BURHAN

Ordre et opérations

3ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/3ac/mathematiques/ordre-et-operations/cours

Chapitre	Semestre
Ordre et opérations	Semestre 1

Quel paquet est le moins cher ?

À l'épicerie du quartier, deux paquets de thé vert sont côte à côte. Le petit pèse 250 g et coûte 18 dirhams. Le grand pèse 400 g et coûte 30 dirhams.

Le grand paquet coûte plus cher, c'est normal. Mais est-il plus cher **pour la même masse** de thé ?

Devine : Une prédiction

Pour un gramme de thé, quel paquet est le moins cher ?

A. Le grand paquet.

Faux.
Un grand format n'est pas toujours le plus avantageux : calcule le prix d'un gramme.

B. Le petit paquet.

Juste.
Juste : un gramme du petit paquet coûte un peu moins.

C. Les deux, au même prix.

Faux.
Les prix d'un gramme sont proches, mais ils ne sont pas égaux.

Correction

Prix d'un gramme du petit paquet : $\frac{18}{250} = 0{,}072$ dirham. Prix d'un gramme du grand : $\frac{30}{400} = 0{,}075$ dirham.

Comme $0{,}072 < 0{,}075$, le petit paquet est le moins cher pour la même masse. L'écart est faible : il fallait comparer avec soin.

Comparer deux nombres proches : c'est le cœur de ce chapitre. Tu vas apprendre plusieurs techniques pour comparer, et choisir la bonne.

Tu vas aussi **encadrer** un nombre mal connu, c'est-à-dire le placer entre deux nombres connus. Une masse lue sur une balance, une durée de trajet, une racine carrée : tout cela s'encadre.

Comparer deux nombres

Le signe d'une différence

Rappel de 2AC : pour comparer deux fractions, tu les écris avec le même dénominateur. Par exemple, $\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$ et $\frac{4}{5} = \frac{16}{20}$. Donc $\frac{3}{4} < \frac{4}{5}$.

Devine : Le plus grand moins le plus petit

Tu sais que $\frac{4}{5}$ est le plus grand des deux nombres. Quel est le signe de la différence $\frac{4}{5} - \frac{3}{4}$?

A. Elle est strictement positive.

Juste.

Juste : on retire un nombre plus petit, il reste un nombre strictement positif.

B. Elle est strictement négative.

Faux.

Ce serait le cas pour $\frac{3}{4} - \frac{4}{5}$, dans l'autre ordre.

C. Elle est nulle.

Faux.

Une différence nulle voudrait dire que les deux nombres sont égaux.

Correction

On calcule la différence avec le dénominateur commun 20 :

$$\begin{aligned}\frac{4}{5} - \frac{3}{4} &= \frac{16}{20} - \frac{15}{20} \\ &= \frac{1}{20}\end{aligned}$$

Ce nombre est strictement positif.

Dans l'autre ordre, $\frac{3}{4} - \frac{4}{5} = -\frac{1}{20}$, strictement négatif. Le signe de la différence dit lequel est le plus grand.

Comparer par la différence

Propriété : Comparer deux nombres par leur différence

Pour comparer deux nombres a et b, on étudie le signe de leur différence $a - b$:

- si $a - b > 0$, alors $a > b$;
- si $a - b < 0$, alors $a < b$;
- si $a - b = 0$, alors $a = b$.

Remarque : Propriété admise

Ce résultat est admis. Tu l'as observé avec $\frac{4}{5}$ et $\frac{3}{4}$: le plus grand moins le plus petit donne un nombre strictement positif.

Exemple : le prix d'un gramme de thé

Reprends les deux paquets de thé. On compare $\frac{18}{250}$ et $\frac{30}{400}$ par leur différence.

Un dénominateur commun est $2\,000$: $\frac{18}{250} = \frac{144}{2\,000}$ et $\frac{30}{400} = \frac{150}{2\,000}$.

$$\begin{aligned} &\frac{18}{250} - \frac{30}{400} \\ &= \frac{144}{2\,000} - \frac{150}{2\,000} \\ &= -\frac{6}{2\,000} \end{aligned}$$

La différence est strictement négative. D'après la comparaison par la différence, $\frac{18}{250} < \frac{30}{400}$.

Tu retrouves le résultat de l'entrée, avec un calcul exact.

Exemple : comparer deux expressions

Soit a un nombre. Comparons $3(a+2)$ et $3a+5$. On développe, puis on réduit leur différence :

$$\begin{aligned} &3(a+2) - (3a+5) \\ &= 3a + 6 - 3a - 5 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Pour tout nombre a, la différence vaut 1 : elle est strictement positive. D'après la comparaison par la différence, $3(a+2) > 3a+5$.

Vérifie : La conclusion de Lina

Lina compare $\frac{7}{9}$ et $\frac{4}{5}$. Elle trouve $\frac{7}{9} - \frac{4}{5} = -\frac{1}{45}$. Que doit-elle conclure ?

A. $\frac{7}{9} = \frac{4}{5}$, car l'écart est minuscule.
Faux.
Un écart minuscule n'est pas un écart nul : seul 0 donne l'égalité.

B. $\frac{7}{9} > \frac{4}{5}$, car $7 > 4$.
Faux.
Comparer les numérateurs seuls ne suffit pas : les dénominateurs diffèrent.

C. $\frac{7}{9} < \frac{4}{5}$, car la différence est négative.
Juste.

Juste : seul le signe de la différence compte.

Correction

On vérifie avec le dénominateur commun 45 :

$$\begin{aligned}\frac{7}{9}-\frac{4}{5} &= \frac{35}{45}-\frac{36}{45}\\ &= -\frac{1}{45}\end{aligned}$$

La différence est strictement négative. D'après la comparaison par la différence, $\frac{7}{9} < \frac{4}{5}$.

Un nombre intermédiaire

Devine : Un nombre entre les deux

On veut comparer $\frac{13}{14}$ et $\frac{15}{13}$ sans long calcul. Quel nombre simple peut-on glisser entre eux ?

A. Le nombre 1.

Juste.

Juste : une fraction est sous 1, l'autre au-dessus.

B. Le nombre 0.

Faux.

Les deux fractions sont strictement positives : 0 est plus petit que les deux.

C. Le nombre 2.

Faux.

Les deux fractions sont plus petites que 2 : il ne les sépare pas.

Correction

Comme $13 < 14$, on a $\frac{13}{14} < 1$. Comme $15 > 13$, on a $\frac{15}{13} > 1$.

Le nombre 1 est placé entre les deux :

$$\frac{13}{14} < 1 < \frac{15}{13}$$

Donc $\frac{13}{14} < \frac{15}{13}$.

Propriété : Transitivité

Soit a, b et c trois nombres. Si $a < b$ et $b < c$, alors $a < c$.

La propriété reste vraie avec $\leq$. Si l'une des deux inégalités est stricte, la conclusion est stricte : si $a \leq b$ et $b < c$, alors $a < c$.

