BURHAN

Calcul numérique : identités remarquables et puissances : exercices, entraînement

3ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/3ac/mathematiques/identites-remarquables-et-puissances/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Calcul numérique : identités remarquables et puissances	Entraînement	7

Exercice 1

Développer, réduire, puis contrôler

On pose $E = (x+9)^2 - (x-9)^2$ et $F = (x-10)^2 + (x+1)(x-1)$.

1.

Développer et réduire E.

INDICE

Outil : le carré d'une somme, puis le carré d'une différence.

Point délicat : garde des parenthèses autour de $(x-9)^2$ développé, à cause du signe moins.

CORRIGÉ

Premier carré. D'après le carré d'une somme, avec $a = x$ et $b = 9$:

$$(x+9)^2 = x^2 + 18x + 81$$

Second carré. D'après le carré d'une différence, avec les mêmes a et b :

$$(x-9)^2 = x^2 - 18x + 81$$

Le signe moins. Le second carré est retranché. On garde donc des parenthèses autour de son développement, puis le signe moins change le signe de chacun de ses termes :

$$\begin{aligned} &- \left(x^2 - 18x + 81\right) \\ &= -x^2 + 18x - 81 \end{aligned}$$

Réduction. On regroupe les termes semblables : $x^2 - x^2 = 0$, $18x + 18x = 36x$ et $81 - 81 = 0$.

$$\begin{aligned} &E \\ &= x^2 + 18x + 81 \\ &\quad - x^2 + 18x - 81 \\ &= 36x \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout nombre x, $E = 36x$.

2.

En déduire la valeur de E pour $x = 0{,}25$.

INDICE

Début : utilise la forme réduite trouvée à la question 1.

CORRIGÉ

D'après la question 1, pour tout nombre x, $E = 36x$. On remplace x par $0{,}25$. Multiplier par $0{,}25$ revient à diviser par 4 :

$$E = 36 \times 0{,}25 = 9$$

Conclusion. Pour $x = 0{,}25$, on a $E = 9$.

3.

Développer et réduire F.

INDICE

Outil : le carré d'une différence, puis le produit d'une somme par une différence.

CORRIGÉ

Premier terme. D'après le carré d'une différence, avec $a = x$ et $b = 10$:

$$(x - 10)^2 = x^2 - 20x + 100$$

Second terme. D'après le produit d'une somme par une différence, avec $a = x$ et $b = 1$:

$$(x + 1)(x - 1) = x^2 - 1$$

Réduction. On ajoute les deux résultats, puis on regroupe les termes en x^2 et les nombres :

$$\begin{aligned} F &= x^2 - 20x + 100 \\ &\quad + x^2 - 1 \\ &= 2x^2 - 20x + 99 \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout nombre x, $F = 2x^2 - 20x + 99$.

4.

Contrôler le résultat de la question 3 en remplaçant x par 1 dans les deux écritures de F.

INDICE

Début : calcule d'abord $(1 - 10)^2$ et $(1 + 1)(1 - 1)$.

CORRIGÉ

Écriture de départ. Pour $x = 1$, on a $(1 - 10)^2 = (-9)^2 = 81$ et $(1 + 1)(1 - 1) = 2 \times 0$:

$$\begin{aligned} &(1 - 10)^2 + (1 + 1)(1 - 1) \\ &= 81 + 2 \times 0 = 81 \end{aligned}$$

Forme réduite. Pour $x = 1$:

$$\begin{aligned} &2 \times 1^2 - 20 \times 1 + 99 \\ &= 2 - 20 + 99 = 81 \end{aligned}$$

Conclusion. Les deux écritures de F donnent la même valeur 81 pour $x = 1$: ce contrôle ne révèle aucune erreur dans la question 3.

Exercice 2

Reconnaître l'identité avant de factoriser

1.

Factoriser $A = 121x^2 - 64$.

INDICE

Début : $121 = 11^2$ et $64 = 8^2$.

CORRIGÉ

Deux carrés. On a $121 = 11^2$, donc $121x^2 = (11x)^2$. De plus, $64 = 8^2$.

Factoriser. D'après le produit d'une somme par une différence, avec $a = 11x$ et $b = 8$:

$$\begin{aligned} &A \\ &= (11x)^2 - 8^2 \\ &= (11x + 8)(11x - 8) \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout nombre x, $A = (11x + 8)(11x - 8)$.

2.

Factoriser $B = (x + 6)^2 - 100$.

INDICE

Début : ici, le premier carré est celui de $x + 6$.

