BURHAN

Calcul numérique : identités remarquables et puissances : exercices, niveau examen

3ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/3ac/mathematiques/identites-remarquables-et-puissances/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Calcul numérique : identités remarquables et puissances	Niveau examen	5

Exercice 1 5 pts

Deux écritures d'une même expression

On considère l'expression $E = (x-6)^2 - 16$.

1. 1,5 pts

Développer et réduire E.

INDICE

Outil : le carré d'une différence, avec $a = x$ et $b = 6$.

CORRIGÉ

D'après le carré d'une différence, avec $a = x$ et $b = 6$, on a $(x-6)^2 = x^2 - 12x + 36$. On retranche ensuite 16 :

$$\begin{aligned} & E \\ &= x^2 - 12x + 36 - 16 \\ &= x^2 - 12x + 20 \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout nombre x, $E = x^2 - 12x + 20$.

2. 1,5 pts

Écrire 16 comme un carré. En déduire une factorisation de E.

INDICE

Début : E est une différence de deux carrés, avec $a = x - 6$.

Point délicat : réduis chaque facteur à la fin.

CORRIGÉ

Deux carrés. On a $16 = 4^2$, donc $E = (x-6)^2 - 4^2$. C'est une différence de deux carrés, avec $a = x - 6$ et $b = 4$.

Factoriser. D'après le produit d'une somme par une différence, puis en réduisant chaque facteur ($-6 + 4 = -2$ et $-6 - 4 = -10$) :

$$\begin{aligned} & E \\ &= (x - 6 + 4)(x - 6 - 4) \\ &= (x-2)(x-10) \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout nombre x, $E = (x-2)(x-10)$.

3. 1 pts

Calculer E pour $x = \sqrt{2}$, en utilisant la forme développée.

INDICE

Début : $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$.

CORRIGÉ

Remplacement. Dans la forme développée, on remplace x par $\sqrt{2}$:

$$E = \left(\sqrt{2}\right)^2 - 12\sqrt{2} + 20$$

Calcul. Comme $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$, on regroupe les nombres 2 et 20 :

$$\begin{aligned} E &= 2 - 12\sqrt{2} + 20 \\ &= 22 - 12\sqrt{2} \end{aligned}$$

Conclusion. Pour $x = \sqrt{2}$, on a $E = 22 - 12\sqrt{2}$.

4. 1 pts

Calculer E pour $x = 106$, sans calculatrice. Choisir l'écriture de E la plus adaptée.

INDICE

Début : choisis l'écriture de E qui donne un produit simple.

Outil : un calcul astucieux avec un nombre rond.

CORRIGÉ

Choix de l'écriture. La forme factorisée donne un produit de deux nombres proches de 100 :

$$\begin{aligned} E &= (106 - 2)(106 - 10) \\ &= 104 \times 96 \end{aligned}$$

Calcul astucieux. On écrit $104 = 100 + 4$ et $96 = 100 - 4$. D'après le produit d'une somme par une différence, avec $a = 100$ et $b = 4$:

$$\begin{aligned} 104 \times 96 &= 100^2 - 4^2 \\ &= 10\,000 - 16 \\ &= 9\,984 \end{aligned}$$

Conclusion. Pour $x = 106$, on a $E = 9\,984$.

Exercice 2 5 pts

Deux nombres conjugués

On pose $a = \sqrt{5} + 2$ et $b = \sqrt{5} - 2$. Comme $5 > 4$, on a $\sqrt{5} > 2$: les nombres a et b sont donc strictement positifs.

1. 1 pts

Calculer le produit $a \times b$.

INDICE

Outil : le produit d'une somme par une différence.

CORRIGÉ

D'après le produit d'une somme par une différence, avec $\sqrt{5}$ et 2, et comme $\left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$:

$$\begin{aligned} a \times b &= \left(\sqrt{5} + 2\right)\left(\sqrt{5} - 2\right) \\ &= \left(\sqrt{5}\right)^2 - 2^2 \\ &= 5 - 4 = 1 \end{aligned}$$

Conclusion. $a \times b = 1$.