Elle permet de comparer deux nombres grâce à un **nombre intermédiaire** placé entre eux.

Remarque : Propriété admise

Ce résultat est admis. Tu l'as observé avec $\frac{13}{14} < 1$ et $1 < \frac{15}{13}$. Sur une droite graduée, le premier nombre est à gauche du deuxième, lui-même à gauche du troisième.

Exemple : un intermédiaire lu à la calculatrice

Comparons $\sqrt{7}$ et $\frac{8}{3}$. La calculatrice affiche $\sqrt{7} \approx 2{,}6457513$. Donc $\sqrt{7} < 2{,}65$.

De plus, $2{,}65 = \frac{265}{100} = \frac{53}{20}$. On calcule une différence :

$$\begin{aligned} \frac{8}{3} - 2{,}65 &= \frac{8}{3} - \frac{53}{20} \\ &= \frac{1}{60} \end{aligned}$$

Elle est strictement positive, donc $2{,}65 < \frac{8}{3}$.

D'après la transitivité, $\sqrt{7} < \frac{8}{3}$.

À toi : Deux fractions très proches

Compare $\frac{11}{12}$ et $\frac{12}{13}$ par le signe de leur différence. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Calcule la différence $\frac{11}{12} - \frac{12}{13}$.

Indice 2

Écris les deux fractions avec un dénominateur commun à 12 et à 13.

Indice 3

Point délicat : la différence est très petite, mais elle n'est pas nulle. Seul son signe compte.

Réponse

Un dénominateur commun à 12 et à 13 est 156 :

$$\begin{aligned} &\frac{11}{12} - \frac{12}{13} \\ &= \frac{143}{156} - \frac{144}{156} \\ &= -\frac{1}{156} \end{aligned}$$

La différence est strictement négative. D'après la comparaison par la différence, $\frac{11}{12} < \frac{12}{13}$.

Ordre, addition et multiplication

Ajouter ou retirer un même nombre

Rappel de 2AC : dans $3 < 5$, chaque côté du signe s'appelle un **membre**. Ajouter un même nombre aux deux membres d'une inégalité garde son sens. Multiplier les deux membres par un même nombre strictement positif aussi.

Cette année, tu vas aussi retirer un nombre, et multiplier par un nombre strictement négatif.

Vérifie : Des âges qui avancent ensemble

Yassine a 13 ans et son frère Omar a 16 ans. Il y a 5 ans, lequel des deux était le plus jeune ?

A. Omar.
Faux.
Omar est né avant Yassine : il a toujours été le plus âgé.

B. Ils avaient le même âge.
Faux.
L'écart entre deux âges ne change jamais : il reste de 3 ans.

C. Yassine.
Juste.
Juste : retirer 5 ans aux deux âges garde l'ordre.

Correction
On calcule : $13 - 5 = 8$ et $16 - 5 = 11$. Comme $8 < 11$, Yassine était le plus jeune.

On est parti de $13 < 16$ et on a obtenu $13 - 5 < 16 - 5$: retirer 5 aux deux membres garde le sens.

Propriété : Ordre et addition

Soit a, b et c trois nombres. Si $a \leq b$, alors $a + c \leq b + c$ et $a - c \leq b - c$.

Ajouter ou soustraire un même nombre aux deux membres d'une inégalité **conserve son sens**. La propriété reste vraie avec $<$.

Remarque : Propriété admise

Ce résultat est admis. Tu l'as observé avec les âges : retirer 5 aux deux nombres garde le même écart, donc le même sens.

Multiplier par un nombre négatif

Devine : Multiplier par un nombre négatif

On part de l'inégalité vraie $3 < 5$. On multiplie les deux membres par -2. Quelle inégalité obtient-on ?

A. $-6 < -10$

Faux.

Faux : sur une droite graduée, -10 est à gauche de -6.

B. $-6 > -10$

Juste.

Juste : le sens a changé.

C. $6 < 10$

Faux.

Le produit de 3 par -2 est négatif : c'est -6, pas 6.

Correction

On calcule : $3 \times (-2) = -6$ et $5 \times (-2) = -10$.

Sur une droite graduée, -10 est à gauche de -6. Donc $-6 > -10$: multiplier par -2 a changé le sens.

Propriété : Ordre et multiplication

Soit a, b et c trois nombres, avec $a \leq b$.

- Si $c > 0$, alors $ac \leq bc$: multiplier les deux membres par un nombre **strictement positif** conserve le sens.
- Si $c < 0$, alors $ac \geq bc$: multiplier les deux membres par un nombre **strictement négatif** change le sens.

Diviser par c, c'est multiplier par $\frac{1}{c}$, qui a le même signe que c : la même règle s'applique à la division.

Remarque : Propriété admise

Ce résultat est admis. Tu l'as observé avec $3 < 5$: multiplier par -2 donne $-6 > -10$.

Exemple : multiplier par un nombre négatif

Soit x un nombre tel que $x \leq 4$. On multiplie les deux membres par -5.

D'après la propriété ordre et multiplication, -5 est strictement négatif, donc le sens change : $-5x \geq -20$.

Exemple : diviser par un nombre négatif

Soit y un nombre tel que $y \geq 6$. On divise les deux membres par -3.

Diviser par -3 revient à multiplier par $-\frac{1}{3}$. Ce facteur est strictement négatif. D'après la propriété ordre et multiplication, il retourne le sens : $-\frac{y}{3} \leq -2$.

Un piège, puis deux règles à la suite

Attention : le sens après un nombre négatif

✗ « $x \geq 2$, donc $-4x \geq -8$. »

✓ On multiplie par -4, strictement négatif : le sens change. On écrit $-4x \leq -8$. Contrôle avec $x = 3$: $-4 \times 3 = -12$, et $-12 \leq -8$.

Exemple : de x à $2x + 3$

Soit x un nombre tel que $x < 7$. On cherche une inégalité sur $2x + 3$.

- D'après la propriété ordre et multiplication, 2 est strictement positif, donc le sens est gardé : $2x < 14$.
- D'après la propriété ordre et addition, ajouter 3 garde le sens : $2x + 3 < 17$.

Vérifie : Quelle règle, quel sens ?

Soit x un nombre tel que $x \geq 1$. Quelle inégalité est vraie pour $5 - 2x$?

A. $5 - 2x \leq -2$

Faux.
Tu as oublié d'ajouter 5 au second membre. Avec $x = 1$, on a $5 - 2x = 3$.

B. $5 - 2x \geq 3$

Faux.
Le sens n'a pas changé, or multiplier par -2 le change. Avec $x = 2$, on a $5 - 2x = 1$.

C. $5 - 2x \leq 3$

Juste.
Juste : le sens change avec -2, puis ajouter 5 le garde.

