BURHAN

# Calcul numérique : identités remarquables et puissances : exercices, application

3ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/3ac/mathematiques/identites-remarquables-et-puissances/exercices/application

| Chapitre | Palier | Exercices |
| --- | --- | --- |
| Calcul numérique : identités remarquables et puissances | Application | 8 |

### Exercice 1

## L'aire d'une terrasse carrée

Une terrasse carrée a pour côté $x + 4$ mètres, où $x$ est un nombre positif. Son aire, en mètres carrés, est $(x + 4)^2$.

### 1.

Développer l'aire $(x + 4)^2$ de la terrasse.

INDICE

**Outil :** le carré d'une somme.

**Début :** ici, $a = x$ et $b = 4$.

CORRIGÉ

**Repérer l'identité.** L'aire est le carré d'une somme $(a + b)^2$, avec $a = x$ et $b = 4$.

**Développer.** D'après le carré d'une somme, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. On remplace $a$ par $x$ et $b$ par $4$. Le double produit vaut $2 \times x \times 4 = 8x$, et $4^2 = 16$ :

$$\begin{aligned}&(x + 4)^2\\&= x^2 + 2 \times x \times 4 + 4^2\\&= x^2 + 8x + 16\end{aligned}$$

**Conclusion.** L'aire de la terrasse vaut $x^2 + 8x + 16$ mètres carrés.

### 2.

Développer de même $(6x + 1)^2$.

INDICE

**Outil :** la même identité, avec $a = 6x$ et $b = 1$.

**Point délicat :** le carré de $6x$ s'écrit $(6x)^2$.

CORRIGÉ

**Repérer l'identité.** C'est encore le carré d'une somme, cette fois avec $a = 6x$ et $b = 1$.

**Carré de $6x$.** D'après le carré d'un produit, on élève au carré chacun des deux facteurs :

$$(6x)^2 = 6^2 \times x^2 = 36x^2$$

**Développer.** D'après le carré d'une somme, puis avec $2 \times 6x \times 1 = 12x$ :

$$\begin{aligned}&(6x + 1)^2\\&= (6x)^2 + 2 \times 6x \times 1 + 1^2\\&= 36x^2 + 12x + 1\end{aligned}$$

**Conclusion.** Pour tout nombre $x$, $(6x + 1)^2 = 36x^2 + 12x + 1$.

Exercice 2

## Un terrain plus long que large

Un terrain a la forme d'un rectangle. Il mesure $x + 6$ mètres de long et $x - 6$ mètres de large, avec $x > 6$.

### 1.

Développer l'aire $(x + 6)(x - 6)$ du terrain.

INDICE

**Outil :** le produit d'une somme par une différence, avec $a = x$ et $b = 6$.

CORRIGÉ

On reconnaît le produit d'une somme par une différence, avec $a = x$ et $b = 6$. D'après le produit d'une somme par une différence, $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ : les deux termes en $6x$ disparaissent.

$$\begin{aligned}&(x + 6)(x - 6)\\&= x^2 - 6^2\\&= x^2 - 36\end{aligned}$$

**Conclusion.** L'aire du terrain vaut $x^2 - 36$ mètres carrés.

### 2.

Calculer l'aire du terrain pour $x = 10$, de deux façons.

INDICE

**Début :** calcule la longueur et la largeur.

**Ensuite :** remplace $x$ par $10$ dans la forme développée.

CORRIGÉ

**Avec les dimensions.** Pour $x = 10$, la longueur vaut $10 + 6 = 16$ m et la largeur $10 - 6 = 4$ m. L'aire est le produit de la longueur par la largeur :

$$16 \times 4 = 64$$

**Avec la forme développée.** On remplace $x$ par $10$ dans $x^2 - 36$ :

$$\begin{aligned}&10^2 - 36\\&= 100 - 36\\&= 64\end{aligned}$$

**Conclusion.** Les deux méthodes donnent le même résultat : pour $x = 10$, l'aire du terrain vaut $64$ mètres carrés.

### 3.

Question indépendante. Développer $(9x-4)^2$.

