BURHAN

Résumé : Calcul numérique : identités remarquables et puissances

3ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/3ac/mathematiques/identites-remarquables-et-puissances/resume

Chapitre	Semestre
Calcul numérique : identités remarquables et puissances	Semestre 1

Les trois identités remarquables

À retenir : Quelques mots à connaître

Développer, c'est transformer un produit en somme. **Factoriser**, c'est faire l'inverse : transformer une somme en produit.

Le **double produit** de deux nombres a et b est le nombre $2ab$. Un **carré parfait** est une expression à trois termes de la forme $a^2 + 2ab + b^2$ ou $a^2 - 2ab + b^2$: c'est un carré d'une somme ou d'une différence, développé.

Les trois identités de ce chapitre servent dans les deux sens.

Propriété : Carré d'une somme

Soit a et b deux nombres. Alors :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Le carré d'une somme est égal au carré du premier terme, plus le **double produit** $2ab$ des deux termes, plus le carré du second terme.

Exemple

Énoncé. Développe $(y+8)^2$.

Identité. On prend $a = y$ et $b = 8$. D'après le carré d'une somme :

$$(y+8)^2 = y^2 + 2 \times y \times 8 + 8^2$$

Calcul. On obtient $(y+8)^2 = y^2 + 16y + 64$.

Propriété : Carré d'une différence

Soit a et b deux nombres. Alors :

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Le carré d'une différence est égal au carré du premier terme, moins le double produit $2ab$, plus le carré du second terme.

Exemple

Énoncé. Développe $(4y-1)^2$.

Identité. On prend $a=4y$ et $b=1$. D'après le carré d'une différence :

$$\begin{aligned}&(4y-1)^2\\&=(4y)^2-2\times 4y\times 1+1^2\end{aligned}$$

Calcul. Comme $(4y)^2=16y^2$, on obtient $16y^2-8y+1$.

Propriété : Produit d'une somme par une différence

Soit a et b deux nombres. Alors :

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

Le produit de la somme de deux nombres par leur différence est égal à la **différence de leurs carrés**.

Exemple

Énoncé. Développe $(y+12)(y-12)$.

Identité. Ici $a=y$ et $b=12$: c'est le produit d'une somme par une différence, qui donne $(y+12)(y-12)=y^2-12^2$.

Calcul. On obtient y^2-144. Les termes du milieu ont disparu.

Attention : Ne pas oublier le double produit

Prends $a=5$ et $b=1$. On a $(5+1)^2=6^2=36$. Mais $5^2+1^2=25+1=26$.

L'écart vaut 10 : c'est le double produit $2\times 5\times 1$. N'oublie jamais le terme du milieu.

Attention : Des parenthèses autour de chaque terme

Un carré porte sur tout ce qui est entre parenthèses. Ainsi $(4y)^2=4^2\times y^2=16y^2$, et non $4y^2$.

Pour un nombre négatif, garde les parenthèses : $(-6)^2=36$. Sans elles, $-6^2=-36$, car le carré ne porte que sur 6.

Développer avec une identité

Méthode : développer

1. **Reconnais** la forme : carré d'une somme, carré d'une différence, ou somme fois différence.
2. **Repère** les nombres a et b.
3. **Remplace** a et b dans l'identité. Mets chaque terme remplacé entre parenthèses.
4. **Calcule** chaque terme, une règle à la fois.
5. **Réduis** : regroupe les termes semblables.

Exemple

Énoncé. Développe et réduis $E = (y+3)^2 - (y+1)(y-1)$.

Premier terme. D'après le carré d'une somme : $(y+3)^2 = y^2 + 6y + 9$.

Second terme. On reconnaît une somme fois une différence, avec $a = y$ et $b = 1$: $(y+1)(y-1) = y^2 - 1$.