Correction
D'après la propriété ordre et multiplication, multiplier par -2, strictement négatif, change le sens : $-2x \leq -2$.

D'après la propriété ordre et addition, ajouter 5 garde le sens : $5 - 2x \leq 3$.

À toi : De x à $1 - 3x$

Soit x un nombre tel que $x > -2$. Écris une inégalité vérifiée par $1 - 3x$, en nommant chaque règle. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Commence par multiplier les deux membres par -3.
Indice 2
Ajoute ensuite 1 aux deux membres de ta nouvelle inégalité.
Indice 3
Point délicat : le sens change quand tu multiplies par -3, pas quand tu ajoutes 1.

Réponse
D'après la propriété ordre et multiplication, -3 est strictement négatif, donc le sens change : $-3x < 6$.

D'après la propriété ordre et addition, ajouter 1 garde le sens : $1 - 3x < 7$.

Additionner, multiplier membre à membre

Additionner deux inégalités

Devine : Deux inégalités ajoutées

Soit a et b deux nombres tels que $a < 3$ et $b < 5$. Que peut-on affirmer à coup sûr sur $a + b$?

A. $a + b < 2$
Faux.
Pas à coup sûr : avec $a = 1$ et $b = 2$, on a $a + b = 3$.

B. $a + b < 8$
Juste.
Juste : deux nombres plus petits donnent une somme plus petite.

C. $a + b > 8$
Faux.
Avec $a = 0$ et $b = 0$, on a $a + b = 0$, qui est sous 8.

D. On ne peut rien affirmer.
Faux.
Si : chaque nombre est limité, donc leur somme aussi.

Correction
Essaie des valeurs proches des limites : $a = 2{,}9$ et $b = 4{,}9$ donnent $a + b = 7{,}8$. La somme reste sous $3 + 5 = 8$.

On a additionné les deux inégalités **membre à membre** : on additionne les deux membres de gauche, puis les deux membres de droite. On obtient $a + b < 8$.

Propriété : Additionner membre à membre

Soit a, b, c et d quatre nombres. Si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors $a + c \leq b + d$.

On peut additionner membre à membre deux inégalités **de même sens**.

Remarque : Propriété admise

Ce résultat est admis. Tu l'as testé avec des valeurs : la somme $a + b$ reste toujours sous 8.

Exemple : additionner membre à membre

Soit x et y deux nombres tels que $x \leq 2{,}5$ et $y \leq 1{,}5$. Les deux inégalités ont le même sens.

D'après l'addition membre à membre, $x + y \leq 2{,}5 + 1{,}5$, c'est-à-dire $x + y \leq 4$.

Multiplier deux inégalités

Devine : Deux inégalités multipliées

On a $2 \leq 3$ et $4 \leq 5$, avec quatre nombres strictement positifs. Comment se rangent 2×4 et 3×5 ?

A. Ils sont égaux.
Faux.
Calcule les deux produits : ils sont différents.

B. $2 \times 4 \geq 3 \times 5$
Faux.
Les deux petits nombres donnent ici le petit produit.

C. $2 \times 4 \leq 3 \times 5$
Juste.
Juste : $8 \leq 15$.

Correction
On calcule : $2 \times 4 = 8$ et $3 \times 5 = 15$. Comme $8 \leq 15$, on a $2 \times 4 \leq 3 \times 5$.

Quand les quatre nombres sont positifs ou nuls, les petits donnent le petit produit.

Propriété : Multiplier membre à membre des nombres positifs ou nuls

Soit a, b, c et d quatre nombres. Si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$, alors $ac \leq bd$.

Cette règle exige que **les quatre nombres soient positifs ou nuls**.

Remarque : Propriété admise

Ce résultat est admis. Tu l'as observé avec $2 \times 4 \leq 3 \times 5$. La condition « positifs ou nuls » est indispensable : le piège qui suit le montre.

Exemple : multiplier membre à membre

Soit x et y deux nombres positifs ou nuls tels que $x \leq 3$ et $y \leq 2{,}5$. Les quatre nombres x, 3, y et $2{,}5$ sont positifs ou nuls.

D'après la multiplication membre à membre, $xy \leq 3 \times 2{,}5$, c'est-à-dire $xy \leq 7{,}5$.

Un piège, puis à toi

Attention : des nombres négatifs

✗ « $-3 \leq 1$ et $-6 \leq 2$, donc $(-3) \times (-6) \leq 1 \times 2$. »

✓ Ce qui est vrai : on ne multiplie membre à membre que des nombres positifs ou nuls. Contrôle : $(-3) \times (-6) = 18$, et 18 est plus grand que 2.

Vérifie : Le droit de multiplier

Dans quel cas peut-on multiplier membre à membre ?

A. $-2 \leq x \leq 1$ et $3 \leq y \leq 4$

Faux.

Le nombre -2 est strictement négatif : la règle ne s'applique pas.

B. $1 \leq x \leq 2$ et $3 \leq y \leq 4$

Juste.

Juste : les quatre nombres 1, 2, 3 et 4 sont strictement positifs.

C. $-4 \leq x \leq -1$ et $-3 \leq y \leq -2$

Faux.

Les nombres -4, -1, -3 et -2 sont strictement négatifs : la règle ne s'applique pas.

Correction

La multiplication membre à membre exige des nombres positifs ou nuls. Seul le cas $1 \leq x \leq 2$ et $3 \leq y \leq 4$ convient. On obtient alors $3 \leq xy \leq 8$.

À toi : Somme oui, produit non

Soit a et b deux nombres tels que $a \leq 4$ et $b \leq -1$. Écris une inégalité sur $a + b$. Peux-tu en écrire une sur ab par la même méthode ? Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Les deux inégalités ont le même sens : additionne-les membre à membre.
Indice 2
Pour le produit, regarde le signe de b et de -1.
Indice 3
Point délicat : -1 est strictement négatif, donc la multiplication membre à membre est interdite.

Réponse
D'après l'addition membre à membre, $a + b \leq 4 + (-1)$, c'est-à-dire $a + b \leq 3$.

Pour ab, la multiplication membre à membre est interdite : b et -1 sont strictement négatifs.

D'ailleurs, avec $a = -2$ et $b = -3$, on a $ab = 6$. Or 6 est plus grand que $4 \times (-1) = -4$.

Carrés, racines carrées, inverses

Carrés et racines carrées

Devine : Ranger des carrés

On a $1{,}5 < 2 < 3$. Dans quel ordre sont rangés leurs carrés ?

A. $3^2 < 2^2 < 1{,}5^2$
Faux.
Calcule les carrés : $3^2 = 9$ est le plus grand.

B. $1{,}5^2 < 2^2 < 3^2$
Juste.
Juste : les carrés gardent l'ordre de départ.

C. $1{,}5^2 = 2^2 < 3^2$
Faux.
Deux nombres positifs ou nuls différents ont des carrés différents.

Correction
On calcule : $1{,}5^2 = 2{,}25$, $2^2 = 4$ et $3^2 = 9$. Donc $1{,}5^2 < 2^2 < 3^2$: même ordre que $1{,}5 < 2 < 3$.

