BURHAN

Calcul numérique : identités remarquables et puissances

3ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/3ac/mathematiques/identites-remarquables-et-puissances/cours

Chapitre	Semestre
Calcul numérique : identités remarquables et puissances	Semestre 1

Un calcul plus rapide que la calculatrice ?

Ta calculatrice est restée à la maison. Ton ami te lance un défi : calculer 52^2 de tête, en moins de dix secondes.

Poser la multiplication 52×52 prend du temps. Le professeur Burhan, lui, répond en trois secondes. Quel est son secret ?

Devine : Une prédiction

À ton avis, combien vaut 52^2 ? Pense à $52 = 50 + 2$.

A. $2\,504$

Faux.
C'est $50^2 + 2^2$: il manque deux morceaux de 100.

B. $2\,604$

Faux.
Tu as ajouté un seul morceau de 100 : il en faut deux.

C. $2\,704$

Juste.
Juste : $2\,500 + 200 + 4$.

D. 104

Faux.
C'est 52×2, le double de 52, et non son carré.

Correction
Le nombre 52^2 est l'aire d'un carré de côté $50 + 2$. Ce carré se découpe en un carré de côté 50, un carré de côté 2 et deux rectangles de 50 sur 2.

On ajoute ces quatre aires :

$$\begin{aligned} & 52^2 \\ & = 2\,500 + 2 \times 100 + 4 \\ & = 2\,704 \end{aligned}$$

Contrôle : $52 \times 52 = 2\,704$.

Ce secret s'appelle une **identité remarquable** : une égalité à connaître, vraie pour toutes les valeurs des lettres. Tu en apprends trois, pour calculer vite et transformer des expressions. Tu reprends ensuite les puissances et l'écriture scientifique.

Le carré d'une somme

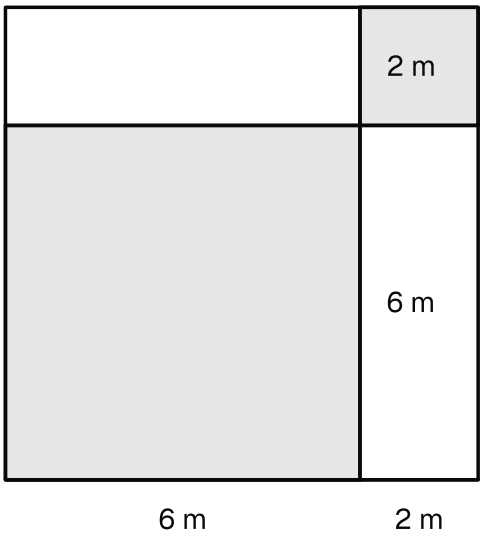
Un jardin carré

Le jardin de Salma est un carré de 8 m de côté. Sur chaque bord, le côté est partagé en 6 m et 2 m. Le jardin forme ainsi quatre parcelles.

Fais le dessin sur ton cahier.

Parcelle	Dimensions	Aire
carré de tomates	6 m sur 6 m	36 m²
carré de menthe	2 m sur 2 m	4 m²
deux rectangles de fleurs	6 m sur 2 m chacun	$2 \times 12 = 24$ m²
jardin entier	8 m sur 8 m	$36 + 4 + 24 = 64$ m²

On retrouve bien $8^2 = 64$.



Le jardin de Salma vu de dessus : chaque bord de 8 m est coupé en 6 m puis 2 m, ce qui dessine deux carrés teintés et deux rectangles.

> **Devine : Le jardin en lettres**
>
> Un autre jardin carré a pour côté $a + b$ mètres. Il est découpé de la même façon : un carré de côté a, un carré de côté b et deux rectangles. Quelle est son aire ?

A. $a^2 + b^2$

Faux.

Tu as oublié les deux rectangles de fleurs.

B. $4(a + b)$

Faux.

C'est le tour du jardin, son périmètre, et non son aire.

C. $a^2 + ab + b^2$

Faux.

Il y a deux rectangles, et non un seul.

D. $a^2 + 2ab + b^2$

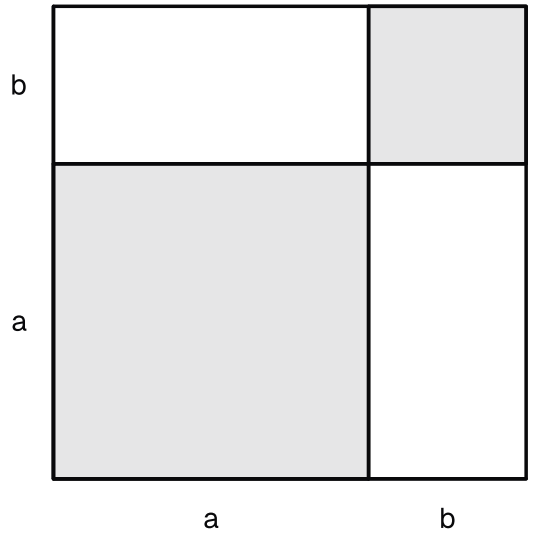
Juste.

Juste : deux carrés et deux rectangles d'aire ab.

Correction

Les deux carrés ont pour aires a^2 et b^2. Chaque rectangle mesure a sur b : son aire vaut ab. L'aire du jardin est donc $a^2 + 2ab + b^2$.

C'est aussi $(a + b)^2$, l'aire d'un carré de côté $a + b$. Avec $a = 6$ et $b = 2$, on retrouve $36 + 24 + 4 = 64$.



Le même découpage en lettres : un côté de longueur a + b, partagé en a puis b sur deux bords voisins.

Le carré d'une somme

Rappel de 2AC : pour développer un produit de deux sommes, on multiplie chaque terme du premier facteur par chaque terme du second.

$$(a+b)(c+d) \\ = ac + ad + bc + bd$$

Développer, c'est transformer ainsi un produit en somme.

Pourquoi est-ce vrai ? Un carré est un produit : $(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$. On le développe avec la double distributivité. Deux termes du milieu apparaissent, et ils sont égaux.

Propriété : Carré d'une somme

Soit a et b deux nombres. Alors

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Le carré d'une somme est égal au carré du premier terme, plus le **double produit** $2ab$ des deux termes, plus le carré du second terme.

Démonstration

Étape 1. Par définition du carré, $(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$.

Étape 2. On développe avec la double distributivité : $(a+b)(a+b) = a \times a + a \times b + b \times a + b \times b$.

Étape 3. Or $a \times a = a^2$ et $b \times b = b^2$. De plus, $b \times a = a \times b$, donc $a \times b + b \times a = 2ab$.

Étape 4. On obtient $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On écrit le carré comme un produit, puis on développe. On obtient quatre termes.

Les deux termes du milieu, $a \times b$ et $b \times a$, sont égaux. Ensemble, ils forment le **double produit** $2ab$. C'est ce terme qui sépare $(a+b)^2$ de $a^2 + b^2$.

Vérifie : Le double produit

Dans la preuve, pourquoi obtient-on $2ab$, et non ab ?

A. Car $a \times b$ et $b \times a$ sont deux termes égaux.

Juste.

Juste : $ab + ab = 2ab$.

B. Car on multiplie a par 2 au début.

Faux.

La preuve ne multiplie jamais a par 2 : le 2 compte deux termes.

C. Car $(a+b)^2$ vaut $2(a+b)$.

Faux.

Faux : élever au carré n'est pas doubler. Avec $a+b=3$, on obtient 9 et non 6.

D. Car l'exposant 2 passe devant ab.

Faux.

L'exposant ne se déplace pas : le 2 vient de deux termes égaux.

Correction

Le développement donne $a \times a + a \times b + b \times a + b \times b$. Or $b \times a = a \times b$: un produit ne dépend pas de l'ordre de ses facteurs. Les deux termes du milieu s'additionnent : $ab + ab = 2ab$.