Réduction. Le signe moins change les signes de $y^2 - 1$. Donc :

$$\begin{aligned} E &= y^2 + 6y + 9 - y^2 + 1 \\ &= 6y + 10 \end{aligned}$$

Exemple

Énoncé. Développe $\left(\sqrt{13} - 2\right)^2$.

Identité. D'après le carré d'une différence :

$$\begin{aligned} &\left(\sqrt{13} - 2\right)^2 \\ &= \left(\sqrt{13}\right)^2 - 2 \times \sqrt{13} \times 2 + 2^2 \end{aligned}$$

Calcul. Comme $\left(\sqrt{13}\right)^2 = 13$, on obtient $13 - 4\sqrt{13} + 4 = 17 - 4\sqrt{13}$.

Remarque : Contrôler avec une valeur

Pour contrôler un développement, remplace la lettre par un nombre simple.

Avec $y = 2$ dans l'exemple ci-dessus :

$$\begin{aligned} &(2+3)^2 - (2+1)(2-1) \\ &= 25 - 3 = 22 \end{aligned}$$

Et $6 \times 2 + 10 = 22$. Les deux résultats sont égaux.

Factoriser avec une identité

À retenir : Lire une identité de droite à gauche

Factoriser avec une identité, c'est la lire de droite à gauche. Commence par la différence de deux carrés : elle se repère vite.

Le carré parfait à trois termes vient ensuite. Contrôle toujours ton résultat en développant.

Méthode : factoriser

1. **Compte** les termes de l'expression.
2. **Deux termes** séparés par un signe moins : écris-les a^2 et b^2. Alors $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.
3. **Trois termes** dont deux carrés : trouve a et b. Vérifie ensuite que l'autre terme vaut $2ab$.
4. **Contrôle** en développant le produit trouvé.

Exemple

Énoncé. Factorise $25y^2 - 81$.

Carrés. On a $25y^2 = (5y)^2$ et $81 = 9^2$.

Produit. D'après le produit d'une somme par une différence : $25y^2 - 81 = (5y + 9)(5y - 9)$.

Exemple

Énoncé. Factorise $y^2 - 14y + 49$.

Carrés. On a y^2 et $49 = 7^2$. On essaie donc $a = y$ et $b = 7$.

Double produit. On a $2 \times y \times 7 = 14y$: c'est bien le terme du milieu, avec le signe moins.

Produit. D'après le carré d'une différence : $y^2 - 14y + 49 = (y - 7)^2$.

Exemple

Énoncé. L'expression $y^2 + 10y + 16$ est-elle un carré parfait ?

Carrés. On a $16 = 4^2$, donc on essaie $a = y$ et $b = 4$.

Double produit. Or $2 \times y \times 4 = 8y$, et non $10y$. Ce n'est donc pas le carré d'une somme.

Conclusion. Ce n'est pas non plus le carré d'une différence : le terme du milieu est précédé d'un signe plus. L'expression $y^2 + 10y + 16$ n'est pas un carré parfait.

Attention : Attention au signe entre les deux carrés

Seule une différence de deux carrés se factorise avec le produit d'une somme par une différence. Par exemple, $y^2 + 36$ n'est pas égal à $(y + 6)(y - 6)$.

Ce produit vaut $y^2 - 36$. Regarde le signe entre les deux carrés avant de factoriser.

Calcul astucieux ; expression conjuguée

Méthode : calculer astucieusement

1. **Écris** chaque nombre à l'aide d'un nombre rond : une somme ou une différence.
2. **Reconnais** l'identité qui convient.
3. **Calcule** de tête : les carrés de nombres ronds sont faciles.
4. **Contrôle** avec la calculatrice.

Exemple

Un carré. On écrit $201 = 200 + 1$. D'après le carré d'une somme :

$$\begin{aligned} 201^2 &= 200^2 + 2 \times 200 \times 1 + 1^2 \\ &= 40\,000 + 400 + 1 \\ &= 40\,401 \end{aligned}$$

Un produit. On écrit $38 = 40 - 2$ et $42 = 40 + 2$. D'après le produit d'une somme par une différence :

$$\begin{aligned} 38 \times 42 &= 40^2 - 2^2 \\ &= 1\,600 - 4 = 1\,596 \end{aligned}$$

À retenir : L'expression conjuguée

Rappel du chapitre précédent : $\left(\sqrt{b}\right)^2 = b$ pour un nombre b positif.