2. 1 pts

En divisant par a les deux membres de l'égalité de la question 1, en déduire l'écriture de $\dfrac{1}{a}$ sans racine carrée au dénominateur.

INDICE

Début : a est strictement positif, donc il n'est pas nul.

Ensuite : $\dfrac{a \times b}{a} = b$.

CORRIGÉ

Division. D'après la question 1, $a \times b = 1$. Le nombre a est strictement positif, donc il n'est pas nul : on peut diviser les deux membres par a.

$$\frac{a \times b}{a} = \frac{1}{a}$$

Le membre de gauche vaut b. On obtient donc $b = \dfrac{1}{a}$.

Conclusion. $\dfrac{1}{a} = \sqrt{5} - 2$: l'inverse de a s'écrit sans racine carrée au dénominateur. On retrouve la méthode de l'expression conjuguée.

3. 1,5 pts

Calculer a^2 et b^2.

INDICE

Outil : le carré d'une somme pour a^2, le carré d'une différence pour b^2.

CORRIGÉ

Carré de a. D'après le carré d'une somme, avec $\sqrt{5}$ et 2 :

$$\begin{aligned} & a^2 \\ & = \left(\sqrt{5}\right)^2 + 2 \times \sqrt{5} \times 2 + 2^2 \\ & = 5 + 4\sqrt{5} + 4 = 9 + 4\sqrt{5} \end{aligned}$$

Carré de b. D'après le carré d'une différence, les mêmes termes apparaissent, mais le double produit $4\sqrt{5}$ est précédé du signe moins :

$$\begin{aligned} b^2 &= 5 - 4\sqrt{5} + 4 \\ &= 9 - 4\sqrt{5} \end{aligned}$$

Conclusion. $a^2 = 9 + 4\sqrt{5}$ et $b^2 = 9 - 4\sqrt{5}$.

4. 1,5 pts

En déduire $a^2 + b^2$. Calculer ensuite $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$, en divisant cette fois par b l'égalité $a \times b = 1$.

INDICE

Début : les termes en $\sqrt{5}$ s'éliminent.

Ensuite : comme à la question 2, b n'est pas nul et $\dfrac{a \times b}{b} = a$.

CORRIGÉ

Somme des carrés. D'après la question 3, les termes en $\sqrt{5}$ s'éliminent :

$$\begin{aligned} & a^2 + b^2 \\ & = 9 + 4\sqrt{5} + 9 - 4\sqrt{5} \\ & = 18 \end{aligned}$$

Inverse de b. Le nombre b est strictement positif, donc il n'est pas nul. On divise par b les deux membres de $a \times b = 1$: on obtient $a = \dfrac{1}{b}$.

Somme des inverses. Avec $\dfrac{1}{a} = b$, trouvé à la question 2 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} &= b + a \\ &= \sqrt{5} - 2 + \sqrt{5} + 2 \\ &= 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

Conclusion. $a^2 + b^2 = 18$ et $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = 2\sqrt{5}$.

Exercice 3 5 pts

Des vidéos stockées sur un serveur

Une vidéo occupe $1{,}2 \times 10^{9}$ octets. Un serveur peut stocker $4{,}8 \times 10^{13}$ octets.

1. 1 pts

Écrire $A = \dfrac{10^{5} \times 10^{-3}}{10^{-4}}$ sous la forme d'une puissance de 10.

INDICE

Outil : le produit, puis le quotient de puissances d'un même nombre.

CORRIGÉ

Produit. D'après le produit de puissances d'un même nombre, on ajoute les exposants :

$$\begin{aligned} 10^{5} \times 10^{-3} &= 10^{5+(-3)} \\ &= 10^{2} \end{aligned}$$

Quotient. D'après le quotient de puissances d'un même nombre, on retranche les exposants :

$$\begin{aligned} A &= \frac{10^{2}}{10^{-4}} \\ &= 10^{2-(-4)} \\ &= 10^{6} \end{aligned}$$

Conclusion. $A = 10^{6}$.

