BURHAN

Résumé : Géométrie analytique

3ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/3ac/mathematiques/geometrie-analytique/resume

Chapitre	Semestre
Géométrie analytique	Semestre 2

Repère orthonormé et coordonnées d'un point

À retenir : Deux nombres pour situer un point

Dans un repère, deux nombres suffisent pour situer un point du plan. Le premier se lit sur l'axe horizontal, le second sur l'axe vertical. Tout le chapitre calcule avec ces deux nombres : vecteurs, milieux, longueurs et droites.

Définition : Repère orthonormé et coordonnées d'un point

Trois points O, I et J non alignés forment un **repère orthonormé** $(O; I; J)$ du plan lorsque les droites (OI) et (OJ) sont perpendiculaires et que $OI = OJ$. Cette longueur commune est l'**unité**.

- Le point O est l'**origine** du repère.
- La droite (OI) est l'**axe des abscisses** ; la droite (OJ) est l'**axe des ordonnées**.

Dans ce repère, chaque point M du plan est repéré par un couple unique de nombres : ses **coordonnées**. Le premier nombre x est l'**abscisse** de M, le second y est son **ordonnée**. On écrit $M(x; y)$. Inversement, chaque couple de nombres est le couple de coordonnées d'un seul point.

Méthode : placer un point et lire ses coordonnées

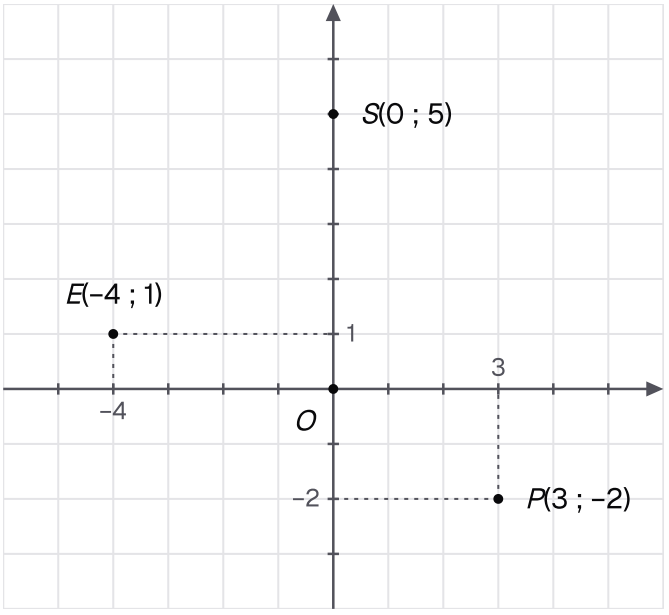
1. **Pars** de l'origine O.
2. **Déplace-toi** horizontalement d'autant d'unités que l'abscisse : à droite quand elle est positive, à gauche quand elle est négative.
3. **Monte** ou **descends** ensuite d'autant d'unités que l'ordonnée.
4. **Pour lire** un point, trace les parallèles aux axes qui passent par lui. Note l'abscisse, puis l'ordonnée, dans cet ordre.

Exemple

Situation. Sur le plan quadrillé d'une ville, l'origine O est la grande place. L'unité est le côté d'un pâté de maisons.

Placer. La pharmacie $P(3;-2)$ se trouve 3 unités à droite de O, puis 2 unités plus bas. L'école $E(-4;1)$ se trouve 4 unités à gauche, puis 1 unité plus haut.

Lire. Le stade S est sur l'axe des ordonnées, 5 unités au-dessus de O. Ses coordonnées sont donc $S(0;5)$.



Sur le plan de la ville, la pharmacie, l'école et le stade se repèrent depuis la grande place O.

Remarque : Points sur les axes, signes des coordonnées

Un point de l'axe des abscisses a une ordonnée nulle, comme $(6;0)$. Un point de l'axe des ordonnées a une abscisse nulle.

Un point d'abscisse négative est à gauche de l'axe des ordonnées. Un point d'ordonnée négative est sous l'axe des abscisses.

Coordonnées d'un vecteur, somme de deux vecteurs

Définition : Coordonnées d'un vecteur

Le plan est muni d'un repère. Soit $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points.

Les **coordonnées du vecteur** $\overrightarrow{AB}$ sont les deux nombres x_B-x_A et y_B-y_A. On écrit :

$$\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A).$$

Le premier nombre est l'**abscisse** du vecteur, le second son **ordonnée**. On les calcule toujours « arrivée moins départ ».