Exemple : un carré de tête, puis avec une lettre

On écrit $13 = 10 + 3$. D'après le carré d'une somme :

$$\begin{aligned} 13^2 &= 10^2 + 2 \times 10 \times 3 + 3^2 \\ &= 100 + 60 + 9 = 169 \end{aligned}$$

Pour $(x + 5)^2$, on prend $a = x$ et $b = 5$. On obtient :

$$\begin{aligned} (x + 5)^2 &= x^2 + 2 \times x \times 5 + 5^2 \\ &= x^2 + 10x + 25 \end{aligned}$$

Un nombre devant la lettre

Exemple : un nombre devant la lettre

Dans $(2x + 3)^2$, le premier terme est $a = 2x$. On l'écrit entre parenthèses :

$$\begin{aligned} &(2x + 3)^2 \\ &= (2x)^2 + 2 \times 2x \times 3 + 3^2 \\ &= 4x^2 + 12x + 9 \end{aligned}$$

De même, avec $a = 5x$ et $b = 2$:

$$\begin{aligned} &(5x + 2)^2 \\ &= (5x)^2 + 2 \times 5x \times 2 + 2^2 \\ &= 25x^2 + 20x + 4 \end{aligned}$$

Le carré $(5x)^2$ vaut $5^2 \times x^2$, soit $25x^2$.

Attention : ne pas oublier le double produit

✗ « $(x + 7)^2 = x^2 + 49$. »

✓ Le double produit manque. D'après le carré d'une somme, $(x + 7)^2 = x^2 + 14x + 49$.

Contrôle avec $x = 1$: $(1 + 7)^2 = 64$, alors que $1 + 49 = 50$. Le carré d'une somme n'est donc pas la somme des carrés.

Trouve l'erreur : Quatre copies

Quatre élèves développent $(2x+7)^2$. Quelle copie est juste ?

A. $4x^2+49$

Faux.

Le double produit $28x$ manque.

B. $4x^2+14x+49$

Faux.

Tu as calculé $2x \times 7$: il manque le facteur 2 du double produit.

C. $4x^2+28x+49$

Juste.

Juste : $2 \times 2x \times 7 = 28x$.

D. $2x^2+28x+49$

Faux.

Le carré de $2x$ vaut $4x^2$: le carré porte aussi sur 2.

Correction

On prend $a = 2x$ et $b = 7$. D'après le carré d'une somme :

$$\begin{aligned}&(2x+7)^2\\&= (2x)^2 + 2 \times 2x \times 7 + 7^2\\&= 4x^2 + 28x + 49\end{aligned}$$

À toi : Deux développements

Développe $(x+2)^2$, puis $(3x+7)^2$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Repère a et b, puis applique le carré d'une somme.

Indice 2

Pour la seconde expression, $a = 3x$ et $b = 7$.

Indice 3

Point délicat : le double produit vaut $2 \times 3x \times 7$, et $(3x)^2 = 9x^2$.

Réponse

D'après le carré d'une somme, avec $a = x$ et $b = 2$:

$$\begin{aligned}&(x+2)^2\\&= x^2 + 2 \times x \times 2 + 2^2\\&= x^2 + 4x + 4\end{aligned}$$

De même, avec $a = 3x$ et $b = 7$:

$$
\begin{aligned}
&(3x+7)^2 \\
&= (3x)^2 + 2 \times 3x \times 7 \\
&\quad + 7^2 \\
&= 9x^2 + 42x + 49
\end{aligned}
$$

Contrôle avec $x = 1$: $10^2 = 100$ et $9 + 42 + 49 = 100$.

Le carré d'une différence ; somme fois différence

Comparer deux calculs

Devine : Une différence au carré

On sait que $(10-3)^2 = 7^2 = 49$. Quelle écriture donne aussi 49 ?

A. $10^2 + 2 \times 10 \times 3 + 3^2$

Faux.

Elle vaut 169 : c'est $(10+3)^2$.

B. $10^2 - 2 \times 10 \times 3 + 3^2$

Juste.

Juste : $100 - 60 + 9 = 49$.

C. $10^2 - 2 \times 10 \times 3 - 3^2$

Faux.

Elle vaut 31 : le dernier terme doit être ajouté.

D. $10^2 - 3^2$

Faux.

Elle vaut 91 : il manque le double produit.

Correction

On a $100 - 60 + 9 = 49$. Le carré de $10 - 3$ ressemble au carré d'une somme.

Le double produit 60 est maintenant soustrait. Le carré 3^2, lui, reste ajouté.

En clair. Le carré d'une différence se développe comme le carré d'une somme. Seul le signe du double produit change.

Pourquoi est-ce vrai ? On développe $(a-b)(a-b)$ avec la double distributivité. Le produit des deux termes $-b$ est positif, d'après la **règle des signes** : deux nombres de même signe ont un produit positif.

Le carré d'une différence

Propriété : Carré d'une différence

Soit a et b deux nombres. Alors

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Le carré d'une différence est égal au carré du premier terme, moins le double produit $2ab$, plus le carré du second terme.

Démonstration

Étape 1. Par définition du carré, $(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$.

Étape 2. On développe avec la double distributivité : $(a-b)(a-b) = a \times a - a \times b - b \times a + b \times b$. D'après la règle des signes, $a \times (-b) = -a \times b$, $(-b) \times a = -b \times a$ et $(-b) \times (-b) = b \times b$.

Étape 3. Or $a \times a = a^2$ et $b \times b = b^2$. De plus, $b \times a = a \times b$, donc $-a \times b - b \times a = -2ab$.

Étape 4. On obtient $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Les deux termes du milieu, $-a \times b$ et $-b \times a$, sont égaux et précédés d'un signe moins. Ensemble, ils donnent $-2ab$.

Le dernier terme est $(-b) \times (-b)$. D'après la **règle des signes**, il vaut $b \times b = b^2$: deux nombres de même signe ont un produit positif. Seul le double produit change de signe.

Vérifie : Le dernier terme

Dans la preuve, pourquoi le dernier terme b^2 est-il ajouté, et non soustrait ?

A. Car b est toujours un nombre positif.
Faux.
Faux : b peut être négatif. La raison est la règle des signes.

B. Car on recopie le carré d'une somme.
Faux.
La preuve développe $(a-b)(a-b)$ sans utiliser le carré d'une somme.

C. Car $-b \times b = b^2$.
Faux.
Faux : $-b \times b = -b^2$.

D. Car $(-b) \times (-b) = b \times b$.
Juste.
Juste : le produit de deux nombres de même signe est positif.

Correction
Le développement multiplie $-b$ par $-b$. D'après la règle des signes, $(-b) \times (-b) = b \times b = b^2$. Le terme b^2 est donc ajouté.

Seuls les deux termes du milieu sont précédés d'un signe moins.

Exemple : le carré d'une différence

On écrit $19 = 20 - 1$. D'après le carré d'une différence :

$$\begin{aligned} 19^2 &= 20^2 - 2 \times 20 \times 1 + 1^2 \\ &= 400 - 40 + 1 = 361 \end{aligned}$$

Avec $a = x$ et $b = 7$, on obtient :

$$\begin{aligned} (x-7)^2 &= x^2 - 2 \times x \times 7 + 7^2 \\ &= x^2 - 14x + 49 \end{aligned}$$

Des termes qui disparaissent

Devine : Une somme fois une différence

On calcule $(20+3)(20-3) = 23 \times 17 = 391$. Quelle écriture donne aussi 391 ?

A. $20^2 - 3^2$

Juste.

Juste : $400 - 9 = 391$.

B. $20^2 + 3^2$

Faux.

Elle vaut 409 : le signe devant 3^2 est faux.

C. $(20-3)^2$

Faux.

Elle vaut $17^2 = 289$.

D. $20^2 - 3$

Faux.