2. 1,5 pts

Donner l'écriture scientifique de $B = \dfrac{24 \times 10^{-3} \times 5 \times 10^{7}}{4 \times 10^{2}}$.

INDICE

Début : regroupe les nombres 24, 5 et 4, puis les puissances de 10.

Point délicat : 30 n'est pas compris entre 1 et 10.

CORRIGÉ

Les nombres. On regroupe d'abord 24, 5 et 4 :

$$\frac{24 \times 5}{4} = \frac{120}{4} = 30$$

Les puissances de 10. D'après le produit, puis le quotient de puissances d'un même nombre :

$$\begin{aligned} &\frac{10^{-3} \times 10^{7}}{10^{2}} \\ &= \frac{10^{4}}{10^{2}} \\ &= 10^{2} \end{aligned}$$

Écriture scientifique. On obtient $B = 30 \times 10^{2}$. Le nombre 30 n'est pas compris entre 1 et 10 : on écrit $30 = 3 \times 10$, puis on regroupe les puissances de 10 :

$$\begin{aligned} B &= 3 \times 10 \times 10^{2} \\ &= 3 \times 10^{3} \end{aligned}$$

Conclusion. L'écriture scientifique de B est $B = 3 \times 10^{3}$.

3. 1,5 pts

Calculer $\dfrac{4{,}8 \times 10^{13}}{1{,}2 \times 10^{9}}$ en écriture scientifique. En déduire le nombre de vidéos que ce serveur peut stocker au plus.

INDICE

Début : ce quotient divise la capacité du serveur par la taille d'une vidéo.

CORRIGÉ

Le quotient. Ce quotient divise la capacité du serveur par la taille d'une vidéo : c'est le nombre de vidéos que le serveur peut contenir.

Calcul. On divise les nombres, puis les puissances de 10 ; on a $\dfrac{4{,}8}{1{,}2} = 4$ et, d'après le quotient de puissances d'un même nombre, $\dfrac{10^{13}}{10^{9}} = 10^{4}$:

$$\begin{aligned} &\frac{4{,}8 \times 10^{13}}{1{,}2 \times 10^{9}} \\ &= \frac{4{,}8}{1{,}2} \times \frac{10^{13}}{10^{9}} \\ &= 4 \times 10^{4} \end{aligned}$$

Conclusion. Le serveur peut stocker au plus 4×10^{4} vidéos, soit $40\,000$ vidéos.

4. 1 pts

Un second serveur stocke $9{,}6 \times 10^{12}$ octets. Lequel des deux serveurs stocke le plus ? Combien de fois plus ?

INDICE

Outil : les deux capacités sont en écriture scientifique : compare d'abord les exposants.

Ensuite : calcule le quotient des deux capacités.

CORRIGÉ

Comparaison. Les deux capacités sont en écriture scientifique. Comme $13 > 12$, le premier serveur stocke le plus.

Rapport. On divise la plus grande capacité par la plus petite. On a $\frac{10^{13}}{10^{12}} = 10^{1}$ et $\frac{4{,}8}{9{,}6} = 0{,}5$:

$$\begin{aligned} &\frac{4{,}8 \times 10^{13}}{9{,}6 \times 10^{12}} \\ &= \frac{4{,}8}{9{,}6} \times 10^{1} \\ &= 0{,}5 \times 10 = 5 \end{aligned}$$

Conclusion. Le premier serveur stocke le plus, et il stocke 5 fois plus que le second.

Exercice 4 5 pts

Un carré parfait et trois valeurs

On considère l'expression $F = 25x^2 - 30x + 9$.

1. 1,5 pts

Factoriser F sous la forme du carré d'une expression du premier degré, en indiquant l'identité remarquable utilisée et la vérification du double produit.

INDICE

Début : $25 = 5^2$.

Point délicat : compare le double produit au terme $-30x$ pour choisir la bonne identité.