Point délicat : garde $x + 6$ entre parenthèses, puis réduis chaque facteur.

CORRIGÉ

Deux carrés. Le premier carré est celui de $x + 6$, et $100 = 10^2$. On prend donc $a = x + 6$ et $b = 10$, en gardant $x + 6$ entre parenthèses.

Factoriser. D'après le produit d'une somme par une différence, puis en réduisant chaque facteur ($6 + 10 = 16$ et $6 - 10 = -4$) :

$$\begin{aligned} &B \\ &= (x + 6 + 10)(x + 6 - 10) \\ &= (x + 16)(x - 4) \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout nombre x, $B = (x + 16)(x - 4)$.

3.

Factoriser $C = x^2 - 22x + 121$.

INDICE

Outil : trois termes dont deux carrés : pense au carré d'une différence.

Ensuite : vérifie le double produit.

CORRIGÉ

Deux carrés. L'expression a trois termes. Le premier est x^2 et le dernier est $121 = 11^2$. On essaie donc $a = x$ et $b = 11$.

Double produit. On calcule $2 \times x \times 11 = 22x$. C'est le terme du milieu, précédé du signe moins.

Factoriser. D'après le carré d'une différence, lu de droite à gauche, $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$.

Conclusion. Pour tout nombre x :

$$C = (x - 11)^2$$

4.

Factoriser $D = 64x^2 - 16x + 1$.

INDICE

Début : écris $64x^2$ comme le carré de $8x$.

CORRIGÉ

Deux carrés. On a $64x^2 = (8x)^2$ et $1 = 1^2$. On essaie donc $a = 8x$ et $b = 1$.

Double produit. On calcule $2 \times 8x \times 1 = 16x$. C'est le terme du milieu, précédé du signe moins.

Factoriser. D'après le carré d'une différence, lu de droite à gauche.

Conclusion. Pour tout nombre x :

$$D = (8x - 1)^2$$

Exercice 3

Expression conjuguée et simplification

1.

Écrire $\dfrac{6}{\sqrt{6}+2}$ sans racine carrée au dénominateur, sous la forme la plus simple.

INDICE

Outil : l'expression conjuguée de $\sqrt{6}+2$ est $\sqrt{6}-2$.

Point délicat : simplifie la fraction par 2 à la fin.

CORRIGÉ

Le dénominateur n'est pas nul. Les nombres $\sqrt{6}$ et 2 sont strictement positifs, donc leur somme aussi. De plus, $6 > 4$ donne $\sqrt{6} > 2$: le nombre $\sqrt{6}-2$ n'est pas nul non plus.

Expression conjuguée. On multiplie le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{6}-2$. D'après le produit d'une somme par une différence :

$$\begin{aligned}&\left(\sqrt{6}+2\right)\left(\sqrt{6}-2\right)\\&=\left(\sqrt{6}\right)^{2}-2^{2}\\&=6-4=2\end{aligned}$$

Simplification. On divise ensuite 6 par 2 :

$$\begin{aligned}&\frac{6}{\sqrt{6}+2}\\&=\frac{6\left(\sqrt{6}-2\right)}{2}\\&=3\left(\sqrt{6}-2\right)=3\sqrt{6}-6\end{aligned}$$

Conclusion. Sous sa forme la plus simple, $\dfrac{6}{\sqrt{6}+2}=3\sqrt{6}-6$.

2.

En déduire l'écriture la plus simple de $S=\dfrac{6}{\sqrt{6}+2}+6$.

INDICE

Début : remplace la fraction par le résultat de la question 1.

CORRIGÉ

D'après la question 1, la fraction vaut $3\sqrt{6}-6$. On la remplace dans S ; les nombres -6 et 6 s'annulent :

$$S=3\sqrt{6}-6+6=3\sqrt{6}$$

Conclusion. L'écriture la plus simple de S est $3\sqrt{6}$.

3.

Écrire $\dfrac{5}{\sqrt{11}+\sqrt{6}}$ sans racine carrée au dénominateur.

INDICE

Outil : multiplie en haut et en bas par $\sqrt{11}-\sqrt{6}$.

CORRIGÉ

Le dénominateur n'est pas nul. C'est une somme de deux racines carrées strictement positives. De plus, $11 > 6$ donne $\sqrt{11} > \sqrt{6}$: le nombre $\sqrt{11}-\sqrt{6}$ n'est pas nul.

