BURHAN

Ordre et opérations : exercices, application

3ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/3ac/mathematiques/ordre-et-operations/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Ordre et opérations	Application	8

Exercice 1

Trois comparaisons par la différence

Dans chaque question, calcule la différence des deux nombres, puis conclus grâce à son signe.

1.

Comparer $\frac{9}{14}$ et $\frac{2}{3}$.

INDICE

Outil : la comparaison par la différence. Écris les deux fractions avec le dénominateur 42.

CORRIGÉ

On étudie le signe de la différence des deux nombres.

Différence. On réduit les deux fractions au dénominateur commun 42 :

$$\begin{aligned}\frac{9}{14}-\frac{2}{3} &= \frac{27}{42}-\frac{28}{42}\\ &= -\frac{1}{42}\end{aligned}$$

Signe. Le nombre $-\frac{1}{42}$ est strictement négatif.

Conclusion. D'après la comparaison par la différence, $\frac{9}{14} < \frac{2}{3}$.

2.

Soit x un nombre. Développer $(x+3)^2$ et $x(x+6)$, puis comparer ces deux expressions.

INDICE

Outil : après le développement, calcule la différence des deux expressions.

CORRIGÉ

Soit x un nombre.

Développer. On développe chaque expression :

- $(x+3)^2 = x^2+6x+9$;
- $x(x+6) = x^2+6x$.

Différence. Les termes x^2 et $6x$ disparaissent dans la différence. Il reste $(x+3)^2 - x(x+6) = 9$, et $9 > 0$.

Conclusion. D'après la comparaison par la différence, pour tout nombre x, on a $(x+3)^2 > x(x+6)$.

3.

Comparer $2{,}35$ et $\dfrac{47}{20}$.

INDICE

Outil : écris $\dfrac{47}{20}$ avec le dénominateur 100.

CORRIGÉ

Écriture décimale. On multiplie le numérateur et le dénominateur de $\dfrac{47}{20}$ par 5 :

$$\frac{47}{20} = \frac{235}{100} = 2{,}35$$

Différence. On a donc $2{,}35 - \dfrac{47}{20} = 0$: la différence est nulle.

Conclusion. D'après la comparaison par la différence, $2{,}35 = \dfrac{47}{20}$: les deux écritures désignent le même nombre.

Exercice 2

Températures d'un jour d'hiver

Un matin d'hiver, à Ifrane, la température t, en degrés Celsius, vérifie $t \leq -3$. À midi, la température a monté de 7 degrés. Le soir, elle a baissé de 5 degrés par rapport à midi.

1.

Écrire la température de midi à l'aide de t, puis donner une inégalité qu'elle vérifie.

INDICE

Outil : la propriété ordre et addition : ajoute le même nombre aux deux membres.

CORRIGÉ

La température a monté de 7 degrés : à midi, elle vaut $t + 7$.

D'après la propriété ordre et addition, on ajoute 7 aux deux membres de $t \leq -3$ sans changer le sens :

$$t + 7 \leq -3 + 7$$

Conclusion. À midi, la température $t + 7$ vérifie $t + 7 \leq 4$: il fait au plus 4 degrés.

2.

Même travail pour la température du soir.

INDICE

Outil : retire 5 aux deux membres de l'inégalité obtenue à la question 1.

CORRIGÉ

Le soir, la température a baissé de 5 degrés par rapport à midi. Elle vaut :

$$t + 7 - 5 = t + 2$$

D'après la propriété ordre et addition, on retire 5 aux deux membres de $t + 7 \leq 4$; le sens reste le même.

Conclusion. La température du soir $t + 2$ vérifie $t + 2 \leq -1$.

3.

Le soir, peut-on être sûr qu'il gèle, c'est-à-dire que la température est strictement inférieure à 0 degré ?

INDICE

Outil : la transitivité, avec le nombre intermédiaire -1.

CORRIGÉ

On compare $t+2$ à 0 en passant par le nombre intermédiaire -1.

D'après la question 2, $t+2 \leq -1$. De plus, $-1 < 0$.

D'après la transitivité, on obtient $t+2 < 0$.

Conclusion. Oui : le soir, la température est strictement négative, donc il gèle.

Exercice 3

Multiplier ou diviser par un nombre négatif

Soit p un nombre tel que $p \leq 6$.