L'**expression conjuguée** de $a + \sqrt{b}$ est $a - \sqrt{b}$, et inversement. Leur produit ne contient plus de racine carrée :

$$\left(a + \sqrt{b}\right)\left(a - \sqrt{b}\right) = a^2 - b$$

De même, $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ et $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ sont conjuguées. Leur produit vaut $a - b$.

Méthode : rendre rationnel un dénominateur

Le dénominateur est de la forme $a + \sqrt{b}$, $a - \sqrt{b}$, $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ ou $\sqrt{a} - \sqrt{b}$.

1. **Vérifie** que le dénominateur n'est pas nul.

2. **Écris** l'expression conjuguée du dénominateur : change le signe du milieu.
3. **Multiplie** le numérateur et le dénominateur par cette expression.
4. **Calcule** le nouveau dénominateur avec le produit d'une somme par une différence. Il vaut $a^2 - b$ ou $a - b$.
5. **Simplifie** la fraction obtenue.

Exemple

Énoncé. Écris $\dfrac{3}{4 - \sqrt{13}}$ sans racine carrée au dénominateur.

Dénominateur. Comme $16 > 13$, on a $\sqrt{16} > \sqrt{13}$, soit $4 > \sqrt{13}$. Le dénominateur est strictement positif : il n'est pas nul.

Conjuguée. On multiplie en haut et en bas par $4 + \sqrt{13}$. Le dénominateur devient $4^2 - 13 = 3$.

Résultat.

$$\begin{aligned} \frac{3}{4 - \sqrt{13}} &= \frac{3\left(4 + \sqrt{13}\right)}{3} \\ &= 4 + \sqrt{13} \end{aligned}$$

Exemple

Énoncé. Écris $\dfrac{2}{\sqrt{15} + \sqrt{13}}$ sans racine carrée au dénominateur.

Dénominateur. C'est une somme de deux nombres strictement positifs : il n'est pas nul.

Conjuguée. On multiplie en haut et en bas par $\sqrt{15} - \sqrt{13}$. Le dénominateur devient $15 - 13 = 2$.

Résultat.

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{15} + \sqrt{13}} &= \frac{2\left(\sqrt{15} - \sqrt{13}\right)}{2} \\ &= \sqrt{15} - \sqrt{13} \end{aligned}$$

Calculer avec des puissances

Propriété : Règles de calcul sur les puissances

Soit a et b deux nombres non nuls, et m et n deux entiers relatifs.

- Produit de puissances d'un même nombre : $a^m \times a^n = a^{m+n}$.
- Quotient de puissances d'un même nombre : $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.
- Puissance d'une puissance : $(a^m)^n = a^{m \times n}$.
- Puissance d'un produit et d'un quotient : $(a \times b)^n = a^n \times b^n$ et $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$.

On rappelle que $a^0 = 1$, $a^1 = a$ et $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Remarque : Des règles admises

Ces règles sont admises dans ce chapitre : tu les as vues en 2AC. Elles valent pour des nombres non nuls. Les exposants sont des entiers relatifs.

Méthode : calculer avec des puissances

1. **Écris** les nombres comme des puissances d'un même nombre, si c'est possible.
2. **Regroupe** les puissances d'un même nombre.
3. **Applique** une seule règle par étape, et nomme-la.
4. **Donne** le résultat sous la forme demandée.

Exemple

Énoncé. Calcule $A = \dfrac{5^7 \times 5^{-3}}{5^2}$.

Produit. D'après le produit de puissances d'un même nombre : $5^7 \times 5^{-3} = 5^{7+(-3)} = 5^4$.

