité.

CORRIGÉ

On compare d'abord $4{,}69$ et $\sqrt{22}$, puis on utilise la question 2.

Carrés. Les nombres $4{,}69$ et $\sqrt{22}$ sont strictement positifs. On a $4{,}69^2 = 21{,}9961$ et $(\sqrt{22})^2 = 22$, avec $21{,}9961 < 22$. D'après la propriété ordre, carrés et racines carrées, $4{,}69 < \sqrt{22}$.

Enchaîner. D'après la question 2, $\sqrt{5}+\sqrt{6} \leq 4{,}69$. Avec $4{,}69 < \sqrt{22}$, on conclut par la transitivité.

Conclusion. On a $\sqrt{5}+\sqrt{6} < \sqrt{22}$.

Exercice 6

La clôture d'un jardin

Un jardin rectangulaire a une longueur L et une largeur ℓ, en mètres, mesurées avec une erreur d'au plus 1 dm : $12{,}4 \leq L \leq 12{,}6$ et $7{,}8 \leq \ell \leq 8$.

1.

Encadrer le périmètre $P = 2(L + \ell)$ du jardin.

INDICE

Méthode : encadre d'abord $L + \ell$, puis multiplie par 2.

CORRIGÉ

On encadre d'abord $L + \ell$, puis on multiplie par 2.

Somme. D'après l'encadrement d'une somme : $12{,}4 + 7{,}8 = 20{,}2$ et $12{,}6 + 8 = 20{,}6$, donc $20{,}2 \leq L + \ell \leq 20{,}6$.

Multiplier par 2. Le nombre 2 est strictement positif. Par la propriété ordre et multiplication, le sens se conserve : $2 \times 20{,}2 = 40{,}4$ et $2 \times 20{,}6 = 41{,}2$.

Conclusion. On a $40{,}4 \leq P \leq 41{,}2$: le périmètre du jardin est compris entre $40{,}4$ m et $41{,}2$ m.

2.

Le grillage est vendu en rouleaux de 10 m. Combien de rouleaux faut-il acheter pour être sûr de clôturer tout le jardin ?

INDICE

Piste : raisonne avec la borne de droite du périmètre.

CORRIGÉ

Le grillage doit suffire même dans le cas le plus long : on raisonne avec la borne $41{,}2$ m.

Quatre rouleaux. Ils font $4 \times 10 = 40$ m. Le périmètre peut atteindre $41{,}2$ m et $40 < 41{,}2$: quatre rouleaux peuvent ne pas suffire.

Cinq rouleaux. Ils font 50 m. On a $P \leq 41{,}2$ et $41{,}2 < 50$. D'après la transitivité, $P < 50$: cinq rouleaux suffisent dans tous les cas.

Conclusion. Pour être sûr de clôturer tout le jardin, il faut acheter 5 rouleaux.

3.

Encadrer l'aire $A = L \times \ell$ du jardin.

INDICE

Outil : l'encadrement d'un produit ; vérifie d'abord le signe des bornes.

CORRIGÉ

Conditions. Les bornes $12{,}4$, $12{,}6$, $7{,}8$ et 8 sont strictement positives.

Produit. D'après l'encadrement d'un produit, on multiplie les bornes de gauche entre elles, puis les bornes de droite :

- $12{,}4 \times 7{,}8 = 96{,}72$;
- $12{,}6 \times 8 = 100{,}8$.

Conclusion. On a $96{,}72 \leq A \leq 100{,}8$: l'aire du jardin est comprise entre $96{,}72$ m² et $100{,}8$ m².

Exercice 7

Le plein de carburant

Après un plein, le réservoir d'une voiture contient v litres de carburant, avec $42 \leq v \leq 45$. Avec ce plein, la voiture parcourt d kilomètres, avec $600 \leq d \leq 625$. Le litre de carburant coûte p dirhams, avec $13 \leq p \leq 14$.

1.

Encadrer le prix vp du plein.

INDICE

Outil : l'encadrement d'un produit de nombres strictement positifs.

CORRIGÉ

Conditions. Les bornes 42, 45, 13 et 14 sont strictement positives.

Produit. D'après l'encadrement d'un produit : $42 \times 13 = 546$ et $45 \times 14 = 630$.

Conclusion. On a $546 \leq vp \leq 630$: le plein coûte entre 546 et 630 dirhams.

2.

Encadrer $\dfrac{1}{d}$, puis $100v$.

INDICE

Outil : la propriété ordre et inverses pour $\dfrac{1}{d}$; regarde le signe du multiplicateur pour $100v$.

CORRIGÉ

Inverse. Les nombres 600, d et 625 sont strictement positifs : $0 < 600 \leq d \leq 625$. D'après la propriété ordre et inverses, le sens change.

Multiplier par 100. Le nombre 100 est strictement positif. Par la propriété ordre et multiplication, on multiplie chaque membre de $42 \leq v \leq 45$ par 100 sans changer le sens.

Conclusion. On a $\dfrac{1}{625} \leq \dfrac{1}{d} \leq \dfrac{1}{600}$ et $4\,200 \leq 100v \leq 4\,500$.

3.

En déduire un encadrement de la consommation $C = \dfrac{100v}{d}$, en litres pour 100 km.

INDICE

Outil : écris C comme le produit de $100v$ par $\dfrac{1}{d}$.

CORRIGÉ

On écrit $C = 100v \times \dfrac{1}{d}$.

Conditions. Les bornes $4\,200$, $4\,500$, $\dfrac{1}{625}$ et $\dfrac{1}{600}$ sont strictement positives.

Produit. D'après l'encadrement d'un produit, avec les deux encadrements de la question 2 :

$$\frac{4\,200}{625} \leq C \leq \frac{4\,500}{600}$$

On calcule $\dfrac{4\,200}{625} = 6{,}72$ et $\dfrac{4\,500}{600} = 7{,}5$.

Conclusion. On a $6{,}72 \leq C \leq 7{,}5$: la voiture consomme entre $6{,}72$ et $7{,}5$ litres pour 100 km.

4.

Le constructeur annonce une consommation inférieure à 8 litres pour 100 km. Est-ce compatible avec la question 3 ?

INDICE

Piste : compare la borne de droite de l'encadrement de C à 8.

CORRIGÉ

D'après la question 3, $C \leq 7{,}5$. De plus, $7{,}5 < 8$. D'après la transitivité, $C < 8$.

Conclusion. Oui : la consommation reste inférieure à 8 litres pour 100 km, comme l'annonce le constructeur.