CORRIGÉ

Deux carrés. On a $25x^2 = (5x)^2$ et $9 = 3^2$. On essaie donc $a = 5x$ et $b = 3$.

Double produit. On calcule $2 \times 5x \times 3 = 30x$. C'est bien le terme restant, précédé du signe $-$: l'identité à utiliser est le carré d'une différence.

Factoriser. D'après le carré d'une différence, lu de droite à gauche :

$$\begin{aligned} & F \\ &= (5x)^2 - 2 \times 5x \times 3 + 3^2 \\ &= (5x - 3)^2 \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout nombre x, $F = (5x - 3)^2$.

2. 1 pts

En déduire la valeur de F pour $x = 21$, sans calculatrice.

INDICE

Début : utilise la forme factorisée.

Outil : écris $102 = 100 + 2$.

CORRIGÉ

Forme factorisée. Pour $x = 21$, on calcule d'abord le nombre élevé au carré :

$$5 \times 21 - 3 = 105 - 3 = 102$$

Donc $F = 102^2$.

Calcul astucieux. On écrit $102 = 100 + 2$. D'après le carré d'une somme, avec $a = 100$ et $b = 2$:

$$\begin{aligned} 102^2 &= (100 + 2)^2 \\ &= 100^2 + 2 \times 100 \times 2 + 2^2 \\ &= 10\,000 + 400 + 4 \\ &= 10\,404 \end{aligned}$$

Conclusion. Pour $x = 21$, on a $F = 10\,404$.

3. 1 pts

Calculer F pour $x = \dfrac{3+\sqrt{11}}{5}$.

INDICE

Début : calcule d'abord $5x$, puis $5x-3$.

CORRIGÉ

Facteur. Pour $x = \dfrac{3+\sqrt{11}}{5}$, on a $5x = 3+\sqrt{11}$. On retranche 3 :

$$5x-3 = \sqrt{11}$$

Carré. On utilise la forme factorisée $F = (5x-3)^2$:

$$F = \left(\sqrt{11}\right)^2 = 11$$

Conclusion. Pour $x = \dfrac{3+\sqrt{11}}{5}$, on a $F = 11$.

4. 1,5 pts

Calculer F pour $x = 0{,}6008$. Donner le résultat en écriture scientifique.

INDICE

Début : $5 \times 0{,}6008 = 3{,}004$.

Ensuite : écris $5x-3$ avec une puissance de 10, puis élève au carré.

CORRIGÉ

Facteur. On calcule $5 \times 0{,}6008 = 3{,}004$. On retranche 3, puis on écrit le résultat avec une puissance de 10 :

$$5x-3 = 0{,}004 = 4 \times 10^{-3}$$

Carré. D'après la puissance d'un produit, on élève au carré chaque facteur :

$$\begin{aligned} F &= \left(4 \times 10^{-3}\right)^2 \\ &= 4^2 \times \left(10^{-3}\right)^2 \end{aligned}$$

D'après la puissance d'une puissance, $\left(10^{-3}\right)^2 = 10^{-3\times 2} = 10^{-6}$. On obtient $F = 16 \times 10^{-6}$.

Écriture scientifique. Le nombre 16 n'est pas compris entre 1 et 10. On écrit $16 = 1{,}6 \times 10$, puis on ajoute les exposants :

$$\begin{aligned} F &= 1{,}6 \times 10 \times 10^{-6} \\ &= 1{,}6 \times 10^{-5} \end{aligned}$$

Conclusion. Pour $x = 0{,}6008$, l'écriture scientifique est $F = 1{,}6 \times 10^{-5}$.

Exercice 5 5 pts

Des puissances de 2 et de 5

On considère les nombres $A = 2^{6} \times 5^{9}$ et $B = 2^{-4} \times 5^{-6}$.

1. 1 pts

Écrire $2^{6} \times 5^{6}$ sous la forme d'une puissance de 10.

INDICE

Outil : la puissance d'un produit, lue de droite à gauche : $a^{n} \times b^{n} = (a \times b)^{n}$.