Les racines carrées aussi gardent l'ordre : $\sqrt{4} = 2$ et $\sqrt{9} = 3$, avec $2 < 3$.

Propriété : Ordre, carrés et racines carrées

Soit a et b deux nombres **positifs ou nuls**.

- Si $a \leq b$, alors $a^2 \leq b^2$ et $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.
- Réciproquement, si $a^2 \leq b^2$, ou si $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$, alors $a \leq b$.

Deux nombres positifs ou nuls, leurs carrés et leurs racines carrées sont rangés dans le même ordre. La propriété reste vraie avec $<$.

Remarque : Propriété admise

Ce résultat est admis. Tu l'as observé avec $1{,}5$, 2 et 3 : leurs carrés sont rangés dans le même ordre.

Exemple : comparer $3\sqrt{2}$ et $2\sqrt{5}$

Ici, $3\sqrt{2}$ et $2\sqrt{5}$ sont strictement positifs : comparons leurs carrés.

$$(3\sqrt{2})^2 = 9 \times 2 = 18$$
$$(2\sqrt{5})^2 = 4 \times 5 = 20$$

Comme $18 < 20$, d'après la propriété ordre, carrés et racines carrées, $3\sqrt{2} < 2\sqrt{5}$.

Attention : les carrés de nombres négatifs

✗ « $-5 < -3$, donc $(-5)^2 < (-3)^2$. »

✓ Ce qui est vrai : la règle des carrés ne vaut que pour des nombres positifs ou nuls. Contrôle : $(-5)^2 = 25$ et $(-3)^2 = 9$, donc $(-5)^2 > (-3)^2$.

Inverses

Devine : Partager une galette

On partage une galette en 4 parts égales, ou bien en 6 parts égales. Dans quel cas chaque part est-elle la plus grande ?

A. En 6 parts.

Faux.

Plus on fait de parts, plus chaque part est petite.

B. C'est pareil.

Faux.

La galette est la même, mais elle n'est pas coupée pareil.

C. En 4 parts.

Juste.

Juste : moins de parts, donc des parts plus grandes.

Correction

Une part vaut $\frac{1}{4}$ de la galette dans le premier cas, $\frac{1}{6}$ dans le second. Or $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$ et $\frac{1}{6} = \frac{2}{12}$.

On a $4 < 6$, mais $\frac{1}{4} > \frac{1}{6}$: en passant aux inverses, l'ordre s'est inversé.

Propriété : Ordre et inverses

Soit a et b deux nombres non nuls **de même signe**. Si $a \leq b$, alors $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$.

Passer aux inverses de deux nombres de même signe **change le sens** de l'inégalité. La propriété reste vraie avec $<$.

Remarque : Propriété admise

Ce résultat est admis. Tu l'as observé avec la galette : $4 < 6$, mais $\frac{1}{4} > \frac{1}{6}$.

Exemple : deux fractions de même numérateur

Comparons $\frac{5}{7}$ et $\frac{5}{9}$. On a $7 < 9$, deux nombres strictement positifs.

- D'après la propriété ordre et inverses, le sens change : $\frac{1}{7} > \frac{1}{9}$.
- D'après la propriété ordre et multiplication, multiplier par 5, strictement positif, garde le sens : $\frac{5}{7} > \frac{5}{9}$.

Attention : les inverses changent le sens

✗ « $2 < 3$, donc $\frac{1}{2} < \frac{1}{3}$. »

✓ Passer aux inverses de deux nombres de même signe change le sens : $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$. Contrôle : $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ et $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$.

Choisir sa technique

Méthode : choisir comment comparer

1. **Différence facile ?** Calcule $a - b$, puis regarde son signe.

2. **Des racines carrées ?** Si les deux nombres sont positifs ou nuls, compare leurs carrés.
3. **Des inverses, ou un même numérateur ?** Pour des inverses, les deux nombres doivent être de même signe. Pour un même numérateur, il doit être strictement positif, comme les deux dénominateurs. Compare alors les dénominateurs, puis change le sens.
4. **Rien de tout cela ?** Glisse un nombre intermédiaire entre les deux, puis conclus par la transitivité.

Exemple : quelle technique ?

- Pour $\sqrt{11}$ et 3, deux nombres strictement positifs, on compare les carrés : $11 > 9$. D'après la propriété ordre, carrés et racines carrées, $\sqrt{11} > 3$.
- Pour $\frac{1}{\sqrt{7}}$ et $\frac{1}{\sqrt{11}}$, on compare d'abord $\sqrt{7}$ et $\sqrt{11}$. Comme $7 < 11$, la propriété ordre, carrés et racines carrées donne $\sqrt{7} < \sqrt{11}$.
- Pour finir, les deux racines sont strictement positives. D'après la propriété ordre et inverses, leurs inverses sont rangés dans l'ordre contraire : $\frac{1}{\sqrt{7}} > \frac{1}{\sqrt{11}}$.

Vérifie : La technique la plus rapide

Pour comparer $\frac{3}{8}$ et $\frac{3}{11}$, quelle technique est la plus rapide ?

A. Comparer les carrés des deux fractions.

Faux.

C'est possible, mais plus long : les deux fractions ont déjà le même numérateur.

B. Chercher un nombre intermédiaire.

Faux.

C'est possible, par exemple avec $0{,}3$. Mais il faut d'abord écrire les deux fractions en nombres décimaux : comparer les dénominateurs est plus direct.

C. Comparer les dénominateurs, puis changer le sens.

Juste.

Juste : même numérateur strictement positif, dénominateurs strictement positifs, on compare 8 et 11.

Correction

Les deux fractions ont le même numérateur 3, strictement positif. On a $8 < 11$.

D'après la propriété ordre et inverses, $\frac{1}{8} > \frac{1}{11}$. En multipliant par 3, strictement positif, $\frac{3}{8} > \frac{3}{11}$.

À toi : Une racine et un entier

Compare $2\sqrt{7}$ et 5. Déduis-en une comparaison de $\dfrac{1}{2\sqrt{7}}$ et $\dfrac{1}{5}$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Les deux nombres sont strictement positifs : compare leurs carrés.
Indice 2
Calcule le carré de chaque nombre.
Indice 3
Point délicat : en passant aux inverses, le sens change.

Réponse
Les nombres $2\sqrt{7}$ et 5 sont strictement positifs. On compare leurs carrés :

$$(2\sqrt{7})^2 = 4 \times 7 = 28$$
$$5^2 = 25$$

Comme $25 < 28$, d'après la propriété ordre, carrés et racines carrées, $5 < 2\sqrt{7}$.