Elle vaut 397 : c'est 3^2 qu'on soustrait.

Correction

On a $20^2 - 3^2 = 400 - 9 = 391$. En développant $(20+3)(20-3)$, on obtient $400 - 60 + 60 - 9$. Les termes -60 et $+60$ disparaissent.

Pourquoi est-ce vrai ? On développe $(a+b)(a-b)$ avec la double distributivité. Comme dans l'activité, deux termes du milieu apparaissent. L'un vaut $-a \times b$, l'autre vaut $b \times a$.

Le produit d'une somme par une différence

Propriété : Produit d'une somme par une différence

Soit a et b deux nombres. Alors

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

Le produit de la somme de deux nombres par leur différence est égal à la **différence de leurs carrés**.

Démonstration

Étape 1. On développe avec la double distributivité : $(a+b)(a-b) = a \times a - a \times b + b \times a - b \times b$.

Étape 2. Or $b \times a = a \times b$, donc $-a \times b + b \times a = 0$: les deux termes du milieu s'annulent.

Étape 3. Comme $a \times a = a^2$ et $b \times b = b^2$, on obtient $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Les deux termes du milieu sont **opposés** : $-ab$ et $+ab$. Leur somme vaut 0, donc ils disparaissent.

Il ne reste que deux carrés, séparés par un signe moins. C'est pourquoi on parle de **différence de deux carrés**.

Vérifie : Les termes du milieu

Dans la preuve, pourquoi les deux termes du milieu s'annulent-ils ?

A. Car a et b sont égaux.

Faux.

Faux : a et b sont deux nombres quelconques.

B. Car $-a \times b$ et $b \times a$ sont opposés.

Juste.

Juste : $b \times a = a \times b$, donc leur somme vaut 0.

C. Car un produit par b vaut toujours 0.

Faux.

Faux : par exemple, $3 \times 2 = 6$.

D. Car $a^2 - b^2$ vaut 0.

Faux.

Faux : avec $a = 3$ et $b = 1$, on a $9 - 1 = 8$.

Correction

Le développement donne $a \times a - a \times b + b \times a - b \times b$. Or $b \times a = a \times b$: les termes $-a \times b$ et $+b \times a$ sont opposés.

Leur somme vaut 0. Il reste $a^2 - b^2$.

Exemple : une différence de deux carrés

Avec $a = x$ et $b = 3$:

$$(x+3)(x-3) = x^2 - 3^2 = x^2 - 9$$

L'ordre des deux facteurs ne change pas le produit. Avec $a = 2x$ et $b = 5$:

$$\begin{aligned}(2x-5)(2x+5) &= (2x)^2 - 5^2 \\ &= 4x^2 - 25\end{aligned}$$

Avec $a = \sqrt{3}$ et $b = 1$, la racine carrée disparaît :

$$\begin{aligned}&\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right) \\ &= \left(\sqrt{3}\right)^2 - 1^2 \\ &= 3 - 1 = 2\end{aligned}$$

Comparer les trois identités

Attention : le carré porte sur tout le terme

✗ « $(5x)^2 = 5x^2$ » et « $-7^2 = 49$ ».

✓ Le carré porte sur tout ce qui est entre parenthèses : $(5x)^2 = 5^2 \times x^2 = 25x^2$.

Sans parenthèses, le carré ne porte que sur 7 : $-7^2 = -49$. Avec des parenthèses, $(-7)^2 = 49$. Écris donc toujours un nombre négatif entre parenthèses avant de l'élever au carré.

Les trois identités. Pour les retenir, compare-les sur un même exemple, avec $a = 5$ et $b = 2$.

Produit	Forme développée	Avec $a = 5$ et $b = 2$
$(a+b)^2$	$a^2 + 2ab + b^2$	$7^2 = 25 + 20 + 4 = 49$
$(a-b)^2$	$a^2 - 2ab + b^2$	$3^2 = 25 - 20 + 4 = 9$
$(a+b)(a-b)$	$a^2 - b^2$	$7 \times 3 = 25 - 4 = 21$

Vérifie : Un carré d'une différence

Quel est le développement de $(7-2x)^2$?

A. $49 - 4x^2$

Faux.

Il manque le double produit, et $4x^2$ doit être ajouté.

B. $49 - 14x + 4x^2$

Faux.

Le double produit vaut $2 \times 7 \times 2x$, soit $28x$.

C. $49 + 28x + 4x^2$

Faux.

Pour une différence, le double produit est soustrait.

D. $49 - 28x + 4x^2$

Juste.

Juste : $a = 7$ et $b = 2x$.

Correction

On prend $a = 7$ et $b = 2x$. D'après le carré d'une différence :

$$\begin{aligned}&(7 - 2x)^2\\&= 7^2 - 2 \times 7 \times 2x + (2x)^2\\&= 49 - 28x + 4x^2\end{aligned}$$

À toi : Une différence, un produit

Développe $(x - 5)^2$, puis $(5x + 3)(5x - 3)$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Pour chaque expression, reconnais d'abord l'identité.

Indice 2

La seconde est le produit d'une somme par une différence, avec $a = 5x$ et $b = 3$.

Indice 3

Point délicat : $(5x)^2 = 25x^2$, et le double produit de $(x - 5)^2$ est soustrait.

Réponse

D'après le carré d'une différence, avec $a = x$ et $b = 5$:

$$\begin{aligned}&(x - 5)^2\\&= x^2 - 2 \times x \times 5 + 5^2\\&= x^2 - 10x + 25\end{aligned}$$

D'après le produit d'une somme par une différence, avec $a = 5x$ et $b = 3$:

$$\begin{aligned}&(5x + 3)(5x - 3)\\&= (5x)^2 - 3^2\\&= 25x^2 - 9\end{aligned}$$

Développer avec une identité remarquable

Reconnaître la forme

Devine : Quelle identité ?

Pour développer $(5 - 3x)(5 + 3x)$, quelle identité utilises-tu ?

A. Le carré d'une somme.

Faux.

Il n'y a pas de carré : les deux facteurs sont différents.

B. Le produit d'une somme par une différence.

Juste.

Juste : $a = 5$ et $b = 3x$.

C. Le carré d'une différence.

Faux.

Les deux facteurs ne sont pas égaux : l'un a un plus, l'autre un moins.

D. Aucune : il faut la double distributivité.

Faux.

La double distributivité marche aussi, mais l'identité va plus vite.

Correction

Les deux facteurs ont les mêmes termes, 5 et $3x$. L'un est une somme, l'autre une différence.

D'après le produit d'une somme par une différence :

$$\begin{aligned}(5-3x)(5+3x) &= 5^2-(3x)^2\\ &= 25-9x^2\end{aligned}$$

Rappel de 2AC : **développer**, c'est écrire un produit sous forme de somme. Les identités remarquables évitent de poser les quatre produits de la double distributivité. Il faut d'abord reconnaître la forme, puis repérer a et b.

Méthode : développer avec une identité

1. **Reconnais la forme** : $(a+b)^2$, $(a-b)^2$ ou $(a+b)(a-b)$.
2. **Repère a et b** : dans $(3x-2)^2$, on a $a = 3x$ et $b = 2$.
3. **Remplace** a et b dans l'identité. Mets chaque terme remplacé entre parenthèses.
4. **Termine** le calcul terme par terme, puis réduis l'expression obtenue.

Vérifie : Le double produit

Dans le développement de $(3x+5)^2$, que vaut le double produit ?

A. $15x$

Faux.

C'est $3x \times 5$: il manque le facteur 2.

B. 30

Faux.

Le terme $3x$ contient la lettre x : elle reste dans le produit.

C. $30x$

Juste.

Juste : $2 \times 3x \times 5 = 30x$.

D. $9x^2$

Faux.

C'est le carré du premier terme, et non le double produit.