Quotient. D'après le quotient de puissances d'un même nombre : $\dfrac{5^4}{5^2} = 5^2$. Donc $A = 25$.

Exemple

Puissance d'une puissance. On a $\left(2^3\right)^{-2} = 2^{-6}$. De même, $4^4 = \left(2^2\right)^4 = 2^8$.

Produit de puissances. Donc :

$$\begin{aligned}\left(2^3\right)^{-2} \times 4^4 &= 2^{-6} \times 2^8 \\ &= 2^{-6+8} = 2^2 = 4\end{aligned}$$

Puissance d'un quotient. $\dfrac{6^3}{2^3} = \left(\dfrac{6}{2}\right)^3 = 3^3 = 27$.

Puissance d'un produit.

$$\begin{aligned}(0{,}5)^4 \times 2^4 &= (0{,}5 \times 2)^4 \\ &= 1^4 = 1\end{aligned}$$

Attention : Pas de règle pour une somme

Les règles portent sur des produits ou des quotients. Pour une somme, elles sont fausses : $3^2 + 3^2 = 18$, alors que $3^4 = 81$.

De même, $10^2 + 10^3 = 1\,100$, qui n'est pas 10^5. Pour un produit, on ajoute les exposants sans les multiplier : $4^3 \times 4^2 = 4^5$, et non 4^6.

Puissances de 10 et écriture scientifique

Définition : Puissances de 10 et écriture scientifique

Soit n un entier naturel non nul. Le nombre 10^n s'écrit avec le chiffre 1 suivi de n zéros. Le nombre $10^{-n} = \dfrac{1}{10^n}$ s'écrit $0{,}0\ldots01$, avec le chiffre 1 au n-ième rang après la virgule.

Tout nombre décimal positif non nul x s'écrit d'une seule façon sous la forme :

$$x = a \times 10^p,$$

où a est un nombre décimal tel que $1 \leq a < 10$ et p un entier relatif. Cette écriture est l'**écriture scientifique** de x.

Méthode : écriture scientifique

1. **Écrire** : déplace la virgule pour obtenir un nombre a entre 1 et 10. Le nombre de rangs donne l'exposant.
2. **Comparer** deux nombres positifs écrits en écriture scientifique : le plus grand exposant l'emporte. À exposant égal, compare les nombres a.
3. **Ordre de grandeur** : c'est une valeur approchée simple. Remplace a par l'entier le plus proche.
4. **Calculer** : multiplie les nombres a entre eux, puis les puissances de 10 entre elles.

Exemple

Grand nombre. $47\,200\,000 = 4{,}72 \times 10^7$: la virgule se déplace de 7 rangs vers la gauche.

Petit nombre. $0{,}000\,63 = 6{,}3 \times 10^{-4}$: la virgule se déplace de 4 rangs vers la droite.

Ordre de grandeur. $6{,}7 \times 10^8$ a pour ordre de grandeur 7×10^8.

Exemple

Comparer. On compare $8{,}1 \times 10^{-5}$ et $2{,}4 \times 10^{-4}$, tous deux écrits en écriture scientifique. Comme $-5 < -4$, on a $8{,}1 \times 10^{-5} < 2{,}4 \times 10^{-4}$.

Calculer.

$$\begin{aligned}&\left(4 \times 10^3\right) \times \left(6 \times 10^{-5}\right)\\ &= 24 \times 10^{-2}\end{aligned}$$

Écriture scientifique. Comme $24 = 2{,}4 \times 10$, on obtient $2{,}4 \times 10^{-1}$.

Attention : Un seul chiffre non nul avant la virgule

Dans $a \times 10^p$, il faut $1 \leq a < 10$. Ainsi 34×10^5 n'est pas une écriture scientifique.

On écrit $34 = 3{,}4 \times 10$, donc $34 \times 10^5 = 3{,}4 \times 10^6$. De même, $0{,}2 \times 10^3 = 2 \times 10^2$.