Ces deux nombres sont strictement positifs. D'après la propriété ordre et inverses, $\dfrac{1}{2\sqrt{7}} < \dfrac{1}{5}$.

Remarque : Coin examen : rédiger une comparaison par les carrés

En devoir, rédige ainsi : « Les nombres $\sqrt{11}$ et $3{,}3$ sont strictement positifs. On a $(\sqrt{11})^2 = 11$ et $3{,}3^2 = 10{,}89$. Comme $10{,}89 < 11$, d'après la propriété ordre, carrés et racines carrées, $3{,}3 < \sqrt{11}$. »

Annonce toujours le signe des nombres avant de comparer leurs carrés.

Encadrer un nombre, une expression

Une masse mal connue

Devine : La balance de cuisine

La balance de cuisine de Nadia affiche 350 g pour un sachet de lentilles. Sa notice dit que l'erreur est au plus de 5 g. Quelle phrase décrit la vraie masse m, en grammes ?

A. $350 \leq m \leq 355$

Faux.
La balance peut aussi afficher trop : la masse peut être sous 350 g.

B. $345 \leq m \leq 355$

Juste.
Juste : 5 g de moins ou 5 g de plus que l'affichage.

C. $345 \leq m \leq 350$

Faux.

La balance peut aussi afficher trop peu : la masse peut dépasser 350 g.

Correction

La vraie masse peut être jusqu'à 5 g sous l'affichage, ou jusqu'à 5 g au-dessus. On a $350 - 5 = 345$ et $350 + 5 = 355$.

Donc $345 \leq m \leq 355$: la masse m est placée entre deux nombres connus.

Définition : Encadrement et amplitude

Soit x un nombre. Écrire $a \leq x \leq b$, c'est **encadrer** x entre les nombres a et b.

Le nombre $b - a$ s'appelle l'**amplitude** de l'encadrement. Plus l'amplitude est petite, plus l'encadrement est précis. On encadre aussi avec des inégalités strictes, comme $a < x < b$.

Exemple : l'amplitude

Dans l'encadrement $345 \leq m \leq 355$, les nombres 345 et 355 s'appellent les **bornes**. Cet encadrement a pour amplitude $355 - 345 = 10$, en grammes.

Une balance plus fine donne $348 \leq m \leq 351$. Son amplitude est $351 - 348 = 3$ g. Ce second encadrement est plus précis.

Encadrer une expression

Méthode : transformer un encadrement

1. **Écris** l'encadrement de départ.
2. **Une règle par étape** : ajoute un nombre aux trois membres, ou multiplie-les par un nombre non nul.
3. **Vérifie le sens** à chaque étape : il change seulement avec un nombre strictement négatif.
4. **Conclus** par une phrase.

Exemple : encadrer $4x + 1$

Soit x un nombre tel que $2 \leq x \leq 3$.

- D'après la propriété ordre et multiplication, multiplier par 4, strictement positif, garde le sens : $8 \leq 4x \leq 12$.

- D'après la propriété ordre et addition, ajouter 1 garde le sens : $9 \leq 4x + 1 \leq 13$.

Donc $4x + 1$ est encadré entre 9 et 13.

Exemple : encadrer $7 - 3x$

Avec le même nombre x, tel que $2 \leq x \leq 3$:

- D'après la propriété ordre et multiplication, multiplier par -3, strictement négatif, change le sens : $-6 \geq -3x \geq -9$. On le réécrit $-9 \leq -3x \leq -6$.
- D'après la propriété ordre et addition, ajouter 7 garde le sens : $-2 \leq 7 - 3x \leq 1$.

Trouve l'erreur : L'encadrement de Sami

Sami part de $2 \leq x \leq 3$. Il écrit : « donc $-4 \leq -2x \leq -6$ ». Où est son erreur ?

A. Il n'y a aucune erreur.

Faux.

Regarde les bornes : -4 est plus grand que -6, l'encadrement est impossible.

B. Le sens doit changer : $-6 \leq -2x \leq -4$.

Juste.

Juste : multiplier par -2 change le sens.

C. Les produits sont faux : $-2 \times 3 = -5$.

Faux.

Les produits sont justes : $-2 \times 2 = -4$ et $-2 \times 3 = -6$.

Correction

Les produits -4 et -6 sont justes.

Mais d'après la propriété ordre et multiplication, multiplier par -2, strictement négatif, change le sens. On obtient $-4 \geq -2x \geq -6$, qu'on réécrit $-6 \leq -2x \leq -4$.

À toi, puis le coin examen

Vérifie : Le bon encadrement

Soit x un nombre tel que $-1 \leq x \leq 2$. Quel est l'encadrement de $5 - 2x$?

A. $3 \leq 5 - 2x \leq 9$

Faux.

Tu as multiplié par 2 au lieu de -2. Avec $x = 2$, on a $5 - 2x = 1$.

B. $1 \leq 5 - 2x \leq 7$

Juste.

Juste : le sens change avec -2, puis ajouter 5 le garde.

C. $7 \leq 5 - 2x \leq 1$

Faux.

Cet encadrement est impossible : 7 est plus grand que 1.

Correction

D'après la propriété ordre et multiplication, multiplier par -2 change le sens : $-4 \leq -2x \leq 2$.

D'après la propriété ordre et addition, ajouter 5 garde le sens : $1 \leq 5 - 2x \leq 7$.

À toi : Encadrer $\dfrac{x}{2} - 3$

Soit x un nombre tel que $1 \leq x \leq 4$. Encadre $\dfrac{x}{2} - 3$, puis donne l'amplitude de ton encadrement.

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Diviser par 2, c'est multiplier par $\dfrac{1}{2}$, qui est strictement positif.

Indice 2

Écris l'encadrement de $\dfrac{x}{2}$, puis retire 3 aux trois membres.

Indice 3

Point délicat : l'amplitude, c'est la plus grande borne moins la plus petite de ton résultat final.

Réponse

D'après la propriété ordre et multiplication, multiplier par $\dfrac{1}{2}$ garde le sens : $0{,}5 \leq \dfrac{x}{2} \leq 2$.

D'après la propriété ordre et addition, retirer 3 garde le sens : $-2{,}5 \leq \dfrac{x}{2} - 3 \leq -1$.

L'amplitude vaut $-1 - (-2{,}5) = 1{,}5$.

Remarque : Coin examen : rédiger un encadrement

En devoir, chaque ligne nomme sa règle. Écris par exemple : « On a $2 \leq x \leq 3$. D'après la propriété ordre et multiplication, comme $-3 < 0$, on obtient $-9 \leq -3x \leq -6$. D'après la propriété ordre et addition, $-2 \leq 7 - 3x \leq 1$. »

Écris toujours la plus petite borne à gauche.

Encadrer une somme, une différence

Deux ingrédients sur la balance

Devine : Une masse totale

Nadia pèse deux ingrédients : de la farine, de masse f, puis du sucre, de masse s. En grammes, $495 \leq f \leq 505$ et $195 \leq s \leq 205$. Entre quelles valeurs se trouve la masse totale $f + s$?