Correction

On prend $a = 3x$ et $b = 5$. Le double produit vaut $2ab = 2 \times 3x \times 5 = 30x$. Le développement complet est $(3x + 5)^2 = 9x^2 + 30x + 25$.

Trois exemples guidés

Exemple : un nombre devant la lettre

On développe $(7x - 2)^2$, avec $a = 7x$ et $b = 2$. D'après le carré d'une différence :

$$\begin{aligned}&(7x - 2)^2\\&= (7x)^2 - 2 \times 7x \times 2 + 2^2\\&= 49x^2 - 28x + 4\end{aligned}$$

Exemple : une fraction, une racine carrée

Avec $a = x$ et $b = \dfrac{3}{2}$, le carré d'une somme donne :

$$\begin{aligned}&\left(x + \frac{3}{2}\right)^2\\&= x^2 + 2 \times x \times \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2\\&= x^2 + 3x + \frac{9}{4}\end{aligned}$$

Avec $a = \sqrt{7}$ et $b = 2$, on obtient :

$$\begin{aligned}&\left(\sqrt{7} + 2\right)^2\\&= \left(\sqrt{7}\right)^2 + 2 \times \sqrt{7} \times 2 + 2^2\end{aligned}$$

Comme $\left(\sqrt{7}\right)^2 = 7$ et $2 \times \sqrt{7} \times 2 = 4\sqrt{7}$, on obtient $7 + 4\sqrt{7} + 4$, soit $11 + 4\sqrt{7}$.

Exemple : développer, puis réduire

On développe $A = (x+3)^2 - (x-2)^2$. Le signe moins porte sur tout le second carré : on garde ses parenthèses.

D'après le carré d'une somme, $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$. D'après le carré d'une différence, $(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$. Donc :

$$\begin{aligned} A &= x^2 + 6x + 9 - \left(x^2 - 4x + 4\right) \\ &= x^2 + 6x + 9 - x^2 + 4x - 4 \\ &= 10x + 5. \end{aligned}$$

Contrôle avec $x = 1$: $4^2 - (-1)^2 = 16 - 1 = 15$, et $10 + 5 = 15$.

Une erreur à éviter, puis entraîne-toi

Trouve l'erreur : La copie de Lina

Lina développe $C = 2x^2 - (x-5)^2$. Elle écrit :

$$\begin{aligned} C &= 2x^2 - x^2 - 10x + 25 \\ &= x^2 - 10x + 25 \end{aligned}$$

Où est son erreur ?

A. Le double produit devrait valoir $5x$.

Faux.

Faux : $2 \times x \times 5 = 10x$, son double produit est juste.

B. $(x-5)^2$ vaut $x^2 - 25$.

Faux.

Faux : $x^2 - 25$ est le produit $(x+5)(x-5)$.

C. Il n'y a aucune erreur.

Faux.

Contrôle avec $x = 0$: $C = -25$, alors que Lina trouve 25.

D. Le signe moins ne porte pas sur tous les termes.

Juste.

Juste : il faut changer le signe des trois termes.

Correction

On garde les parenthèses : $C = 2x^2 - \left(x^2 - 10x + 25\right)$.

Le signe moins change le signe de chacun des trois termes :

$$\begin{aligned} C &= 2x^2 - x^2 + 10x - 25 \\ &= x^2 + 10x - 25 \end{aligned}$$

Contrôle avec $x = 0$: $C = 0 - 25 = -25$.

À toi : Développer et réduire

Développe et réduis $D = (2x+5)^2 - (2x+3)(2x-3)$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Développe chaque morceau avec son identité, entre parenthèses.
Indice 2
D'après le carré d'une somme, $(2x+5)^2 = 4x^2 + 20x + 25$.
Indice 3
Point délicat : le signe moins porte sur $4x^2 - 9$ tout entier.

Réponse
D'après le carré d'une somme, $(2x+5)^2 = 4x^2 + 20x + 25$. D'après le produit d'une somme par une différence, $(2x+3)(2x-3) = 4x^2 - 9$.

Donc $D = 4x^2 + 20x + 25 - \big(4x^2 - 9\big)$. Le signe moins change le signe de $4x^2$ et de -9 :

$$\begin{aligned} D &= 4x^2 + 20x + 25 \\ &\quad - 4x^2 + 9 \\ &= 20x + 34 \end{aligned}$$

Contrôle avec $x = 0$: $25 - (-9) = 34$.

Remarque : Coin examen : rédiger un développement

À l'examen, nomme l'identité, puis écris une égalité par ligne. Par exemple, pour $(2x-5)^2$:
« D'après le carré d'une différence, avec $a = 2x$ et $b = 5$: »

$$\begin{aligned} &(2x-5)^2 \\ &= (2x)^2 - 2 \times 2x \times 5 + 5^2 \\ &= 4x^2 - 20x + 25 \end{aligned}$$

La ligne avec les parenthèses montre ta méthode au correcteur. Contrôle ensuite avec $x = 1$, au brouillon : $(-3)^2 = 9$ et $4 - 20 + 25 = 9$.

Factoriser avec une identité remarquable

Lire une identité à l'envers

Rappel de 1AC : **factoriser**, c'est écrire une somme sous forme de produit. Tu sais le faire avec un facteur commun :

$$\begin{aligned} 5x + 35 &= 5 \times x + 5 \times 7 \\ &= 5(x+7) \end{aligned}$$

Devine : Un produit caché

Quelle écriture en produit est égale à $x^2 - 25$ pour toute valeur de x ?

A. $(x-5)^2$

Faux.

Elle vaut $x^2 - 10x + 25$.

B. $x(x-25)$

Faux.

Elle vaut $x^2 - 25x$.

C. $(x-25)(x+1)$

Faux.

Elle vaut $x^2 - 24x - 25$.

D. $(x+5)(x-5)$

Juste.

Juste : c'est une différence de deux carrés.

Correction

On lit le produit d'une somme par une différence de droite à gauche. Comme $25 = 5^2$, on a :

$$\begin{aligned} x^2 - 25 &= x^2 - 5^2 \\ &= (x+5)(x-5) \end{aligned}$$

Contrôle avec $x = 1$: $1 - 25 = -24$ et $6 \times (-4) = -24$.

En clair. Une identité remarquable se lit dans les deux sens. De gauche à droite, elle développe. De droite à gauche, elle factorise.

On commence par la forme la plus simple à repérer : la différence de deux carrés.

La méthode et trois exemples

Méthode : factoriser avec une identité

1. **Compte les termes.** Deux carrés séparés par un signe moins : pense à $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.
2. **Écris chaque carré** sous la forme a^2 ou b^2 : par exemple $49 = 7^2$ et $4x^2 = (2x)^2$. Écris ensuite le produit.
3. **Si l'expression a trois termes**, pense à $(a+b)^2$ ou à $(a-b)^2$. Repère les deux carrés, puis contrôle que le terme restant vaut $2ab$.
4. **Vérifie le produit** en le développant au brouillon.

Exemple : une différence de deux carrés

On a $4x^2 - 49 = (2x)^2 - 7^2$. D'après le produit d'une somme par une différence :

$$4x^2 - 49 = (2x + 7)(2x - 7)$$

Ici, le premier carré est celui d'une expression : $(x + 2)^2 - 25 = (x + 2)^2 - 5^2$, avec $a = x + 2$ et $b = 5$.

D'après le produit d'une somme par une différence, on garde a entre parenthèses : $(x + 2 + 5)(x + 2 - 5)$. On réduit chaque facteur :

$$(x + 2)^2 - 25 = (x + 7)(x - 3)$$

Exemple : un carré parfait

Une expression $a^2 + 2ab + b^2$ ou $a^2 - 2ab + b^2$ est un **carré parfait**.