CORRIGÉ

Les deux puissances ont le même exposant 6. D'après la puissance d'un produit, lue de droite à gauche :

$$2^{6} \times 5^{6} = (2 \times 5)^{6} = 10^{6}$$

Conclusion. $2^{6} \times 5^{6} = 10^{6}$.

2. 1,5 pts

En déduire l'écriture scientifique de A, puis un ordre de grandeur de A.

INDICE

Début : écris $5^{9} = 5^{6} \times 5^{3}$.

Point délicat : 125 n'est pas compris entre 1 et 10.

CORRIGÉ

Découpage. D'après le produit de puissances d'un même nombre, $5^{9} = 5^{6} \times 5^{3}$, car $6 + 3 = 9$. Avec la question 1, et comme $5^{3} = 125$:

$$\begin{aligned} A &= 2^{6} \times 5^{6} \times 5^{3} \\ &= 10^{6} \times 125 \end{aligned}$$

Écriture scientifique. Le nombre 125 n'est pas compris entre 1 et 10 : on écrit $125 = 1{,}25 \times 10^{2}$, puis on ajoute les exposants :

$$\begin{aligned} A &= 1{,}25 \times 10^{2} \times 10^{6} \\ &= 1{,}25 \times 10^{8} \end{aligned}$$

Ordre de grandeur. L'entier le plus proche de $1{,}25$ est 1.

Conclusion. $A = 1{,}25 \times 10^{8}$, et A a pour ordre de grandeur 1×10^{8}, soit 10^{8}.

3. 1,5 pts

Donner l'écriture scientifique de B.

INDICE

Début : écris $5^{-6} = 5^{-4} \times 5^{-2}$, puis regroupe $2^{-4} \times 5^{-4}$.

Ensuite : $5^{-2} = \dfrac{1}{25}$.

CORRIGÉ

Regroupement. D'après le produit de puissances d'un même nombre, $5^{-6} = 5^{-4} \times 5^{-2}$, car $-4 + (-2) = -6$. Les puissances 2^{-4} et 5^{-4} ont le même exposant ; d'après la puissance d'un produit :

$$\begin{aligned} 2^{-4} \times 5^{-4} &= (2 \times 5)^{-4} \\ &= 10^{-4} \end{aligned}$$

Donc $B = 10^{-4} \times 5^{-2}$.

Fraction. L'exposant -2 donne l'inverse du carré :

$$\begin{aligned} 5^{-2} &= \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} \\ &= 0{,}04 = 4 \times 10^{-2} \end{aligned}$$

Écriture scientifique. On regroupe les puissances de 10 :

$$\begin{aligned} B &= 4 \times 10^{-2} \times 10^{-4} \\ &= 4 \times 10^{-6} \end{aligned}$$

Conclusion. L'écriture scientifique de B est 4×10^{-6}.

4. 1 pts

Calculer $A \times B$ à partir des écritures scientifiques. Contrôler ensuite le résultat en regroupant les puissances de 2 d'une part, de 5 d'autre part.

INDICE

Début : multiplie $1{,}25$ par 4, puis 10^{8} par 10^{-6}.

Ensuite : pour le contrôle, ajoute les exposants de chaque nombre.

CORRIGÉ

Avec les écritures scientifiques. On multiplie les nombres entre eux, puis les puissances de 10 : $1{,}25 \times 4 = 5$ et $10^{8} \times 10^{-6} = 10^{8+(-6)} = 10^{2}$. Donc :

$$A \times B = 5 \times 10^{2} = 500$$

Contrôle. On regroupe les puissances de 2, puis celles de 5, et l'on ajoute les exposants : $6 + (-4) = 2$ et $9 + (-6) = 3$.

$$\begin{aligned} & A \times B \\ &= 2^{6} \times 2^{-4} \times 5^{9} \times 5^{-6} \\ &= 2^{2} \times 5^{3} \\ &= 4 \times 125 = 500 \end{aligned}$$

Conclusion. Les deux calculs donnent le même résultat : $A \times B = 500$.