1.

Comparer $3p$ et 18.

INDICE

Outil : la propriété ordre et multiplication. Quel est le signe de 3 ?

CORRIGÉ

Le multiplicateur 3 est strictement positif.

D'après la propriété ordre et multiplication, on multiplie les deux membres de $p \leq 6$ par 3 sans changer le sens :

$$3p \leq 3 \times 6$$

Conclusion. On a $3p \leq 18$.

2.

Comparer $-5p$ et -30.

INDICE

Outil : la même propriété ; cette fois, le multiplicateur est strictement négatif.

CORRIGÉ

Le multiplicateur -5 est strictement négatif.

La propriété ordre et multiplication dit alors que multiplier les deux membres de $p \leq 6$ par -5 change le sens :

$$-5p \geq -5 \times 6$$

Conclusion. On a $-5p \geq -30$.

3.

Comparer $\frac{p}{-2}$ et -3.

INDICE

Outil : diviser par -2, c'est multiplier par $-\frac{1}{2}$.

CORRIGÉ

Diviser par -2, c'est multiplier par $-\frac{1}{2}$, un nombre strictement négatif.

Avec la propriété ordre et multiplication, le sens de $p \leq 6$ s'inverse :

$$\frac{p}{-2} \geq \frac{6}{-2}$$

Conclusion. On a $\frac{p}{-2} \geq -3$.

4.

Comparer $p+2$ et 8.

INDICE

Outil : la propriété ordre et addition.

CORRIGÉ

D'après la propriété ordre et addition, on ajoute 2 aux deux membres de $p \leq 6$. Ajouter un nombre ne change pas le sens :

$$p+2 \leq 6+2$$

Conclusion. On a $p+2 \leq 8$.

Exercice 4

Membre à membre : quand en a-t-on le droit ?

Nadia prépare une course à pied en deux étapes. La première dure d_1 minutes, avec $d_1 \leq 18$. La seconde dure d_2 minutes, avec $d_2 \leq 25$.

1.

Que peut-on dire de la durée totale $d_1 + d_2$ de la course ?

INDICE

Outil : l'addition membre à membre de deux inégalités de même sens.

CORRIGÉ

Les inégalités $d_1 \leq 18$ et $d_2 \leq 25$ ont le même sens.

Par addition membre à membre, on ajoute les membres de gauche entre eux et les membres de droite entre eux :

$$d_1 + d_2 \leq 18 + 25$$

Conclusion. On a $d_1 + d_2 \leq 43$: la course de Nadia dure au plus 43 minutes.

2.

Soit a et b deux nombres tels que $0 \leq a \leq 1{,}5$ et $0 \leq b \leq 4$. Justifier que $ab \leq 6$.

INDICE

Outil : la multiplication membre à membre. Vérifie d'abord le signe des nombres.

CORRIGÉ

Conditions. La multiplication membre à membre demande des nombres positifs ou nuls. Ici, a, $1{,}5$, b et 4 sont positifs ou nuls.

Produit. On multiplie $a \leq 1{,}5$ et $b \leq 4$ membre à membre :

$$ab \leq 1{,}5 \times 4$$

Conclusion. Comme $1{,}5 \times 4 = 6$, on a bien $ab \leq 6$.

3.

Rayan écrit : « $-6 \leq -2$ et $-3 \leq 1$. En multipliant membre à membre, j'obtiens $18 \leq -2$. » Où est son erreur ?

INDICE

Outil : relis les conditions de la multiplication membre à membre, puis calcule les deux produits.

CORRIGÉ

Produits. On calcule les deux produits de Rayan : $(-6) \times (-3) = 18$ et $(-2) \times 1 = -2$.

Or $18 > -2$: l'inégalité $18 \leq -2$ est fausse.

Règle. La multiplication membre à membre exige quatre nombres positifs ou nuls. Ici, -6, -2 et -3 sont strictement négatifs.

Conclusion. L'erreur de Rayan : il a multiplié membre à membre des inégalités qui contiennent des nombres strictement négatifs, alors que la règle l'interdit.

Exercice 5

Ranger des racines carrées

1.

Comparer $\sqrt{13}$ et $\sqrt{15}$.

INDICE

Outil : la propriété ordre, carrés et racines carrées.