- Dans $x^2 + 10x + 25$, on a x^2 et $25 = 5^2$. Le double produit vaut $2 \times x \times 5 = 10x$: c'est bien le terme restant. D'après le carré d'une somme, $x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$.
- Dans $9x^2 - 30x + 25$, on a $9x^2 = (3x)^2$ et $25 = 5^2$. Or $2 \times 3x \times 5 = 30x$. D'après le carré d'une différence, $9x^2 - 30x + 25 = (3x - 5)^2$.

Exemple : quand ce n'est pas un carré parfait

Dans $x^2 + 5x + 49$, on a x^2 et $49 = 7^2$. Le double produit serait $2 \times x \times 7 = 14x$. Or le terme restant est $5x$.

Ce n'est donc pas un carré parfait : $(x + 7)^2$ vaut $x^2 + 14x + 49$. Sans ce contrôle, on aurait écrit une égalité fausse.

Un piège, puis entraîne-toi

Attention : une somme de deux carrés

✗ « $x^2 + 25 = (x + 5)(x - 5)$. »

✓ Le produit $(x + 5)(x - 5)$ vaut $x^2 - 25$, et non $x^2 + 25$. Aucune des trois identités ne factorise une somme de deux carrés. Contrôle avec $x = 0$: on trouve 25 d'un côté et -25 de l'autre.

Vérifie : Repérer un carré parfait

Laquelle de ces expressions est un carré parfait ?

A. $x^2 - 14x + 49$

Juste.
Juste : $x^2 - 2 \times x \times 7 + 7^2 = (x - 7)^2$.

B. $x^2 + 49$

Faux.

Il manque le double produit : ce n'est pas un carré parfait.

C. $x^2 + 7x + 49$

Faux.

Le double produit devrait être $14x$, et non $7x$.

D. $x^2 - 49$

Faux.

C'est une différence de deux carrés : elle vaut $(x + 7)(x - 7)$.

Correction

Dans $x^2 - 14x + 49$, on a x^2 et $49 = 7^2$. Le double produit vaut $2 \times x \times 7 = 14x$: c'est bien le terme du milieu, avec un signe moins. D'après le carré d'une différence, $x^2 - 14x + 49 = (x - 7)^2$.

À toi : Deux factorisations

Factorise $A = 25x^2 - 4$: écris d'abord $25x^2$ comme un carré. Factorise ensuite $B = x^2 - 6x + 9$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Compte les termes de chaque expression, puis cherche les carrés.

Indice 2

On a $25x^2 = (5x)^2$, $4 = 2^2$ et $9 = 3^2$.

Indice 3

Point délicat : pour B, vérifie que $6x$ est bien le double produit $2 \times x \times 3$.

Réponse

On a $A = (5x)^2 - 2^2$. D'après le produit d'une somme par une différence, $A = (5x + 2)(5x - 2)$.

Dans B, on a x^2 et $9 = 3^2$, et $2 \times x \times 3 = 6x$. D'après le carré d'une différence, $B = (x - 3)^2$.

Contrôle avec $x = 1$: $1 - 6 + 9 = 4$ et $(1 - 3)^2 = 4$.

Remarque : Coin examen : rédiger une factorisation

À l'examen, montre la forme de l'identité avant le produit. Par exemple, pour $x^2 - 4x + 4$: « D'après le carré d'une différence : »

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 4 &= x^2 - 2 \times x \times 2 + 2^2 \\ &= (x - 2)^2 \end{aligned}$$

La ligne du milieu prouve que tu as contrôlé le double produit. Termine par un contrôle en développant, au brouillon.

Calculer astucieusement ; l'expression conjuguée

Calculer de tête

Devine : Un produit de tête

Sans calculatrice, combien vaut 47×53 ? Remarque que 47 et 53 sont à égale distance de 50.

A. $2\,491$

Juste.

Juste : $2\,500 - 9$.

B. $2\,509$

Faux.

Tu as ajouté 3^2 : il faut le soustraire.

C. $2\,500$

Faux.

Les écarts ne se compensent pas tout à fait : il reste -9.

D. $2\,494$

Faux.

Tu as soustrait 2×3 au lieu de 3^2.

Correction

On écrit $47 = 50 - 3$ et $53 = 50 + 3$. D'après le produit d'une somme par une différence :

$$\begin{aligned} 47 \times 53 &= 50^2 - 3^2 \\ &= 2\,500 - 9 = 2\,491 \end{aligned}$$

Méthode : calculer astucieusement

1. **Cherche un nombre rond** tout proche : $103 = 100 + 3$ et $97 = 100 - 3$.
2. **Choisis l'identité** : un carré si le nombre est proche d'un nombre rond (103^2) ; le produit d'une somme par une différence si deux nombres sont à égale distance d'un nombre rond.
3. **Calcule** avec le nombre rond, une étape à la fois.
4. **Vérifie** à la calculatrice.

Exemple : deux carrés de tête

D'après le carré d'une somme :

$$\begin{aligned} 103^2 &= (100 + 3)^2 \\ &= 10\,000 + 600 + 9 = 10\,609 \end{aligned}$$

D'après le carré d'une différence :

$$\begin{aligned} 97^2 &= (100-3)^2 \\ &= 10\,000 - 600 + 9 = 9\,409 \end{aligned}$$

Le double produit vaut $2 \times 100 \times 3 = 600$ dans les deux cas. Seul son signe change.

L'expression conjuguée

Rappel du chapitre précédent : rendre rationnel un dénominateur, c'est l'écrire sans racine carrée. Pour $\frac{1}{\sqrt{3}}$, on multiplie le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{3}$: on obtient $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Avec $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$, ce geste ne suffit plus : $\left(2+\sqrt{3}\right) \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3} + 3$ contient encore une racine.

L'**expression conjuguée** de $a+\sqrt{b}$ est $a-\sqrt{b}$. Celle de $a-\sqrt{b}$ est $a+\sqrt{b}$. On change seulement le signe entre les deux termes.

De même, $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ et $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ sont conjuguées. Leur produit vaut $a-b$, pour a et b positifs.

Le produit de deux expressions conjuguées ne contient plus de racine. Pour b positif, d'après le produit d'une somme par une différence :

$$\begin{aligned} &\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right) \\ &= a^2 - \left(\sqrt{b}\right)^2 \\ &= a^2 - b \end{aligned}$$

Méthode : rendre rationnel un dénominateur

1. **Contrôle d'abord** le dénominateur : il ne doit pas valoir 0.
2. **Change le signe** entre les deux termes du dénominateur : tu obtiens son expression conjuguée.
3. **Multiplie en haut et en bas** par cette expression conjuguée. La valeur de la fraction ne bouge pas.
4. **Développe le bas** avec le produit d'une somme par une différence. La racine disparaît ; simplifie ensuite.

Deux exemples, puis à toi

Exemple : un entier plus une racine

Le dénominateur $2+\sqrt{3}$ est strictement positif, donc non nul. Son expression conjuguée est $2-\sqrt{3}$. On multiplie en haut et en bas par $2-\sqrt{3}$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2+\sqrt{3}} &= \frac{2-\sqrt{3}}{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)} \\ &= \frac{2-\sqrt{3}}{4-3} \\ &= 2-\sqrt{3}\end{aligned}$$

Contrôle à la calculatrice : les deux nombres valent $0{,}268$ à $0{,}001$ près.

Exemple : deux racines carrées

Comme $7 > 3$, on a $\sqrt{7} > \sqrt{3}$: le dénominateur de $\dfrac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ est strictement positif, donc non nul.

Son expression conjuguée est $\sqrt{7}+\sqrt{3}$.

Au dénominateur, d'après le produit d'une somme par une différence :

$$\begin{aligned}&\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right) \\ &= 7-3 = 4\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\frac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} &= \frac{4\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}{4} \\ &= \sqrt{7}+\sqrt{3}\end{aligned}$$

Vérifie : Une expression conjuguée

Réponds aux deux questions : quelle est l'expression conjuguée de $5-\sqrt{7}$? Que vaut son produit avec $5-\sqrt{7}$?