INDICE

**Outil :** le carré d'une différence, avec $a=9x$ et $b=4$.

**Point délicat :** le double produit est précédé du signe moins.

CORRIGÉ

**Repérer l'identité.** C'est le carré d'une différence, avec $a=9x$ et $b=4$. D'après le carré d'une différence, $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ : le double produit est précédé du signe moins.

**Calculer chaque terme.** On a $(9x)^2=81x^2$, puis $2\times 9x\times 4=72x$ et $4^2=16$. Donc :

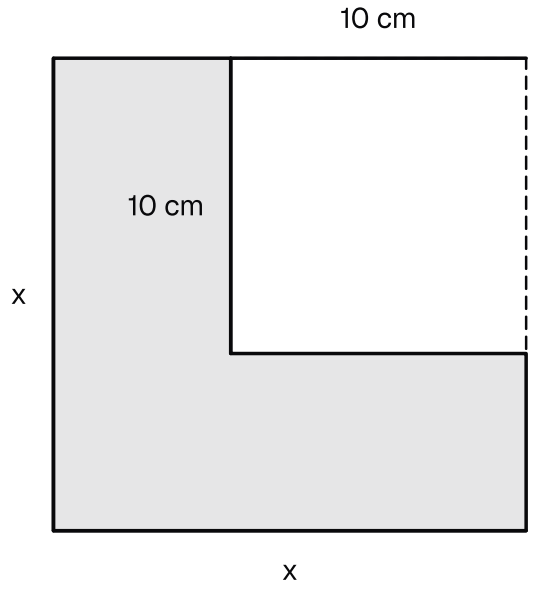
$$\begin{aligned}&(9x-4)^2\\&=(9x)^2-2\times 9x\times 4+4^2\\&=81x^2-72x+16\end{aligned}$$

**Conclusion.** Pour tout nombre $x$, $(9x-4)^2=81x^2-72x+16$.

### Exercice 3

## Un motif découpé dans un carreau

Un carreau de faïence carré a pour côté $x$ centimètres, avec $x > 10$. On y découpe un petit carré de côté $10$ cm pour poser un motif. L'aire qui reste vaut $x^2 - 100$ centimètres carrés.




**Le carreau de côté x, privé dans un coin du petit carré de 10 cm : la partie teintée est l'aire qui reste.**

### 1.

Écrire $100$ comme un carré, puis factoriser $x^2 - 100$.

INDICE

**Outil :** le produit d'une somme par une différence, lu de droite à gauche : $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

CORRIGÉ

**Écrire 100 comme un carré.** On a $100 = 10^2$. L'expression $x^2 - 100$ est donc une différence de deux carrés, avec $a = x$ et $b = 10$.

**Factoriser.** D'après le produit d'une somme par une différence, lu de droite à gauche, $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ :

$$\begin{aligned} & x^2 - 100 \\ & = x^2 - 10^2 \\ & = (x + 10)(x - 10) \end{aligned}$$

**Conclusion.** Pour tout nombre $x$, $x^2 - 100 = (x + 10)(x - 10)$.

### 2.

Écrire $16x^2$ et $81$ comme des carrés. En déduire une factorisation de $16x^2 - 81$.

INDICE

**Début :** $16 = 4^2$, donc $16x^2 = (4x)^2$.

CORRIGÉ

**Écrire chaque terme comme un carré.** On a $16 = 4^2$, donc $16x^2 = (4x)^2$. De plus, $81 = 9^2$.

**Factoriser.** D'après le produit d'une somme par une différence, avec $a = 4x$ et $b = 9$ :

$$\begin{aligned} &16x^2 - 81 \\ &= (4x)^2 - 9^2 \\ &= (4x + 9)(4x - 9) \end{aligned}$$

**Conclusion.** Pour tout nombre $x$, $16x^2 - 81 = (4x + 9)(4x - 9)$.

### 3.

Contrôler le résultat de la question 2 en développant.