A. $690 \leq f + s \leq 710$

Juste.

Juste : on additionne les bornes de même côté.

B. $690 \leq f + s \leq 700$

Faux.

La borne de droite est trop petite : $505 + 205 = 710$.

C. $700 \leq f + s \leq 710$

Faux.

La borne de gauche est trop grande : $495 + 195 = 690$.

Correction

La plus petite masse totale vaut $495 + 195 = 690$ g. La plus grande vaut $505 + 205 = 710$ g.

Donc $690 \leq f + s \leq 710$: on additionne les bornes de gauche, puis les bornes de droite.

Propriété : Encadrer une somme et une différence

Soit x et y deux nombres. Si $a \leq x \leq b$ et $c \leq y \leq d$, alors :

- $a + c \leq x + y \leq b + d$;
- $a - d \leq x - y \leq b - c$.

Pour la différence, on encadre d'abord l'opposé $-y$: $-d \leq -y \leq -c$. On additionne ensuite membre à membre avec l'encadrement de x.

Remarque : Propriété admise

Ce résultat est admis. Tu l'as observé pour la masse totale : on additionne les bornes de même côté. Pour la différence, l'exemple qui suit passe par l'opposé.

Exemple : une somme

Soit x et y deux nombres tels que $1{,}2 \leq x \leq 1{,}5$ et $-3 \leq y \leq -2$.

D'après l'encadrement d'une somme et d'une différence, on additionne les bornes de même côté. À gauche, $1{,}2 + (-3) = -1{,}8$. À droite, $1{,}5 + (-2) = -0{,}5$.

$$-1{,}8 \leq x + y \leq -0{,}5$$

La différence passe par l'opposé

Méthode : encadrer une somme ou une différence

1. **Aligne** les deux encadrements, l'un sous l'autre.
2. **Pour une somme**, additionne les deux bornes de gauche ; fais de même à droite.
3. **Pour une différence** $x - y$, encadre d'abord $-y$: multiplie par -1, le sens change.
4. **Additionne** ensuite l'encadrement de x et celui de $-y$.

Exemple : l'écart entre les deux ingrédients

Reprends $495 \leq f \leq 505$ et $195 \leq s \leq 205$.

- D'après la propriété ordre et multiplication, multiplier par -1 change le sens : $-205 \leq -s \leq -195$.
- D'après l'addition membre à membre : $495 - 205 \leq f - s \leq 505 - 195$.

Donc $290 \leq f - s \leq 310$: la farine pèse entre 290 g et 310 g de plus que le sucre.

Attention : soustraire les bornes

✗ « $495 - 195 \leq f - s \leq 505 - 205$, donc $300 \leq f - s \leq 300$. »

✓ Ce qui est vrai : on passe par l'opposé, et on obtient $290 \leq f - s \leq 310$. Contrôle : avec $f = 495$ et $s = 205$, on a $f - s = 290$, plus petit que 300.

À toi

Vérifie : La bonne borne

Soit $2 \leq x \leq 5$ et $1 \leq y \leq 3$. Quelle est la borne de gauche de l'encadrement de $x - y$?

A. $2 - 1 = 1$

Faux.
Tu as soustrait les bornes de gauche : pour $x = 2$ et $y = 3$, on a $x - y = -1$.

B. $5 - 3 = 2$

Faux.
Tu as soustrait les bornes de droite : pour $x = 2$ et $y = 3$, on a $x - y = -1$.

C. $2 - 3 = -1$

Juste.
Juste : la plus petite valeur de x moins la plus grande valeur de y.

Correction

D'après la propriété ordre et multiplication, $-3 \leq -y \leq -1$.

D'après l'addition membre à membre, $2 + (-3) \leq x - y \leq 5 + (-1)$. Donc $-1 \leq x - y \leq 4$: la borne de gauche est -1.

À toi : Somme et différence

Soit x et y deux nombres tels que $3 \leq x \leq 4$ et $0{,}5 \leq y \leq 2$. Encadre $x + y$, puis $x - y$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Pour la somme, additionne les bornes de même côté.
Indice 2
Pour la différence, commence par encadrer $-y$.
Indice 3
Point délicat : la borne de gauche de $x - y$ utilise la plus grande valeur de y.

Réponse
D'après l'encadrement d'une somme et d'une différence, $3 + 0{,}5 \leq x + y \leq 4 + 2$. Donc $3{,}5 \leq x + y \leq 6$.

D'après la propriété ordre et multiplication, $-2 \leq -y \leq -0{,}5$. D'après l'addition membre à membre, $3 - 2 \leq x - y \leq 4 - 0{,}5$. Donc $1 \leq x - y \leq 3{,}5$.

Encadrer un produit, un quotient

Des oranges au marché

Devine : Le prix des oranges

Au marché, le kilogramme d'oranges coûte entre 12 et 14 dirhams selon l'étal. Karim veut entre $1{,}5$ et 2 kg d'oranges. Entre quels montants se trouve le prix qu'il paiera ?

A. Entre $13{,}5$ et 16 dirhams.
Faux.
Tu as additionné masse et prix : il faut les multiplier.

B. Entre 21 et 24 dirhams.
Faux.
Tu as croisé les bornes : la plus petite masse va avec le plus petit prix.

C. Entre 18 et 28 dirhams.
Juste.
Juste : on multiplie les bornes de même côté.

Correction

Le prix payé est la masse multipliée par le prix du kilogramme.

Le montant le plus bas : $1{,}5 \times 12 = 18$ dirhams. Le plus haut : $2 \times 14 = 28$ dirhams. Karim paiera entre 18 et 28 dirhams.

Propriété : Encadrer un produit et un quotient de nombres strictement positifs

Soit x et y deux nombres. Si $0 < a \leq x \leq b$ et $0 < c \leq y \leq d$, alors :

- $ac \leq xy \leq bd$;
- $\dfrac{a}{d} \leq \dfrac{x}{y} \leq \dfrac{b}{c}$.

Pour le quotient, on encadre d'abord l'inverse $\dfrac{1}{y}$: $\dfrac{1}{d} \leq \dfrac{1}{y} \leq \dfrac{1}{c}$. On multiplie ensuite membre à membre avec l'encadrement de x.

Remarque : Propriété admise

Ce résultat est admis. Tu l'as observé avec les oranges : quand tout est strictement positif, on multiplie les bornes de même côté.

Le quotient passe par l'inverse

Exemple : un produit

Soit x et y deux nombres tels que $2 \leq x \leq 2{,}5$ et $4 \leq y \leq 6$. Toutes les bornes sont strictement positives.

D'après l'encadrement d'un produit et d'un quotient, $2 \times 4 \leq xy \leq 2{,}5 \times 6$. Donc $8 \leq xy \leq 15$.