Synthèse : le calcul numérique du collège

À retenir : Fractions, puissances, racines carrées, identités

- Rappel de 1AC et de 2AC : pour additionner deux fractions, on les écrit avec le même dénominateur.
- Rappel de 2AC : pour un nombre a non nul, $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.
- Rappel du chapitre précédent : $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ pour a et b positifs.
- Ce chapitre ajoute les identités remarquables et l'expression conjuguée.

Méthode : mener un calcul de synthèse

1. **Repère** ce que contient le calcul : des fractions, des puissances, des racines carrées ou une identité.
2. **Suis** l'ordre des priorités : d'abord les parenthèses et les puissances, ensuite les produits et les quotients, enfin les sommes.
3. **Simplifie** à chaque étape : fraction irréductible, racine carrée la plus simple.
4. **Contrôle** avec une valeur approchée donnée par la calculatrice.

Exemple

Énoncé. Calcule $C = \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 - \dfrac{1}{6} \times 3^{-1}$.

Puissances. D'après la puissance d'un quotient, $\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{4}{9}$. Et $3^{-1} = \dfrac{1}{3}$.

Produit. $\dfrac{1}{6} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{18}$.

Différence. $C = \dfrac{8}{18} - \dfrac{1}{18} = \dfrac{7}{18}$. Cette fraction est irréductible.

Exemple

Énoncé. Calcule $D = \left(\sqrt{10} + 3\right)\left(\sqrt{10} - 3\right) + \sqrt{40}$.

Identité. Les deux facteurs sont conjugués : leur produit est une différence de deux carrés.

$$\left(\sqrt{10}+3\right)\left(\sqrt{10}-3\right)$$
$$=10-9=1$$

Racine carrée. On a $\sqrt{40}=\sqrt{4\times 10}=2\sqrt{10}$.

Résultat. $D=1+2\sqrt{10}$. La calculatrice donne $D\approx 7{,}32$, au centième près.

Attention : Rien ne se fait terme à terme sur une somme

Une racine carrée ne se partage pas sur une somme : $\sqrt{36+64}=\sqrt{100}=10$, alors que $\sqrt{36}+\sqrt{64}=6+8=14$.

Une somme de fractions non plus : $\frac{2}{5}+\frac{1}{4}=\frac{8}{20}+\frac{5}{20}=\frac{13}{20}$, et non $\frac{3}{9}$.

Méthode : Quelle technique pour quelle question ?

- **Développer** un carré ou un produit somme fois différence : une identité remarquable.
- **Factoriser** deux carrés séparés par un moins : le produit d'une somme par une différence.
- **Factoriser** trois termes : un carré parfait, après avoir vérifié le double produit.
- **Calculer** de tête un carré ou un produit : un nombre rond et une identité.
- **Enlever** une racine carrée du dénominateur : l'expression conjuguée.
- **Simplifier** des puissances : une règle par étape.
- **Écrire, comparer, estimer** un nombre très grand ou très petit : l'écriture scientifique.

Carré d'une somme
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

Carré d'une différence
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

Produit d'une somme par une différence
$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

Expression conjuguée, b positif
$$\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right)=a^2-b$$

Produit de puissances, a non nul, m et n entiers relatifs
$$a^m\times a^n=a^{m+n}$$

Quotient de puissances, a non nul, m et n entiers relatifs
$$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$$

Puissance d'une puissance, a non nul, m et n entiers relatifs
$$(a^m)^n=a^{m\times n}$$

Exposant négatif, a non nul, n entier relatif
$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$$

Écriture scientifique
$$a\times 10^p,\quad 1\leq a<10$$

> **À retenir : Rédiger en devoir**
>
> Nomme la règle à chaque étape, par exemple « d'après le carré d'une différence ». Écris une seule règle par ligne de calcul.
>
> Donne une fraction sous forme irréductible. Pour une valeur approchée, indique la précision et l'outil.