INDICE

**Outil :** le produit d'une somme par une différence, cette fois de gauche à droite.

CORRIGÉ

On développe le produit obtenu à la question 2. D'après le produit d'une somme par une différence, cette fois de gauche à droite, avec $a = 4x$ et $b = 9$ :

$$\begin{aligned} &(4x + 9)(4x - 9) \\ &= (4x)^2 - 9^2 \\ &= 16x^2 - 81 \end{aligned}$$

**Conclusion.** Le développement redonne $16x^2 - 81$, l'expression de départ : la factorisation de la question 2 est juste.

Exercice 4

## Reconnaître un carré parfait

### 1.

Factoriser $x^2 + 12x + 36$.

INDICE

**Début :** écris $36$ comme un carré.

**Ensuite :** vérifie que $12x$ est bien le double produit.

CORRIGÉ

**Deux carrés.** Le premier terme est $x^2$ et le dernier est $36 = 6^2$. On essaie donc $a = x$ et $b = 6$.

**Double produit.** On calcule $2 \times x \times 6 = 12x$. C'est bien le terme du milieu, précédé du signe plus.

**Factoriser.** D'après le carré d'une somme, lu de droite à gauche, $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$.

**Conclusion.** Pour tout nombre $x$ :

$$x^2 + 12x + 36 = (x + 6)^2$$

### 2.

Factoriser $16x^2 - 40x + 25$.

INDICE

**Début :** $16x^2 = (4x)^2$ et $25 = 5^2$.

**Point délicat :** le terme du milieu est précédé du signe moins.

CORRIGÉ

**Deux carrés.** On a $16x^2 = (4x)^2$ et $25 = 5^2$. On essaie donc $a = 4x$ et $b = 5$.

**Double produit.** On calcule $2 \times 4x \times 5 = 40x$. On retrouve ce terme au milieu, précédé du signe moins.

**Factoriser.** D'après le carré d'une différence, lu de droite à gauche, $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$.

**Conclusion.** Pour tout nombre $x$ :

$$16x^2 - 40x + 25 = (4x - 5)^2$$

### Exercice 5

## Le calcul mental du caissier

Un caissier n'a pas de calculatrice. Il utilise les identités remarquables pour calculer de tête.

**1.**

Calculer $99^2$.

INDICE

**Début :** écris $99 = 100 - 1$.

**Outil :** le carré d'une différence.

CORRIGÉ

**Faire apparaître un nombre rond.** On écrit $99 = 100 - 1$.

**Identité.** D'après le carré d'une différence, avec $a = 100$ et $b = 1$ :

$$\begin{aligned}&(100 - 1)^2\\&= 100^2 - 2 \times 100 \times 1 + 1^2\end{aligned}$$

**Calcul.** On a $100^2 = 10\,000$ et $2 \times 100 \times 1 = 200$, donc :

$$\begin{aligned}&99^2\\&= 10\,000 - 200 + 1\\&= 9\,801\end{aligned}$$

**Conclusion.** $99^2 = 9\,801$.

**2.**

Calculer $1\,001^2$.

INDICE

**Début :** écris $1\,001 = 1\,000 + 1$.

**Outil :** le carré d'une somme.

CORRIGÉ

**Identité.** On écrit $1\,001 = 1\,000 + 1$. D'après le carré d'une somme, avec $a = 1\,000$ et $b = 1$ :

$$\begin{aligned}&1\,001^2\\&= 1\,000^2 + 2 \times 1\,000 \times 1\\&\quad + 1^2\end{aligned}$$

**Calcul.** On a $1\,000^2 = 1\,000\,000$ et $2 \times 1\,000 \times 1 = 2\,000$, donc :

$$\begin{aligned}&1\,001^2\\&= 1\,000\,000 + 2\,000 + 1\\&= 1\,002\,001\end{aligned}$$

**Conclusion.** $1\,001^2 = 1\,002\,001$.

### 3.

Un client achète $68$ articles à $72$ dirhams chacun. Calculer le prix total $68 \times 72$.

INDICE

**Début :** $68$ et $72$ sont à égale distance de $70$.

**Outil :** le produit d'une somme par une différence.

CORRIGÉ

**Faire apparaître un nombre rond.** Les nombres $68$ et $72$ sont tous deux à $2$ unités de $70$ : $68 = 70 - 2$ et $72 = 70 + 2$.