Expression conjuguée. On multiplie le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{11}-\sqrt{6}$. D'après le produit d'une somme par une différence :

$$\begin{aligned}&\left(\sqrt{11}+\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{11}-\sqrt{6}\right)\\&=\left(\sqrt{11}\right)^2-\left(\sqrt{6}\right)^2\\&=11-6=5\end{aligned}$$

Simplification. Le facteur 5 figure en haut et en bas :

$$\begin{aligned}&\frac{5}{\sqrt{11}+\sqrt{6}}\\&=\frac{5\left(\sqrt{11}-\sqrt{6}\right)}{5}\\&=\sqrt{11}-\sqrt{6}\end{aligned}$$

Conclusion. Le nombre $\dfrac{5}{\sqrt{11}+\sqrt{6}}$ s'écrit $\sqrt{11}-\sqrt{6}$, sans racine carrée au dénominateur.

Exercice 4

Plusieurs règles des puissances à la suite

Chaque expression s'écrit comme un entier. Applique une seule règle à chaque étape et nomme-la.

1.

Calculer $A = \dfrac{\left(4^{3}\right)^{2} \times 4^{-5}}{4^{-1}}$.

INDICE

Début : commence par la puissance d'une puissance.

Point délicat : diviser par 4^{-1} revient à retrancher -1 à l'exposant.

CORRIGÉ

Puissance d'une puissance. D'après la puissance d'une puissance, on multiplie les exposants :

$$\left(4^{3}\right)^{2} = 4^{3\times 2} = 4^{6}$$

Produit. D'après le produit de puissances d'un même nombre, on ajoute les exposants, car $6 + (-5) = 1$:

$$4^{6} \times 4^{-5} = 4^{1}$$

Quotient. D'après le quotient de puissances d'un même nombre, on retranche les exposants :

$$\begin{aligned} A &= \frac{4^{1}}{4^{-1}} \\ &= 4^{1-(-1)} \\ &= 4^{2} = 16 \end{aligned}$$

Conclusion. $A = 16$.

2.

Calculer $B = \dfrac{12^5}{4^5 \times 3^3}$.

INDICE

Outil : la puissance d'un quotient, lue de droite à gauche : $\dfrac{12^5}{4^5} = \left(\dfrac{12}{4}\right)^5$.

CORRIGÉ

Puissance d'un quotient. Les nombres 12^5 et 4^5 ont le même exposant. D'après la puissance d'un quotient, lue de droite à gauche :

$$\begin{aligned}&\frac{12^5}{4^5}\\&= \left(\frac{12}{4}\right)^5\\&= 3^5\end{aligned}$$

Quotient. On remplace $\dfrac{12^5}{4^5}$ par 3^5 dans B. D'après le quotient de puissances d'un même nombre :

$$\begin{aligned}B &= \frac{3^5}{3^3}\\&= 3^{5-3}\\&= 3^2 = 9\end{aligned}$$

Conclusion. $B = 9$.

3.

Calculer $C = \dfrac{9^2 \times 27^{-1}}{3^{-2}}$.

INDICE

Début : écris 9 et 27 comme des puissances de 3.

CORRIGÉ

Un seul nombre. On a $9 = 3^2$ et $27 = 3^3$. D'après la puissance d'une puissance :

$$\begin{aligned}9^2 &= \left(3^2\right)^2 = 3^4\\27^{-1} &= \left(3^3\right)^{-1} = 3^{-3}\end{aligned}$$

Produit. D'après le produit de puissances d'un même nombre, car $4 + (-3) = 1$:

$$3^4 \times 3^{-3} = 3^1$$

Quotient. D'après le quotient de puissances d'un même nombre :

$$\begin{aligned}C &= \frac{3^1}{3^{-2}}\\&= 3^{1-(-2)}\\&= 3^3 = 27\end{aligned}$$

Conclusion. $C = 27$.

Exercice 5

Le trajet de la lumière du Soleil

La lumière parcourt environ $300\,000\,000$ mètres par seconde. Le Soleil est à environ $150\,000\,000\,000$ mètres de la Terre. On cherche la durée du trajet de sa lumière jusqu'à nous.

1.

Écrire ces deux nombres en écriture scientifique.

INDICE

Début : compte les zéros après le premier chiffre, ou après 15.

CORRIGÉ

Vitesse. Le nombre $300\,000\,000$ s'écrit 3 suivi de 8 zéros :

$$300\,000\,000 = 3 \times 10^{8}$$

Distance. On place la virgule après le premier chiffre : on obtient $1{,}5$, avec $1 \leq 1{,}5 < 10$. Depuis la fin du nombre, la virgule s'est déplacée de 11 rangs vers la gauche :

$$\begin{aligned} &150\,000\,000\,000 \\ &= 1{,}5 \times 10^{11} \end{aligned}$$

Conclusion. La vitesse vaut 3×10^{8} mètres par seconde et la distance $1{,}5 \times 10^{11}$ mètres.