A. $5+\sqrt{7}$, et le produit vaut 32

Faux.

Le produit est une différence de carrés : $25-7$, et non $25+7$.

B. $5+\sqrt{7}$, et le produit vaut 18

Juste.

Juste : $5^2-\left(\sqrt{7}\right)^2 = 25-7$.

C. $-5-\sqrt{7}$, et le produit vaut -18

Faux.

C'est l'opposé de l'expression conjuguée : on ne change que le signe entre les deux termes.

D. $5+\sqrt{7}$, et le produit vaut -24

Faux.

Tu as pris 49 pour $\left(\sqrt{7}\right)^2$; or ce carré vaut 7.

Correction

On change le signe entre les deux termes : l'expression conjuguée de $5-\sqrt{7}$ est $5+\sqrt{7}$. D'après le produit d'une somme par une différence, $\left(5-\sqrt{7}\right)\left(5+\sqrt{7}\right)=25-7=18$.

À toi : Un carré de tête, un dénominateur

Calcule 58^2 de tête. Rends ensuite rationnel le dénominateur de $\dfrac{3}{3-\sqrt{7}}$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Pour 58^2, écris $58=60-2$. Pour la fraction, cherche l'expression conjuguée.
Indice 2
On a $\left(3-\sqrt{7}\right)\left(3+\sqrt{7}\right)=9-7=2$.
Indice 3
Point délicat : multiplie aussi le numérateur 3 par $3+\sqrt{7}$.

Réponse
D'après le carré d'une différence :

$$\begin{aligned} 58^2 &= (60-2)^2 \\ &= 3\,600-240+4 \\ &= 3\,364 \end{aligned}$$

Comme $9>7$, on a $3>\sqrt{7}$: le dénominateur est strictement positif, donc non nul. On multiplie en haut et en bas par $3+\sqrt{7}$:

$$\begin{aligned} \frac{3}{3-\sqrt{7}} &= \frac{3\left(3+\sqrt{7}\right)}{9-7} \\ &= \frac{9+3\sqrt{7}}{2} \end{aligned}$$

Calculer avec des puissances

Compter les facteurs

Rappel de 2AC : pour un nombre a et un entier $n\geq 1$, a^n est le produit de n facteurs égaux à a. Par exemple :

$$2^5=2\times 2\times 2\times 2\times 2=32$$

Pour a non nul, on pose $a^0=1$ et $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$.

Devine : Compter les facteurs

Sans calculer, à quelle puissance de 3 le produit $3^4\times 3^2$ est-il égal ?

A. 3^8
Faux.

Tu as multiplié les exposants : $4 \times 2 = 8$.

B. 3^2

Faux.

Tu as soustrait les exposants : c'est la règle d'un quotient.

C. 3^6

Juste.

Juste : quatre facteurs égaux à 3, puis deux autres.

D. 9^6

Faux.

Le nombre 3 ne change pas : seul l'exposant change.

Correction

On écrit tous les facteurs :

$$\begin{aligned} & 3^4 \times 3^2 \\ & = (3 \times 3 \times 3 \times 3) \times (3 \times 3) \end{aligned}$$

On compte six facteurs égaux à 3 : $3^4 \times 3^2 = 3^6 = 729$.

Les règles des puissances

Propriété : Règles de calcul sur les puissances

Soit a et b deux nombres non nuls, et m et n deux entiers relatifs.

- Produit de puissances d'un même nombre : $a^m \times a^n = a^{m+n}$.
- Quotient de puissances d'un même nombre : $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.
- Puissance d'une puissance : $(a^m)^n = a^{m \times n}$.
- Puissance d'un produit et d'un quotient : $(a \times b)^n = a^n \times b^n$ et $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$.

On rappelle que $a^0 = 1$, $a^1 = a$ et $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Remarque : Un résultat admis

Ce résultat est admis : tu l'as vu en 2AC.

En clair. Pour des puissances d'un même nombre, les exposants s'ajoutent dans un produit. Ils se soustraient dans un quotient.

Ils se multiplient pour une puissance de puissance. Enfin, la puissance d'un produit ou d'un quotient se répartit sur chaque facteur.

Exemple : des puissances d'un même nombre

On calcule $A = \dfrac{7^5 \times 7^2}{7^4}$.

- Produit de puissances d'un même nombre : $7^5 \times 7^2 = 7^{5+2} = 7^7$.
- Quotient de puissances d'un même nombre : $\dfrac{7^7}{7^4} = 7^{7-4} = 7^3$.
- Donc $A = 7^3 = 343$.

Une règle par étape

Méthode : calculer avec des puissances

1. **Fais apparaître** un même nombre, quand c'est possible : $25 = 5^2$, $0{,}001 = 10^{-3}$.
2. **Rassemble** les puissances de ce nombre.
3. **Une étape, une règle** : écris le nom de la règle à côté du calcul.
4. **Termine** sous la forme demandée : une puissance, un entier ou une fraction.

Exemple : puissance d'un produit, d'un quotient, d'une puissance

Puissance d'un produit :

$$\begin{aligned}(2 \times 5)^3 &= 2^3 \times 5^3 \\ &= 8 \times 125 = 1\,000\end{aligned}$$

Contrôle : $10^3 = 1\,000$.

Puissance d'un quotient : $\left(\dfrac{2}{3}\right)^3 = \dfrac{2^3}{3^3} = \dfrac{8}{27}$.

Lecture à l'envers de la puissance d'un quotient :

$$\frac{10^2}{5^2} = \left(\frac{10}{5}\right)^2 = 2^2 = 4$$

Puissance d'une puissance :

$$\left(5^2\right)^3 = 5^{2\times 3} = 5^6 = 15\,625$$

Exemple : des exposants négatifs

- $2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8} = 0{,}125$.
- D'après le quotient de puissances d'un même nombre, $\dfrac{3^{-2}}{3^{-5}} = 3^{-2-(-5)} = 3^3 = 27$.

- D'après la puissance d'une puissance, $\left(5^{-1}\right)^{2} = 5^{-2} = \dfrac{1}{25}$.

Une somme de puissances, puis entraîne-toi

Attention : une somme de puissances

✗ « $2^{3} + 2^{4} = 2^{7}$. »

✓ Les règles ne concernent que des produits et des quotients. Ici, on calcule chaque puissance : $2^{3} + 2^{4} = 8 + 16 = 24$, alors que $2^{7} = 128$. Autre piège : $3^{2} \times 5^{3}$ ne se regroupe pas, car les nombres et les exposants sont différents.

Vérifie : Un seul calcul juste

Lequel de ces calculs est juste ?

A. $5^{3} \times 5^{4} = 5^{12}$

Faux.

Dans un produit, les exposants s'ajoutent : 5^{7}.

B. $\left(2^{3}\right)^{2} = 2^{6}$

Juste.

Juste : puissance d'une puissance, $3 \times 2 = 6$.

C. $\dfrac{7^{6}}{7^{2}} = 7^{3}$

Faux.

Dans un quotient, les exposants se soustraient : 7^{4}.

D. $3^{2} + 3^{2} = 3^{4}$

Faux.

C'est une somme : $9 + 9 = 18$, alors que $3^{4} = 81$.

Correction

D'après la puissance d'une puissance, $\left(2^{3}\right)^{2} = 2^{3\times 2} = 2^{6} = 64$. Contrôle : $8^{2} = 64$. Les autres calculs se corrigent : $5^{3} \times 5^{4} = 5^{7}$, $\dfrac{7^{6}}{7^{2}} = 7^{4}$ et $3^{2} + 3^{2} = 18$.