**Identité.** D'après le produit d'une somme par une différence, avec $a = 70$ et $b = 2$ :

$$\begin{aligned} &68 \times 72 \\ &= (70 - 2)(70 + 2) \\ &= 70^2 - 2^2 \end{aligned}$$

**Calcul.** On a $70^2 = 4\,900$ et $2^2 = 4$, donc :

$$\begin{aligned} &68 \times 72 \\ &= 4\,900 - 4 \\ &= 4\,896 \end{aligned}$$

**Conclusion.** Le prix total est de $4\,896$ dirhams.

### Exercice 6

## Des dénominateurs sans racine carrée

**1.**

Écrire $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$ sans racine carrée au dénominateur.

INDICE

**Outil :** l'expression conjuguée de $\sqrt{2}-1$ est $\sqrt{2}+1$.

**Début :** vérifie d'abord que le dénominateur n'est pas nul.

CORRIGÉ

**Le dénominateur n'est pas nul.** Comme $2>1$, on a $\sqrt{2}>\sqrt{1}$, c'est-à-dire $\sqrt{2}>1$. Le nombre $\sqrt{2}-1$ est donc strictement positif : il n'est pas nul.

**Expression conjuguée.** On multiplie le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{2}+1$, qui n'est pas nul. D'après le produit d'une somme par une différence, le nouveau dénominateur vaut :

$$\begin{aligned}&\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)\\&=\left(\sqrt{2}\right)^{2}-1^{2}\\&=2-1=1\end{aligned}$$

**Écriture finale.** Le numérateur devient $1\times\left(\sqrt{2}+1\right)=\sqrt{2}+1$ :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{2}-1}\\&=\frac{\sqrt{2}+1}{1}\\&=\sqrt{2}+1\end{aligned}$$

**Conclusion.** Le nombre $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$ s'écrit $\sqrt{2}+1$, sans racine carrée au dénominateur.

## 2.

Écrire $\dfrac{4}{3+\sqrt{5}}$ sans racine carrée au dénominateur.

INDICE

**Outil :** multiplie en haut et en bas par $3-\sqrt{5}$.

**Point délicat :** simplifie la fraction à la fin.

CORRIGÉ

**Le dénominateur n'est pas nul.** Les nombres $3$ et $\sqrt{5}$ sont strictement positifs, donc leur somme $3+\sqrt{5}$ aussi : elle n'est pas nulle.

**Expression conjuguée.** Comme $5<9$, on a $\sqrt{5}<3$ : le nombre $3-\sqrt{5}$ n'est pas nul. On multiplie le numérateur et le dénominateur par $3-\sqrt{5}$. D'après le produit d'une somme par une différence, et comme $\left(\sqrt{5}\right)^2=5$ :

$$\begin{aligned}&\left(3+\sqrt{5}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)\\&=3^2-5=4\end{aligned}$$

**Simplification.** Le numérateur et le dénominateur ont le facteur $4$ en commun :

$$\begin{aligned}&\frac{4}{3+\sqrt{5}}\\&=\frac{4\left(3-\sqrt{5}\right)}{4}\\&=3-\sqrt{5}\end{aligned}$$

**Conclusion.** Le nombre $\dfrac{4}{3+\sqrt{5}}$ s'écrit $3-\sqrt{5}$, sans racine carrée au dénominateur.

Exercice 7

## Des photos sur une clé USB

En informatique, les tailles de mémoire s'écrivent avec des puissances de $2$. Une clé USB peut stocker $2^{35}$ octets. Une photo occupe $2^{22}$ octets.

### 1.

Combien de photos la clé peut-elle contenir au plus ? Donner le résultat sous la forme d'une puissance de $2$, puis sous la forme d'un entier.