CORRIGÉ

Les nombres 13 et 15 sont strictement positifs, et $13 < 15$.

D'après la propriété ordre, carrés et racines carrées, prendre la racine carrée de deux nombres positifs ou nuls garde leur ordre.

Conclusion. On a $\sqrt{13} < \sqrt{15}$.

2.

Comparer $3\sqrt{5}$ et $\sqrt{46}$.

INDICE

Outil : calcule le carré de chaque nombre ; les deux nombres sont strictement positifs.

CORRIGÉ

Ces deux nombres sont strictement positifs ; comparons leurs carrés.

Carrés.

- $(3\sqrt{5})^2 = 9 \times 5 = 45$;
- $(\sqrt{46})^2 = 46$.

On a $45 < 46$.

Conclusion. D'après la propriété ordre, carrés et racines carrées, $3\sqrt{5} < \sqrt{46}$.

3.

Sans calculatrice, ranger dans l'ordre croissant les nombres $\sqrt{30}$, $5{,}5$ et $2\sqrt{6}$.

INDICE

Outil : compare les carrés de ces trois nombres strictement positifs.

CORRIGÉ

Les trois nombres sont strictement positifs : on les range en rangeant leurs carrés.

Carrés.

- $(\sqrt{30})^2 = 30$;
- $5{,}5^2 = 30{,}25$;
- $(2\sqrt{6})^2 = 4 \times 6 = 24$.

Rangement des carrés. On a $24 < 30 < 30{,}25$.

Conclusion. D'après la propriété ordre, carrés et racines carrées, les nombres sont rangés comme leurs carrés : $2\sqrt{6} < \sqrt{30} < 5{,}5$.

Exercice 6

Passer aux inverses

1.

Soit u un nombre tel que $3 \leq u \leq 8$. Encadrer $\dfrac{1}{u}$.

INDICE

Outil : la propriété ordre et inverses. Quel est le signe de 3, de u et de 8 ?

CORRIGÉ

Les nombres 3, u et 8 sont strictement positifs, donc de même signe :

$$0 < 3 \leq u \leq 8$$

D'après la propriété ordre et inverses, passer aux inverses de nombres de même signe change le sens des inégalités.

Conclusion. On obtient $\dfrac{1}{8} \leq \dfrac{1}{u} \leq \dfrac{1}{3}$.

2.

On a $0 < \sqrt{13} < \sqrt{14}$. Comparer $\dfrac{1}{\sqrt{13}}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{14}}$.

INDICE

Outil : la propriété ordre et inverses ; les deux racines sont strictement positives.

CORRIGÉ

Les nombres $\sqrt{13}$ et $\sqrt{14}$ sont strictement positifs, donc de même signe, et $\sqrt{13} < \sqrt{14}$.

D'après la propriété ordre et inverses, le sens change quand on passe aux inverses.

Conclusion. On a $\dfrac{1}{\sqrt{13}} > \dfrac{1}{\sqrt{14}}$.

3.

Comparer $\dfrac{1}{16}$ et $\dfrac{1}{17}$, puis $\dfrac{9}{16}$ et $\dfrac{9}{17}$.

INDICE

Outil : pour la seconde comparaison, remarque que $\dfrac{9}{16} = 9 \times \dfrac{1}{16}$.

CORRIGÉ

Inverses. Les nombres 16 et 17 sont strictement positifs et $16 < 17$. D'après la propriété ordre et inverses, le sens change : $\dfrac{1}{16} > \dfrac{1}{17}$.

Multiplier par 9. On a $\dfrac{9}{16} = 9 \times \dfrac{1}{16}$ et $\dfrac{9}{17} = 9 \times \dfrac{1}{17}$. Comme $9 > 0$, la propriété ordre et multiplication conserve le sens.

Conclusion. On a $\dfrac{1}{16} > \dfrac{1}{17}$, puis $\dfrac{9}{16} > \dfrac{9}{17}$.

Exercice 7

Le budget d'une sortie

Pour une sortie, Hamza prévoit d dirhams de transport et r dirhams de repas, avec $35 \leq d \leq 45$ et $50 \leq r \leq 70$.

1.

Encadrer la dépense totale $d + r$.

INDICE

Outil : l'encadrement d'une somme : additionne les bornes membre à membre.