À toi : Une seule puissance

Écris $B = \dfrac{2^{7} \times 4}{2^{5}}$ sous la forme d'une puissance de 2, puis calcule-le. Écris ensuite $C = 5^{3} \times 5^{-5}$ sous forme de fraction. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Écris 4 comme une puissance de 2, puis applique la méthode.

Indice 2
On a $4 = 2^2$, donc $2^7 \times 4 = 2^9$.
Indice 3
Point délicat : pour C, l'exposant $3 + (-5)$ est négatif.

Réponse
Comme $4 = 2^2$, le produit de puissances d'un même nombre donne $2^7 \times 2^2 = 2^9$. Le quotient de puissances donne $B = \dfrac{2^9}{2^5} = 2^4 = 16$.

Le produit de puissances donne $C = 5^{3+(-5)} = 5^{-2} = \dfrac{1}{25}$.

Puissances de 10 et écriture scientifique

Très grand, très petit

Rappel de 2AC : multiplier par 10^5 décale la virgule de cinq rangs vers la droite. Multiplier par 10^{-5} la décale de cinq rangs vers la gauche.

Une cellule du corps humain mesure environ $0{,}00002$ m. Ce nombre s'écrit 2×10^{-5} m.

Devine : La distance de la Terre à la Lune

La distance moyenne de la Terre à la Lune est d'environ $384\,400$ km. Laquelle de ces écritures est égale à $384\,400$?

A. $3{,}844 \times 10^4$
Faux.
Elle vaut $38\,440$: il manque un rang.

B. $3{,}844 \times 10^6$
Faux.
Elle vaut $3\,844\,000$: il y a un rang de trop.

C. $3{,}844 \times 10^5$
Juste.
Juste : la virgule se déplace de cinq rangs vers la droite.

D. $384{,}4 \times 10^2$
Faux.
Elle vaut $38\,440$: il faudrait 10^3.

Correction
Multiplier $3{,}844$ par 10^5 décale la virgule de cinq rangs vers la droite : on obtient $384\,400$. Donc $384\,400 = 3{,}844 \times 10^5$. Le nombre $3{,}844$ est compris entre 1 et 10 : c'est l'écriture scientifique.

Définition : Puissances de 10 et écriture scientifique

Soit n un entier naturel non nul. Le nombre 10^n s'écrit avec le chiffre 1 suivi de n zéros. Le nombre $10^{-n} = \dfrac{1}{10^n}$ s'écrit $0{,}0\ldots01$, avec le chiffre 1 au n-ième rang après la virgule.

Tout nombre décimal positif non nul x s'écrit d'une seule façon sous la forme

$$x = a \times 10^p,$$

où a est un nombre décimal tel que $1 \leq a < 10$ et p un entier relatif. Cette écriture est l'**écriture scientifique** de x.

Écrire, comparer, estimer

Méthode : utiliser l'écriture scientifique

1. **Écris** le nombre : place la virgule après son premier chiffre non nul. Tu obtiens un nombre compris entre 1 et 10. Choisis ensuite l'exposant pour retrouver le nombre de départ.
2. **Compare** deux nombres positifs écrits en écriture scientifique par leurs exposants : le plus grand exposant donne le plus grand nombre. À exposants égaux, compare les nombres compris entre 1 et 10.
3. **Estime** un ordre de grandeur, c'est-à-dire une valeur approchée simple : remplace le nombre compris entre 1 et 10 par un entier proche.
4. **Calcule** un produit ou un quotient : traite les nombres compris entre 1 et 10 d'un côté, les puissances de 10 de l'autre.

Exemple : écrire en écriture scientifique

- $384\,400 = 3{,}844 \times 10^5$: la virgule se déplace de cinq rangs vers la gauche.
- $0{,}00002 = 2 \times 10^{-5}$: la virgule se déplace de cinq rangs vers la droite.
- $905\,000 = 9{,}05 \times 10^5$ et $0{,}0063 = 6{,}3 \times 10^{-3}$.

Exemple : comparer deux distances

Le tour de la Terre à l'équateur mesure environ $40\,075$ km, soit $4{,}0075 \times 10^4$ km. Pour aller jusqu'à la Lune, il faut parcourir environ $3{,}844 \times 10^5$ km.

L'exposant 5 dépasse l'exposant 4 : la distance à la Lune est la plus grande. Pourtant, $3{,}844$ est plus petit que $4{,}0075$. En écriture scientifique, compare donc toujours les exposants d'abord.

Calculer avec l'écriture scientifique

Exemple : des cellules jusqu'à la Lune

Combien de cellules de 2×10^{-5} m faut-il aligner pour atteindre la Lune ? Un kilomètre vaut 10^3 m. La distance vaut donc, en mètres :

$$3{,}844 \times 10^5 \times 10^3 = 3{,}844 \times 10^8$$

On sépare les nombres et les puissances de 10 : $\dfrac{3{,}844}{2} \times \dfrac{10^8}{10^{-5}}$. D'après le quotient de puissances d'un même nombre :

$$\begin{aligned} &\frac{3{,}844 \times 10^8}{2 \times 10^{-5}} \\ &= \frac{3{,}844}{2} \times 10^{8-(-5)} \\ &= 1{,}922 \times 10^{13} \end{aligned}$$

Ordre de grandeur : $\dfrac{4 \times 10^8}{2 \times 10^{-5}} = 2 \times 10^{13}$. Le résultat est cohérent.

Attention : un seul chiffre avant la virgule

✗ « 47×10^6 est une écriture scientifique. »

✓ Il faut $1 \leq a < 10$; or $47 \geq 10$. On écrit $47 = 4{,}7 \times 10$, donc $47 \times 10^6 = 4{,}7 \times 10^7$. De même, $0{,}3 \times 10^{-4} = 3 \times 10^{-5}$, car $0{,}3 < 1$.

Vérifie : Le plus grand nombre

Lequel de ces nombres est le plus grand ?

A. $9{,}8 \times 10^{-3}$

Faux.

Il vaut $0{,}0098$: son exposant -3 est plus petit que -2.

B. $1{,}2 \times 10^{-2}$

Juste.

Juste : -2 est le plus grand des exposants.

C. 5×10^{-3}

Faux.

Il vaut $0{,}005$, moins que $0{,}012$.

D. $9{,}9 \times 10^{-4}$

Faux.

Il vaut $0{,}00099$: c'est le plus petit.

Correction

On compare d'abord les exposants : -2 est plus grand que -3 et que -4. Donc $1{,}2 \times 10^{-2} = 0{,}012$ est le plus grand. Prends garde aux exposants négatifs : $-2 > -3$.

À toi : Écrire et calculer

Écris $72\,000\,000$ et $0{,}00051$ en écriture scientifique. Calcule ensuite $\left(3 \times 10^{4}\right) \times \left(5 \times 10^{-7}\right)$, en écriture scientifique. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Place la virgule après le premier chiffre non nul, puis compte les rangs.
Indice 2
Pour le produit, regroupe les nombres : $3 \times 5 = 15$.
Indice 3
Point délicat : 15×10^{-3} n'est pas une écriture scientifique, car $15 \geq 10$.

Réponse
On a $72\,000\,000 = 7{,}2 \times 10^{7}$ et $0{,}00051 = 5{,}1 \times 10^{-4}$.

On regroupe les nombres, puis les puissances de 10 :

$$\begin{aligned}&\left(3 \times 10^{4}\right) \times \left(5 \times 10^{-7}\right)\\ &= 15 \times 10^{4+(-7)}\\ &= 15 \times 10^{-3}\end{aligned}$$

Comme $15 = 1{,}5 \times 10$, le résultat est $1{,}5 \times 10^{-2}$.