2.

La durée du trajet, en secondes, est $t = \dfrac{1{,}5 \times 10^{11}}{3 \times 10^{8}}$. Écrire t en écriture scientifique.

INDICE

Outil : divise les nombres $1{,}5$ et 3, puis les puissances de 10.

Point délicat : $0{,}5$ n'est pas compris entre 1 et 10.

CORRIGÉ

Les nombres. On divise $1{,}5$ par 3 :

$$\frac{1{,}5}{3} = 0{,}5$$

Les puissances de 10. D'après le quotient de puissances d'un même nombre :

$$\begin{aligned} &\frac{10^{11}}{10^{8}} \\ &= 10^{11-8} \\ &= 10^{3} \end{aligned}$$

Écriture scientifique. On obtient $t = 0{,}5 \times 10^{3}$. Ce n'est pas une écriture scientifique, car $0{,}5 < 1$. On écrit $0{,}5 = 5 \times 10^{-1}$, puis on ajoute les exposants :

$$\begin{aligned} t &= 5 \times 10^{-1} \times 10^{3} \\ &= 5 \times 10^{2} \end{aligned}$$

Conclusion. $t = 5 \times 10^{2}$ secondes, soit 500 secondes.

3.

Donner une valeur approchée de cette durée en minutes, au dixième près.

INDICE

Début : une minute dure 60 secondes. Utilise la calculatrice.

CORRIGÉ

Une minute dure 60 secondes : on divise la durée en secondes par 60. La calculatrice donne, au dixième près :

$$500 \div 60 \approx 8{,}3$$

Conclusion. La lumière du Soleil met environ $8{,}3$ minutes pour nous parvenir.

4.

Une heure dure $3\,600$ secondes. Écrire ce nombre en écriture scientifique, puis le comparer à t.

INDICE

Outil : pour deux écritures scientifiques, on compare d'abord les exposants.

CORRIGÉ

Écriture scientifique. On place la virgule après le premier chiffre : $3{,}6$. Elle s'est déplacée de 3 rangs vers la gauche :

$$3\,600 = 3{,}6 \times 10^{3}$$

Comparaison. Les deux nombres sont en écriture scientifique. Comme $2 < 3$, le nombre qui a l'exposant 2 est le plus petit :

$$5 \times 10^{2} < 3{,}6 \times 10^{3}$$

Conclusion. La durée t est inférieure à $3\,600$ secondes : le trajet de la lumière dure moins d'une heure.

Exercice 6

Trois calculs de synthèse

1.

Calculer $A = \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{4} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-1}$ et donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

INDICE

Début : $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-1}$ est l'inverse de $\dfrac{2}{3}$.

Point délicat : le produit passe avant la différence.

CORRIGÉ

Puissance. Un nombre non nul affecté de l'exposant -1 est égal à son inverse :

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2}$$

Produit. Le produit se calcule avant la différence : $\dfrac{1}{4} \times \dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{8}$.

Différence. On écrit $\dfrac{3}{4} = \dfrac{6}{8}$, au même dénominateur que $\dfrac{3}{8}$:

$$A = \frac{6}{8} - \frac{3}{8} = \frac{3}{8}$$

Conclusion. Les nombres 3 et 8 n'ont pas d'autre diviseur commun que 1 : la fraction est irréductible, et $A = \dfrac{3}{8}$.

2.

Calculer $B = \left(\sqrt{2} + 1\right)^2 - \sqrt{8}$.

INDICE

Outil : le carré d'une somme.

Ensuite : écris $\sqrt{8}$ sous la forme $a\sqrt{2}$.

CORRIGÉ

Identité. D'après le carré d'une somme, avec $a = \sqrt{2}$ et $b = 1$, et comme $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$:

$$\begin{aligned}&\left(\sqrt{2} + 1\right)^2 \\ &= \left(\sqrt{2}\right)^2 + 2 \times \sqrt{2} \times 1 + 1^2 \\ &= 2 + 2\sqrt{2} + 1 = 3 + 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

Racine carrée. On a $8 = 4 \times 2$ et $\sqrt{4} = 2$:

$$\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2}$$

Résultat. Les termes en $\sqrt{2}$ s'annulent :

$$B = 3 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 3$$

Conclusion. $B = 3$.