Propriété : Vecteurs égaux et coordonnées

Le plan est muni d'un repère. Soit $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ deux vecteurs.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **égaux** si, et seulement si, ils ont les **mêmes coordonnées** : $x = x'$ et $y = y'$.

Propriété : Coordonnées de la somme de deux vecteurs

Le plan est muni d'un repère. Si $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$, alors le vecteur somme $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées :

$$\vec{u} + \vec{v}\,(x + x';y + y').$$

On additionne les abscisses entre elles et les ordonnées entre elles.

Méthode : calculer avec les coordonnées des vecteurs

1. **Nomme** le départ et l'arrivée.
2. **Soustrais** la coordonnée du départ à celle de l'arrivée : d'abord pour les abscisses, puis pour les ordonnées.
3. **Pour une somme**, ajoute les deux abscisses, puis les deux ordonnées.
4. **Pour une égalité** de deux vecteurs, égale leurs abscisses, puis leurs ordonnées.
5. **Résous** les deux équations obtenues.

Exemple

Énoncé. On donne $P(-2;1)$, $Q(4;-3)$ et le vecteur $\vec{v}(-1;5)$.

Vecteur. D'après la définition des coordonnées d'un vecteur, $\overrightarrow{PQ}(4-(-2);-3-1)$, soit $\overrightarrow{PQ}(6;-4)$.

Somme. D'après la formule de la somme, le vecteur $\overrightarrow{PQ} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(6+(-1);-4+5)$, soit $(5;1)$.

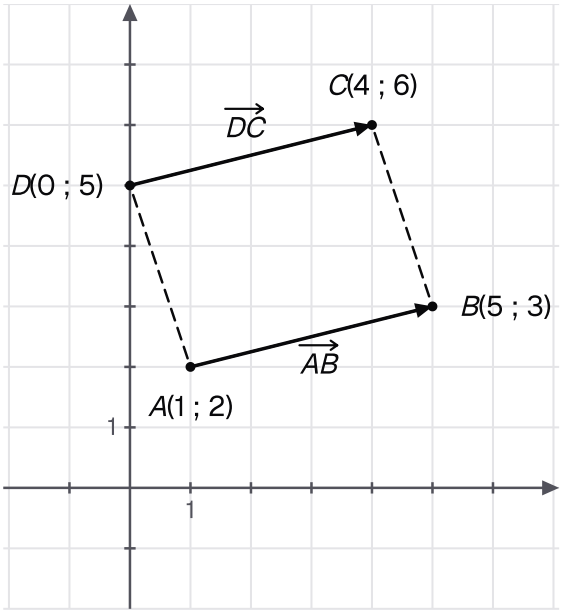
Exemple

Énoncé. On donne $A(1;2)$, $B(5;3)$ et $C(4;6)$. Cherche $D(x;y)$ pour que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Égalité. Il faut $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Or $\overrightarrow{AB}(4;1)$ et $\overrightarrow{DC}(4-x;6-y)$.

Équations. Deux vecteurs égaux ont les mêmes coordonnées : $4 - x = 4$ et $6 - y = 1$. Donc $x = 0$ et $y = 5$.

Contrôle. $4 - 0 = 4$ et $6 - 5 = 1$. Le point cherché est $D(0;5)$.



ABCD est un parallélogramme : la flèche de D vers C reproduit celle de A vers B, d'où D(0 ; 5).

Coordonnées du milieu d'un segment

Propriété : Coordonnées du milieu d'un segment

Le plan est muni d'un repère. Soit $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ deux points. Le milieu M du segment $[AB]$ a pour coordonnées :

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$
$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

L'abscisse du milieu est la moyenne des abscisses ; son ordonnée est la moyenne des ordonnées.

Méthode : calculer ou utiliser un milieu

1. **Ajoute** les deux abscisses et divise par 2. Fais de même avec les ordonnées.
2. **Extrémité inconnue** : écris la formule du milieu avec l'inconnue. Résous ensuite l'équation du premier degré obtenue.
3. **Parallélogramme** : un quadrilatère dont les deux diagonales ont le même milieu est un parallélogramme.

Exemple

Énoncé. Calcule les coordonnées du milieu M de $[AB]$, avec $A(-5 ; 2)$ et $B(3 ; 8)$.

Calcul. D'après la formule du milieu :

$$x_M = \frac{-5+3}{2} = -1$$
$$y_M = \frac{2+8}{2} = 5$$

Conclusion. Le milieu de $[AB]$ est $M(-1;5)$.