Remarque : Coin examen : rédiger un calcul en écriture scientifique

À l'examen, regroupe les nombres et les puissances de 10, puis nomme la règle. Par exemple :
« D'après le quotient de puissances d'un même nombre : »

$$\begin{aligned}\frac{6 \times 10^{5}}{2 \times 10^{-3}} &= \frac{6}{2} \times \frac{10^{5}}{10^{-3}}\\ &= 3 \times 10^{5-(-3)}\\ &= 3 \times 10^{8}\end{aligned}$$

Vérifie à la fin que $1 \leq 3 < 10$.

Synthèse : le calcul numérique du collège

Les outils du collège

Devine : Les priorités

Combien vaut $A = 1 + \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}$?

A. 2

Faux.

Tu as calculé $1 + \frac{1}{2}$ d'abord. Or la multiplication est prioritaire.

B. $\frac{2}{3}$

Faux.

C'est le produit seul : il faut encore ajouter 1.

C. $\frac{5}{3}$

Juste.

Juste : $1 + \frac{2}{3}$.

Correction

La multiplication passe avant l'addition. D'abord $\frac{1}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Puis $A = 1 + \frac{2}{3} = \frac{3}{3} + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$.

Rappel de 1AC et de 2AC : au moment d'additionner deux fractions, mets-les au même dénominateur. Leur produit s'obtient en multipliant numérateurs et dénominateurs. Diviser par une fraction non nulle revient à multiplier par son inverse : $\frac{3}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \times 2 = \frac{3}{2}$.

Rappel de 2AC : les règles des puissances valent pour des produits et des quotients de puissances d'un même nombre. Pour a non nul, $a^{-1} = \frac{1}{a}$: c'est l'inverse de a. Par exemple, $\left(\frac{3}{5}\right)^{-1} = \frac{5}{3}$.

Rappel du chapitre précédent : pour a et b positifs, $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ et $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$. On simplifie une racine carrée en faisant sortir un carré : $\sqrt{28} = \sqrt{4 \times 7} = 2\sqrt{7}$.

La méthode de synthèse

Méthode : mener un calcul de synthèse

1. **Repère** les morceaux de l'expression : fractions, puissances, racines carrées, identités.
2. **Respecte les priorités** (rappel de 1AC) : parenthèses, puis puissances, puis produits et quotients, enfin sommes et différences.
3. **Simplifie** à chaque étape : fraction irréductible, racine carrée $a\sqrt{b}$ avec b entier le plus petit possible.
4. **Contrôle** le résultat avec une valeur approchée, à la calculatrice.

Exemple : fractions et puissances

On calcule $B = \frac{2^3}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times 3^3$.

- Puissances d'abord : $2^3 = 8$, $3^3 = 27$ et $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$, d'après la puissance d'un quotient.
- Produit ensuite : $\frac{1}{9} \times 27 = \frac{27}{9} = 3$.
- Différence enfin : $B = \frac{8}{3} - 3 = \frac{8}{3} - \frac{9}{3} = -\frac{1}{3}$.

Exemple : racines carrées et identité

On calcule $C = \left(\sqrt{7} - 1\right)\left(\sqrt{7} + 1\right) + \sqrt{28}$.

- D'après le produit d'une somme par une différence, $\left(\sqrt{7} - 1\right)\left(\sqrt{7} + 1\right) = 7 - 1 = 6$.
- On simplifie : $\sqrt{28} = 2\sqrt{7}$.
- Donc $C = 6 + 2\sqrt{7}$. Contrôle à la calculatrice : les deux écritures valent $11{,}29$ à $0{,}01$ près.

Tout ensemble

Exemple : les quatre outils à la fois

On calcule :

$$D = \frac{\left(\sqrt{3} + 1\right)^2 - 2\sqrt{3}}{2^{-1}}$$

- D'après le carré d'une somme, $\left(\sqrt{3} + 1\right)^2 = 3 + 2\sqrt{3} + 1$, soit $4 + 2\sqrt{3}$.
- Le numérateur vaut donc $4 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 4$.
- Le dénominateur vaut $2^{-1} = \frac{1}{2}$.
- Diviser par $\frac{1}{2}$, c'est multiplier par 2 : $D = 4 \times 2 = 8$.

Attention : une somme ne se découpe pas

✗ « $\sqrt{36 + 64} = 6 + 8 = 14$ » et « $\frac{1}{4} + \frac{2}{3} = \frac{3}{7}$ ».

✓ On calcule d'abord la somme sous la racine : $\sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$. Pour les fractions, on prend un dénominateur commun : $\frac{1}{4} + \frac{2}{3} = \frac{3}{12} + \frac{8}{12} = \frac{11}{12}$.

Vérifie : Fractions, racines, puissances : le calcul juste

Lequel de ces calculs est juste ?

A. $\sqrt{9} + \sqrt{16} = \sqrt{25}$

Faux.

Le membre de gauche vaut $3 + 4 = 7$, celui de droite vaut 5.

B. $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{2}{7}$

Faux.

On a $\frac{5}{10} + \frac{2}{10} = \frac{7}{10}$.

C. $3^2 + 3^3 = 3^5$

Faux.

C'est une somme : $9 + 27 = 36$, alors que $3^5 = 243$.

D. $4^2 \times 5^2 = 20^2$

Juste.

Juste : puissance d'un produit, $(4 \times 5)^2$.

Correction

D'après la puissance d'un produit, $4^2 \times 5^2 = (4 \times 5)^2 = 20^2 = 400$. Contrôle : $16 \times 25 = 400$.

À toi : Un calcul de synthèse

Calcule $E = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \times \frac{4}{9} + \left(\sqrt{7} + 3\right)\left(\sqrt{7} - 3\right)$. Donne le résultat sous forme de fraction irréductible. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Applique la méthode : repère une puissance, une fraction et une identité.

Indice 2

On a $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2}$, l'inverse de $\frac{2}{3}$.

Indice 3

Point délicat : $7 - 9$ est négatif, et le résultat final aussi.

Réponse

L'inverse de $\frac{2}{3}$ est $\frac{3}{2}$, donc $\frac{3}{2} \times \frac{4}{9} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$. D'après le produit d'une somme par une différence, $\left(\sqrt{7} + 3\right)\left(\sqrt{7} - 3\right) = 7 - 9 = -2$.

Donc $E = \frac{2}{3} - 2 = \frac{2}{3} - \frac{6}{3} = -\frac{4}{3}$. Cette fraction est irréductible.

Remarque : Coin examen : rédiger un calcul de synthèse

À l'examen, écris une égalité par ligne et nomme chaque règle. Par exemple : « On fait sortir un carré de chaque racine, car $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ pour a et b positifs : »

$$\begin{aligned} \sqrt{75} - \sqrt{27} &= \sqrt{25 \times 3} - \sqrt{9 \times 3} \\ &= 5\sqrt{3} - 3\sqrt{3} \\ &= 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

Termine par un contrôle à la calculatrice : une valeur approchée de $2\sqrt{3}$ à $0{,}01$ près est $3{,}46$.

Ce qu'il faut savoir faire

À retenir : quelle technique pour quelle question

- **Développer** un carré, ou une somme fois une différence : repère a et b, puis applique l'identité.
- **Factoriser** : deux carrés séparés par un moins donnent $(a+b)(a-b)$. Avec trois termes, contrôle le double produit.
- **Calculer de tête** : écris le nombre près d'un nombre rond.
- **Une racine au dénominateur** : multiplie par l'expression conjuguée.
- **Des puissances** : une règle par étape, pour un même nombre.
- **Très grand ou très petit** : écriture scientifique, puis compare les exposants.
- **Un calcul mêlé** : priorités, simplifications, puis contrôle à la calculatrice.

Le mot du prof. Tu sais maintenant calculer 52^2 plus vite qu'une calculatrice. Tu reconnais aussi une identité remarquable dans les deux sens.

Tu sais enfin écrire un très grand ou un très petit nombre et calculer avec des puissances. Ces réflexes te serviront dans tous tes calculs.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Calcul numérique : identités remarquables et puissances » (3ac · general · mathematiques)