Méthode : encadrer un produit ou un quotient

1. **Vérifie d'abord** que les quatre bornes sont strictement positives.
2. **Pour un produit**, multiplie les bornes de gauche, puis celles de droite.
3. **Pour un quotient** $\dfrac{x}{y}$, encadre d'abord $\dfrac{1}{y}$: passer aux inverses change le sens.
4. **Multiplie** ensuite l'encadrement de x par celui de $\dfrac{1}{y}$.

Exemple : un quotient

Soit $6 \leq x \leq 9$ et $2 \leq y \leq 3$. Toutes les bornes sont strictement positives.

- D'après la propriété ordre et inverses, le sens change : $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{2}$.
- D'après la multiplication membre à membre : $6 \times \frac{1}{3} \leq \frac{x}{y} \leq 9 \times \frac{1}{2}$.

Donc $2 \leq \frac{x}{y} \leq 4{,}5$.

Attention : diviser les bornes

✗ « $\frac{6}{2} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{9}{3}$, donc $3 \leq \frac{x}{y} \leq 3$. »

✓ Ce qui est vrai : on passe par l'inverse, et on obtient $2 \leq \frac{x}{y} \leq 4{,}5$. Contrôle : avec $x = 6$ et $y = 3$, on a $\frac{x}{y} = 2$, plus petit que 3.

Remarque : Et avec des nombres négatifs ?

Dans ce chapitre, on encadre un produit ou un quotient seulement avec des bornes strictement positives. Avec une borne négative, la règle des bornes de même côté peut devenir fausse.

Prends $-2 \leq x \leq -1$ et $3 \leq y \leq 4$. Les bornes de gauche annonceraient $xy \geq -6$, car $(-2) \times 3 = -6$. Or, pour $x = -2$ et $y = 4$, on a $xy = -8$, et $-8 < -6$.

La règle est donc fausse ici : c'est pourquoi on exige des bornes strictement positives.

À toi, puis le coin examen

Vérifie : Le bon inverse

Soit y un nombre tel que $4 \leq y \leq 5$. Quel est l'encadrement de $\frac{1}{y}$?

A. $\frac{1}{5} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{4}$

Juste.

Juste : passer aux inverses change le sens.

B. $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{5}$

Faux.

Impossible : $\frac{1}{4}$ est plus grand que $\frac{1}{5}$. Le sens devait changer.

C. $4 \leq \frac{1}{y} \leq 5$

Faux.

Ce serait l'encadrement de y : l'inverse de 4 est $\frac{1}{4}$, pas 4.

Correction

Les nombres 4, y et 5 sont strictement positifs. D'après la propriété ordre et inverses, le sens change :

$$\frac{1}{5} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{4}$$

C'est-à-dire $0{,}2 \leq \frac{1}{y} \leq 0{,}25$.

À toi : Un produit et un quotient

Soit x et y deux nombres tels que $3 \leq x \leq 6$ et $1{,}5 \leq y \leq 2$. Encadre xy, puis $\frac{x}{y}$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Toutes les bornes sont strictement positives : la méthode s'applique.

Indice 2

Pour le quotient, encadre d'abord $\frac{1}{y}$. Écris $1{,}5$ sous forme de fraction pour calculer son inverse.

Indice 3

Point délicat : la borne de gauche de $\frac{x}{y}$ utilise la plus grande valeur de y.

Réponse

Toutes les bornes sont strictement positives. D'après l'encadrement d'un produit et d'un quotient, $3 \times 1{,}5 \leq xy \leq 6 \times 2$. Donc $4{,}5 \leq xy \leq 12$.

D'après la propriété ordre et inverses, $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{2}{3}$. D'après la multiplication membre à membre, $3 \times \frac{1}{2} \leq \frac{x}{y} \leq 6 \times \frac{2}{3}$. Donc $1{,}5 \leq \frac{x}{y} \leq 4$.

Remarque : Coin examen : rédiger un quotient

En devoir, avec $6 \leq x \leq 9$ et $2 \leq y \leq 3$, commence par : « Toutes les bornes sont strictement positives. » Puis écris les deux étapes : « D'après la propriété ordre et inverses, $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{2}$. D'après la multiplication membre à membre, $2 \leq \frac{x}{y} \leq 4{,}5$. »

Le correcteur attend ces deux règles nommées.

Valeur approchée

Ce qu'affiche la calculatrice

Devine : La calculatrice et $\sqrt{7}$

La calculatrice affiche $\sqrt{7} \approx 2{,}6457513$. Quelle écriture est juste ?

A. $\sqrt{7} = 2{,}6457513$

Faux.

Ce nombre n'est qu'une valeur affichée : son carré n'est pas exactement 7.

B. $2{,}64 \leq \sqrt{7} \leq 2{,}65$

Juste.

Juste : $\sqrt{7}$ est placé entre ces deux nombres.

C. $2{,}65 \leq \sqrt{7} \leq 2{,}66$

Faux.

La valeur affichée commence par $2{,}64$: elle est sous $2{,}65$.

Correction

On contrôle par les carrés : $2{,}64^2 = 6{,}9696$ et $2{,}65^2 = 7{,}0225$.

Comme $6{,}9696 \leq 7 \leq 7{,}0225$, d'après la propriété ordre, carrés et racines carrées, $2{,}64 \leq \sqrt{7} \leq 2{,}65$.

Définition : Valeur approchée par défaut, par excès

Soit x un nombre et r un nombre strictement positif, par exemple $0{,}1$ ou $0{,}01$.

Si $a \leq x \leq a + r$, on dit que :

- a est une **valeur approchée de x par défaut** à r près ;
- $a + r$ est une **valeur approchée de x par excès** à r près.

En clair. La valeur par défaut est inférieure ou égale à x. La valeur par excès est supérieure ou égale à x. L'écart entre les deux est la précision r.

Exemple : $\sqrt{7}$ à $0{,}1$ et à $0{,}01$ près

La calculatrice affiche $\sqrt{7} \approx 2{,}6457513$.

- À $0{,}1$ près : $2{,}6 \leq \sqrt{7} \leq 2{,}7$. La valeur approchée par défaut est $2{,}6$, la valeur par excès est $2{,}7$.
- À $0{,}01$ près : $2{,}64 \leq \sqrt{7} \leq 2{,}65$. Par défaut $2{,}64$, par excès $2{,}65$.

Approcher une somme

Méthode : utiliser une valeur approchée

1. **Lis** la valeur affichée par la calculatrice.
2. **Garde** les chiffres jusqu'à la précision voulue : c'est la valeur par défaut d'un nombre positif ou nul.

3. **Ajoute** la précision : tu obtiens la valeur par excès.
4. **Pour une somme**, additionne les deux encadrements : les amplitudes s'ajoutent.