Exemple

Énoncé. Le point $M(2;-1)$ est le milieu de $[AB]$, avec $A(-3;4)$. Cherche B.

Abscisse. D'après la formule du milieu, $\frac{-3+x_B}{2} = 2$. Donc $-3+x_B = 4$, et $x_B = 7$.

Ordonnée. De même, $\frac{4+y_B}{2} = -1$. Donc $4+y_B = -2$, et $y_B = -6$.

Contrôle. $\frac{-3+7}{2} = 2$ et $\frac{4+(-6)}{2} = -1$. Le point cherché est $B(7;-6)$.

Distance de deux points

Propriété : Distance de deux points

Le plan est muni d'un repère **orthonormé**. Soit $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points. La distance AB est :

$$AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}.$$

Méthode : calculer une longueur, reconnaître un triangle

1. **Contrôle** que le repère est orthonormé : la formule l'exige.
2. **Élève au carré** chacun des deux écarts de coordonnées.
3. **Ajoute** les deux carrés obtenus.
4. **Extrais** la racine carrée du total ; simplifie-la si tu peux.
5. **Isocèle** : avec deux côtés de même longueur, le triangle est isocèle.
6. **Rectangle** : si le plus grand carré égale la somme des deux autres, le triangle est rectangle. Cite alors la réciproque du théorème de Pythagore.

Exemple

Énoncé. Le repère est orthonormé. Calcule AB, avec $A(-1;3)$ et $B(3;-3)$.

Écarts. $x_B - x_A = 3-(-1) = 4$ et $y_B - y_A = -3-3 = -6$.

Distance. D'après la formule de la distance :

$$AB = \sqrt{4^2+(-6)^2}$$
$$= \sqrt{16+36} = \sqrt{52}$$

Conclusion. Comme $52 = 4 \times 13$, on obtient $AB = 2\sqrt{13}$.

Exemple

Énoncé. Le repère est orthonormé. Quelle est la nature du triangle KLN, avec $K(1;1)$, $L(5;2)$ et $N(0;5)$?

Carrés des longueurs. D'après la formule de la distance :

- $KL^2 = 4^2 + 1^2 = 17$;
- $KN^2 = (-1)^2 + 4^2 = 17$;
- $LN^2 = (-5)^2 + 3^2 = 34$.

Isocèle. On a $KL = KN = \sqrt{17}$: le triangle est isocèle en K.

Rectangle. Le plus grand côté est $[LN]$, et :

$$\begin{aligned} KL^2 + KN^2 &= 17 + 17 \\ &= 34 = LN^2 \end{aligned}$$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle est aussi rectangle en K.

Équation réduite d'une droite

Propriété : Équation réduite d'une droite

Le plan est muni d'un repère. Soit (D) une droite **non parallèle à l'axe des ordonnées**.

Il existe deux nombres a et b, uniques, tels que : un point $M(x;y)$ appartient à (D) si, et seulement si, $y = ax + b$.

- L'égalité $y = ax + b$ est l'**équation réduite** de la droite (D). On écrit (D) : $y = ax + b$.
- Le nombre a est le **coefficient directeur** de (D) ; on dit aussi sa **pente**.
- Le nombre b est l'**ordonnée à l'origine** de (D) : la droite coupe l'axe des ordonnées au point $(0;b)$.

Une droite parallèle à l'axe des ordonnées n'a pas d'équation de cette forme : tous ses points ont la même abscisse c, et on écrit $x = c$.

À retenir : Lire une équation réduite

Dans $y = ax + b$, quand x augmente de 1, y change de a. La droite monte si $a > 0$ et descend si $a < 0$. Si $a = 0$, elle est parallèle à l'axe des abscisses.

Le nombre b est l'ordonnée du point où la droite coupe l'axe des ordonnées.