CORRIGÉ

D'après l'encadrement d'une somme, on ajoute $35 \leq d \leq 45$ et $50 \leq r \leq 70$ par addition membre à membre :

- bornes de gauche : $35 + 50 = 85$;
- bornes de droite : $45 + 70 = 115$.

Conclusion. On a $85 \leq d + r \leq 115$: la sortie coûte entre 85 et 115 dirhams.

2.

Encadrer $-d$, puis l'écart $r - d$ entre le repas et le transport.

INDICE

Outil : $-d$ s'obtient en multipliant d par -1 ; ensuite, $r - d = r + (-d)$.

CORRIGÉ

Encadrer $-d$. On multiplie $35 \leq d \leq 45$ par -1. Comme $-1 < 0$, la propriété ordre et multiplication oblige à inverser le sens : $-35 \geq -d \geq -45$, c'est-à-dire $-45 \leq -d \leq -35$.

Encadrer $r - d$. On écrit $r - d = r + (-d)$. D'après l'encadrement d'une somme, avec $50 \leq r \leq 70$:

- bornes de gauche : $50 + (-45) = 5$;
- bornes de droite : $70 + (-35) = 35$.

Conclusion. On a $5 \leq r - d \leq 35$: le repas coûte de 5 à 35 dirhams de plus que le transport.

3.

Calculer l'amplitude de l'encadrement de $d + r$. La comparer aux amplitudes des encadrements de d et de r.

INDICE

Outil : la définition de l'amplitude : borne de droite moins borne de gauche.

CORRIGÉ

D'après la définition de l'amplitude, on retire la borne de gauche de la borne de droite.

- Pour $d + r$: $115 - 85 = 30$.
- Pour d : $45 - 35 = 10$.
- Pour r : $70 - 50 = 20$.

Conclusion. L'encadrement de $d + r$ a pour amplitude 30. Comme $10 + 20 = 30$, elle est égale à la somme des amplitudes des encadrements de d et de r.

Exercice 8

Valeurs approchées d'une racine carrée

À la calculatrice, on lit $\sqrt{13} \approx 3{,}605551$.

1.

Donner les valeurs approchées par défaut et par excès de $\sqrt{13}$ à $0{,}01$ près.

INDICE

Outil : la définition de la valeur approchée. Garde deux chiffres après la virgule.

CORRIGÉ

La calculatrice affiche $\sqrt{13} \approx 3{,}605551$. On garde deux chiffres après la virgule, puis on ajoute $0{,}01$: $3{,}60 \leq \sqrt{13} \leq 3{,}61$. Cet encadrement a pour amplitude $0{,}01$.

Conclusion. D'après la définition de la valeur approchée, à $0{,}01$ près, $3{,}60$ est la valeur approchée de $\sqrt{13}$ par défaut et $3{,}61$ sa valeur approchée par excès.

2.

Même question à $0{,}1$ près.

INDICE

Outil : même définition ; garde cette fois un seul chiffre après la virgule.

CORRIGÉ

On garde cette fois un seul chiffre après la virgule, puis on ajoute $0{,}1$: $3{,}6 \leq \sqrt{13} \leq 3{,}7$.

Conclusion. D'après la définition de la valeur approchée, à $0{,}1$ près, la valeur approchée de $\sqrt{13}$ par défaut est $3{,}6$ et sa valeur approchée par excès est $3{,}7$.

3.

Contrôler l'encadrement de la question 2 sans calculatrice, à l'aide des carrés.

INDICE

Outil : calcule $3{,}6^2$ et $3{,}7^2$, puis compare-les à 13.

CORRIGÉ

Carrés. On calcule $3{,}6^2 = 12{,}96$ et $3{,}7^2 = 13{,}69$. On a donc $12{,}96 \leq 13 \leq 13{,}69$.

Racines carrées. Ces trois nombres sont strictement positifs. D'après la propriété ordre, carrés et racines carrées, leurs racines carrées gardent cet ordre : $\sqrt{12{,}96} \leq \sqrt{13} \leq \sqrt{13{,}69}$.

Conclusion. Comme $\sqrt{12{,}96} = 3{,}6$ et $\sqrt{13{,}69} = 3{,}7$, on retrouve sans calculatrice $3{,}6 \leq \sqrt{13} \leq 3{,}7$.