Exemple : encadrer $\sqrt{7} + \sqrt{11}$

À la calculatrice, $\sqrt{11} \approx 3{,}3166248$. À $0{,}01$ près :

$$2{,}64 \leq \sqrt{7} \leq 2{,}65$$
$$3{,}31 \leq \sqrt{11} \leq 3{,}32$$

D'après l'encadrement d'une somme et d'une différence, on additionne les bornes de même côté : $2{,}64 + 3{,}31 = 5{,}95$ et $2{,}65 + 3{,}32 = 5{,}97$.

$$5{,}95 \leq \sqrt{7} + \sqrt{11} \leq 5{,}97$$

Vérifie : L'amplitude d'une somme

Quelle est l'amplitude de l'encadrement $5{,}95 \leq \sqrt{7} + \sqrt{11} \leq 5{,}97$?

A. $0{,}02$

Juste.
Juste : les deux amplitudes de $0{,}01$ se sont ajoutées.

B. $0{,}01$

Faux.
C'est l'amplitude de chacun des deux encadrements de départ.

C. $0{,}2$

Faux.
Attention à la virgule : $5{,}97 - 5{,}95$ vaut deux centièmes.

Correction
L'amplitude vaut $5{,}97 - 5{,}95 = 0{,}02$. C'est la somme des deux amplitudes : $0{,}01 + 0{,}01$.

L'encadrement de la somme est donc moins précis que chacun des deux autres.

Une différence, puis à toi

Exemple : encadrer $\sqrt{11} - \sqrt{7}$

On part des encadrements à $0{,}01$ près.

- D'après la propriété ordre et multiplication, $-2{,}65 \leq -\sqrt{7} \leq -2{,}64$.
- D'après l'addition membre à membre, on ajoute cet encadrement à celui de $\sqrt{11}$.

À gauche, $3{,}31 - 2{,}65 = 0{,}66$. À droite, $3{,}32 - 2{,}64 = 0{,}68$. Donc :

$$0{,}66 \leq \sqrt{11} - \sqrt{7} \leq 0{,}68$$

À toi : Valeurs approchées de $\sqrt{11}$

La calculatrice affiche $\sqrt{11} \approx 3{,}3166248$. Donne les valeurs approchées de $\sqrt{11}$ par défaut et par excès à $0{,}1$ près. Encadre ensuite $2\sqrt{11}$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
À $0{,}1$ près, garde un seul chiffre après la virgule pour la valeur par défaut.
Indice 2
Écris l'encadrement de $\sqrt{11}$ à $0{,}1$ près, puis multiplie ses trois membres par 2.
Indice 3
Point délicat : multiplier par 2 double aussi l'amplitude.

Réponse
À $0{,}1$ près, $3{,}3 \leq \sqrt{11} \leq 3{,}4$. La valeur par défaut est $3{,}3$, la valeur par excès $3{,}4$.

Contrôle : $3{,}3^2 = 10{,}89$ et $3{,}4^2 = 11{,}56$.

D'après la propriété ordre et multiplication, $6{,}6 \leq 2\sqrt{11} \leq 6{,}8$. L'amplitude vaut $6{,}8 - 6{,}6 = 0{,}2$: elle a doublé.

Résoudre un problème ; ce qu'il faut retenir

Devine : La durée d'un trajet

Un car roule à une vitesse moyenne v, en kilomètres par heure, sur une distance d, en kilomètres. Quelle écriture donne la durée t du trajet, en heures ?

A. $t = d \times v$
Faux.
Avec 120 km à 60 km/h, ce produit donnerait $7\,200$ heures.

B. $t = \dfrac{v}{d}$
Faux.
Avec 120 km à 60 km/h, ce quotient donnerait une demi-heure.

C. $t = \dfrac{d}{v}$
Juste.
Juste : la durée est la distance divisée par la vitesse.

D. $t = d - v$
Faux.
On ne soustrait pas des kilomètres et des kilomètres par heure.

Correction

La durée est la distance divisée par la vitesse : $t = \dfrac{d}{v}$. Par exemple, 120 km à 60 km/h prennent $\dfrac{120}{60} = 2$ heures.

Méthode : résoudre un problème d'encadrement

1. **Traduis** chaque mesure par un encadrement, avec son unité.
2. **Écris** la formule de la grandeur cherchée.
3. **Encadre** cette grandeur, avec une règle nommée par étape.
4. **Conclus** par une phrase qui donne l'unité.

Exemple : Exemple complet : la durée du trajet en car

Un car parcourt une distance d telle que $150 \leq d \leq 160$, en kilomètres. Sa vitesse moyenne v vérifie $50 \leq v \leq 60$, en kilomètres par heure. La durée est $t = \dfrac{d}{v}$, en heures.

- Toutes les bornes sont strictement positives.
- D'après la propriété ordre et inverses : $\dfrac{1}{60} \leq \dfrac{1}{v} \leq \dfrac{1}{50}$.
- D'après la multiplication membre à membre : $\dfrac{150}{60} \leq t \leq \dfrac{160}{50}$, donc $2{,}5 \leq t \leq 3{,}2$.

Or $0{,}5$ h font 30 min et $0{,}2$ h font 12 min. Le trajet dure donc entre 2 h 30 min et 3 h 12 min.

À toi : Le trajet du retour

Au retour, sur la même distance $150 \leq d \leq 160$, le car roule plus lentement : $40 \leq v \leq 50$, en kilomètres par heure. Encadre la durée du retour. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Encadre d'abord $\dfrac{1}{v}$.
Indice 2
Multiplie ensuite membre à membre l'encadrement de d et celui de $\dfrac{1}{v}$.
Indice 3
Point délicat : la plus petite durée vient de la plus petite distance et de la plus grande vitesse.

Réponse
Toutes les bornes sont strictement positives. D'après la propriété ordre et inverses, $\dfrac{1}{50} \leq \dfrac{1}{v} \leq \dfrac{1}{40}$.
D'après la multiplication membre à membre, $\dfrac{150}{50} \leq t \leq \dfrac{160}{40}$, donc $3 \leq t \leq 4$. Le retour dure entre 3 heures et 4 heures.

À retenir : quelle règle pour quelle question

- **Comparer** : signe de la différence, nombre intermédiaire, carrés de nombres positifs ou nuls, inverses de nombres de même signe.
- **Transformer** une inégalité : ajouter garde le sens ; multiplier par un nombre strictement négatif le change.
- **Encadrer une somme** : bornes de même côté. **Une différence** : passer par l'opposé.
- **Encadrer un produit ou un quotient** : bornes strictement positives ; le quotient passe par l'inverse.
- **Approcher** : valeur par défaut à gauche, par excès à droite, à r près.

Le mot du prof. Tu sais maintenant comparer, encadrer et approcher. Retiens surtout une habitude : une règle par ligne, et son nom écrit à côté. Avec elle, tu ne perdras plus le sens d'une inégalité en route.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Ordre et opérations » (3ac · general · mathematiques)