Méthode : tracer une droite, tester un point

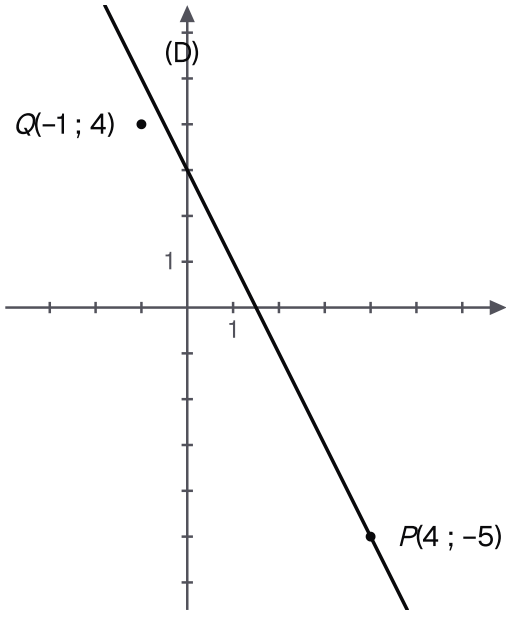
1. **Choisis** deux abscisses simples, par exemple 0 et 2.
2. **Calcule** l'ordonnée de chaque point avec l'équation.
3. **Place** ces deux points et trace la droite. Un troisième point calculé sert de contrôle.
4. **Teste** un point : calcule $ax + b$ avec son abscisse. Si tu trouves son ordonnée, il est sur la droite ; sinon, il n'y est pas.

Exemple

Lecture. Pour $(D) : y = -2x + 3$, le coefficient directeur est -2 et l'ordonnée à l'origine est 3. La droite descend.

Tracé. Pour $x = 0$, on trouve $y = 3$. Pour $x = 2$, on trouve $y = -2 \times 2 + 3 = -1$. On trace la droite qui passe par $(0; 3)$ et $(2; -1)$.

Tests. Pour $P(4; -5)$: $-2 \times 4 + 3 = -5$, donc P est sur (D). Pour $Q(-1; 4)$: $-2 \times (-1) + 3 = 5$ et $5 \neq 4$, donc Q n'est pas sur (D).



Le point P vérifie l'équation de (D) et se trouve sur la droite ; le point Q ne la vérifie pas et reste à côté.

Remarque : Une droite parallèle à l'axe des ordonnées

La droite qui passe par $(2; 0)$ et $(2; 5)$ est verticale : elle est parallèle à l'axe des ordonnées. Chacun de ses points a pour abscisse 2 : son équation est $x = 2$. Elle n'a pas de coefficient directeur.

Déterminer l'équation réduite d'une droite

Propriété : Coefficient directeur à partir de deux points

Le plan est muni d'un repère. Soit $(D) : y = ax + b$ une droite, et $A(x_A ; y_A)$, $B(x_B ; y_B)$ deux points **distincts** de (D). Alors $x_A \neq x_B$ et :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$
$$b = y_A - a\,x_A.$$

Méthode : trouver l'équation réduite

1. **Coefficient directeur** : avec deux points, divise l'écart des ordonnées par l'écart des abscisses, pris dans le même ordre. S'il est donné, garde-le.
2. **Ordonnée à l'origine** : dans $y = ax + b$, remplace x et y par les coordonnées d'un point de la droite. Résous l'équation d'inconnue b.
3. **Contrôle** : vérifie l'équation avec un autre point connu.

Exemple

Énoncé. Détermine l'équation réduite de (AB), avec $A(-2 ; -4)$ et $B(4 ; 5)$.

Coefficient directeur. D'après la formule du coefficient directeur :

$$a = \frac{5 - (-4)}{4 - (-2)} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

Ordonnée à l'origine. On utilise le point A :

$$\begin{aligned} b &= y_A - a\,x_A \\ &= -4 - \frac{3}{2} \times (-2) \\ &= -4 + 3 = -1 \end{aligned}$$

Contrôle. $\frac{3}{2} \times 4 - 1 = 5$: c'est bien l'ordonnée de B. Donc $(AB) : y = \frac{3}{2}x - 1$.

Exemple

Énoncé. La droite (D) passe par $C(2 ; 1)$ et a pour coefficient directeur -3.

Équation. On cherche b tel que $1 = -3 \times 2 + b$, soit $1 = -6 + b$. Donc $b = 7$.

Contrôle. $-3 \times 2 + 7 = 1$. Donc $(D) : y = -3x + 7$.

Exemple

Énoncé. Les points $R(1;2)$, $S(3;6)$ et $T(5;9)$ sont-ils alignés ?

La droite (RS). $a = \dfrac{6-2}{3-1} = 2$ et $b = 2 - 2 \times 1 = 0$. Donc $(RS) : y = 2x$.

Test. $2 \times 5 = 10$ et $10 \neq 9$: le point T n'est pas sur (RS). Les trois points ne sont pas alignés.

Droites parallèles, droites perpendiculaires

Propriété : Droites parallèles et coefficients directeurs

Le plan est muni d'un repère. Soit $(D) : y = ax + b$ et $(D') : y = a'x + b'$ deux droites.