INDICE

**Outil :** le quotient de puissances d'un même nombre.

CORRIGÉ

**Nombre de photos.** On divise la capacité de la clé par la taille d'une photo. D'après le quotient de puissances d'un même nombre, on retranche les exposants :

$$\begin{aligned}&\frac{2^{35}}{2^{22}}\\&= 2^{35-22}\\&= 2^{13}\end{aligned}$$

**Écriture entière.** On sait que $2^{10} = 1\,024$. D'après le produit de puissances d'un même nombre, lu de droite à gauche :

$$\begin{aligned}&2^{13}\\&= 2^{10} \times 2^{3}\\&= 1\,024 \times 8 = 8\,192\end{aligned}$$

**Conclusion.** La clé peut contenir au plus $2^{13}$ photos, soit $8\,192$ photos.

### 2.

Écrire $\left(2^{10}\right)^{3}$ sous la forme d'une puissance de $2$.

INDICE

**Outil :** la puissance d'une puissance : on multiplie les exposants.

CORRIGÉ

D'après la puissance d'une puissance, on multiplie les exposants : $10 \times 3 = 30$.

$$\begin{aligned}&\left(2^{10}\right)^{3}\\&= 2^{10\times 3}\\&= 2^{30}\end{aligned}$$

**Conclusion.** $\left(2^{10}\right)^{3} = 2^{30}$.

### 3.

Calculer $2^{-3} \times 2^{5}$.

INDICE

**Outil :** le produit de puissances d'un même nombre.

**Point délicat :** l'exposant $-3$ est négatif.

CORRIGÉ

D'après le produit de puissances d'un même nombre, on ajoute les exposants, même quand l'un d'eux est négatif : $-3 + 5 = 2$.

$$\begin{aligned} & 2^{-3} \times 2^{5} \\ & = 2^{-3+5} \\ & = 2^{2} = 4 \end{aligned}$$

**Conclusion.** $2^{-3} \times 2^{5} = 4$.

Exercice 8

## Une population et un grain de sable

Le Maroc compte environ $36\,800\,000$ habitants. Un gros grain de sable pèse environ $0{,}000\,67$ gramme.

**1.**

Écrire $36\,800\,000$ en écriture scientifique.

INDICE

**Début :** place la virgule après le premier chiffre, puis compte les rangs.

CORRIGÉ

**Le nombre entre 1 et 10.** On place la virgule juste après le premier chiffre, $3$ : on obtient $3{,}68$, et l'on a bien $1 \leq 3{,}68 < 10$.

**L'exposant.** Pour passer de $36\,800\,000$ à $3{,}68$, la virgule s'est déplacée de $7$ rangs vers la gauche. L'exposant de $10$ est donc $7$.

**Conclusion.** L'écriture scientifique est :

$$36\,800\,000 = 3{,}68 \times 10^{7}$$

**2.**

Écrire $0{,}000\,67$ en écriture scientifique.

INDICE

**Point délicat :** pour un nombre plus petit que $1$, l'exposant est négatif.

CORRIGÉ

**Le nombre entre 1 et 10.** On place la virgule juste après le premier chiffre non nul, $6$ : on obtient $6{,}7$, et l'on a bien $1 \leq 6{,}7 < 10$.

**L'exposant.** Pour passer de $0{,}000\,67$ à $6{,}7$, la virgule s'est déplacée de $4$ rangs vers la droite. Le nombre de départ est plus petit que $1$ : l'exposant est négatif, il vaut $-4$.

**Conclusion.** L'écriture scientifique est :

$$0{,}000\,67 = 6{,}7 \times 10^{-4}$$

### 3.

Comparer $3{,}68 \times 10^{7}$ et $9{,}1 \times 10^{6}$.

INDICE

**Outil :** pour deux écritures scientifiques, on compare d'abord les exposants.

CORRIGÉ

**Comparer les exposants.** Les deux nombres sont en écriture scientifique. Comme $7 > 6$, le nombre qui a l'exposant $7$ est le plus grand.

**Contrôle.** En écriture décimale, $9{,}1 \times 10^{6} = 9\,100\,000$. Ce nombre est bien inférieur à $36\,800\,000$.

**Conclusion.** On a :

$$3{,}68 \times 10^{7} > 9{,}1 \times 10^{6}$$