3.

Calculer $C = \dfrac{10^{-2} \times 10^{5}}{10^{4}} + \sqrt{50} \times \sqrt{2}$, et donner le résultat sous forme décimale.

INDICE

Outil : les règles des puissances, puis $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ pour a et b positifs.

CORRIGÉ

Puissances. D'après le produit, puis le quotient de puissances d'un même nombre :

$$\begin{aligned} &\frac{10^{-2} \times 10^{5}}{10^{4}} \\ &= \frac{10^{3}}{10^{4}} \\ &= 10^{-1} = 0{,}1 \end{aligned}$$

Racines carrées. Pour deux nombres positifs, le produit des racines carrées est la racine carrée du produit :

$$\sqrt{50} \times \sqrt{2} = \sqrt{100} = 10$$

Résultat. On ajoute les deux parties :

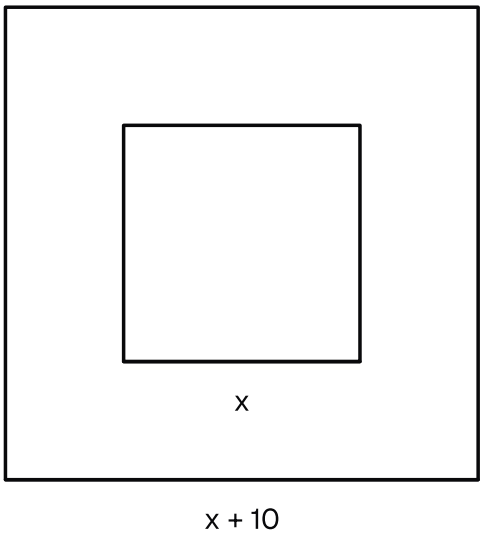
$$C = 0{,}1 + 10 = 10{,}1$$

Conclusion. Sous forme décimale, $C = 10{,}1$.

Exercice 7

Une place pavée autour d'une fontaine

Une place carrée a pour côté $x + 10$ mètres. En son centre, une fontaine carrée a pour côté x mètres. Le reste de la place est pavé.



Vue de dessus de la place de côté x + 10 et de la fontaine carrée de côté x en son milieu ; tout ce qui entoure la fontaine est pavé.

1.

Écrire l'aire pavée P, en mètres carrés, à l'aide de x.

INDICE

Début : l'aire pavée est l'aire de la place moins celle de la fontaine.

CORRIGÉ

L'aire de la place vaut $(x + 10)^2$ et celle de la fontaine vaut x^2. L'aire pavée est la différence des deux.

Conclusion. En mètres carrés :

$$P = (x + 10)^2 - x^2$$

2.

Développer et réduire P.

INDICE

Outil : le carré d'une somme.

CORRIGÉ

D'après le carré d'une somme, $(x+10)^2 = x^2 + 20x + 100$. On retranche ensuite x^2 :

$$\begin{aligned} P &= x^2 + 20x + 100 - x^2 \\ &= 20x + 100 \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout nombre positif x, $P = 20x + 100$.

3.

Factoriser P à l'aide d'une identité remarquable, puis vérifier que l'on retrouve le résultat de la question 2.

INDICE

Outil : P est une différence de deux carrés, avec $a = x + 10$ et $b = x$.

CORRIGÉ

Factoriser. L'aire P est une différence de deux carrés, avec $a = x + 10$ et $b = x$. D'après le produit d'une somme par une différence :

$$P = (x + 10 + x)(x + 10 - x)$$

On réduit chaque facteur : $x + 10 + x = 2x + 10$ et $x + 10 - x = 10$. Donc $P = (2x + 10) \times 10$.

Vérifier. On développe cette forme factorisée :

$$\begin{aligned} P &= (2x + 10) \times 10 \\ &= 20x + 100 \end{aligned}$$

Conclusion. La factorisation $P = (2x + 10) \times 10$ redonne, en développant, $20x + 100$: c'est le résultat de la question 2.

4.

La fontaine a pour côté 6 m. Le pavage coûte 85 dirhams le mètre carré. Calculer le prix du pavage.

INDICE

Début : remplace x par 6 dans la forme réduite de P.

CORRIGÉ

Aire. On remplace x par 6 dans la forme réduite de P :

$$P = 20 \times 6 + 100 = 220$$

Prix. Chaque mètre carré coûte 85 dirhams :

$$220 \times 85 = 18\,700$$

Conclusion. Le pavage coûte $18\,700$ dirhams.