Les droites (D) et (D') sont **parallèles** si, et seulement si, elles ont le **même coefficient directeur** : $a = a'$.

Si, de plus, $b = b'$, les deux droites sont confondues.

Propriété : Droites perpendiculaires et coefficients directeurs

Le plan est muni d'un repère **orthonormé**. Soit $(D) : y = ax + b$ et $(D') : y = a'x + b'$ deux droites.

Les droites (D) et (D') sont **perpendiculaires** si, et seulement si, le produit de leurs coefficients directeurs vaut -1 : $a \times a' = -1$.

Méthode : parallèle ou perpendiculaire passant par un point

1. **Lis** le coefficient directeur a de la droite connue.
2. **Parallèle** : la nouvelle droite garde le même coefficient a.
3. **Perpendiculaire** : dans un repère orthonormé, cherche le nombre a' tel que $a \times a' = -1$.
4. **Termine** par l'ordonnée à l'origine, calculée avec le point donné. Contrôle ensuite avec ce point.

Exemple

Énoncé. Dans un repère orthonormé, on donne $(D) : y = 4x - 1$, $(D') : y = 4x + 6$ et $(D'') : y = -\dfrac{1}{4}x + 2$.

Parallèles. (D) et (D') ont le même coefficient directeur 4 : elles sont parallèles. Leurs ordonnées à l'origine diffèrent, donc elles ne sont pas confondues.

Perpendiculaires. $4 \times \left(-\dfrac{1}{4}\right) = -1$: les droites (D) et (D'') sont perpendiculaires.

Exemple

Énoncé. Le repère est orthonormé. Cherche la droite (D') perpendiculaire à $(D) : y = \frac{2}{3}x + 1$ et passant par $P(2; -1)$.

Coefficient. Il faut $\frac{2}{3} \times a' = -1$, donc $a' = -\frac{3}{2}$.

Ordonnée à l'origine. $-1 = -\frac{3}{2} \times 2 + b$, soit $-1 = -3 + b$. Donc $b = 2$.

Conclusion. La droite cherchée est :

$$(D') : y = -\frac{3}{2}x + 2$$

Contrôle avec P : $-\frac{3}{2} \times 2 + 2 = -1$.

Quelle formule pour quelle question ? Erreurs à éviter

Méthode : Quelle formule pour quelle question ?

- **Placer ou lire** un point : l'abscisse d'abord, l'ordonnée ensuite.
- **Aller d'un point à un autre**, translation, parallélogramme : les coordonnées d'un vecteur, arrivée moins départ.
- **Enchaîner deux déplacements** : la somme de deux vecteurs.
- **Centre d'un segment**, extrémité manquante, diagonales : la formule du milieu.
- **Longueur**, triangle isocèle ou rectangle : la formule de la distance, en repère orthonormé.
- **Droite** par deux points, ou par un point avec une pente : le coefficient directeur, puis l'ordonnée à l'origine.
- **Point sur une droite**, trois points alignés : remplacer x dans l'équation réduite.
- **Droites parallèles** : le même coefficient directeur. **Droites perpendiculaires** : un produit des coefficients égal à -1.

Coordonnées d'un vecteur

$$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$$

Somme de deux vecteurs

$$\vec{u} + \vec{v}\ (x + x'; y + y')$$

Abscisse du milieu M de [AB]

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

Ordonnée du milieu M de [AB]

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Distance, repère orthonormé

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Coefficient directeur de (AB)

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Ordonnée à l'origine

$$b = y_A - a\,x_A$$

Droites parallèles

$$a = a'$$

Droites perpendiculaires, repère orthonormé

$$a \times a' = -1$$

Attention : Un vecteur se calcule « arrivée moins départ »

Avec $C(2;-1)$ et $D(-3;4)$, on trouve $\overrightarrow{CD}(-3-2;4-(-1))$, soit $\overrightarrow{CD}(-5;5)$. Le calcul à l'envers donne $(5;-5)$. Ce sont les coordonnées de $\overrightarrow{DC}$, le vecteur de sens contraire.

Attention : Le milieu demande une somme

Avec $E(-6;3)$ et $F(2;7)$, l'abscisse du milieu vaut $\dfrac{-6+2}{2} = -2$. Le calcul $\dfrac{2-(-6)}{2} = 4$ est faux. Il donne la moitié de l'écart horizontal, pas une position.

Attention : Une racine carrée ne se coupe pas en deux

Avec $G(-2;4)$ et $H(3;-8)$, les écarts valent 5 et -12. Donc $GH = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$. Écrire $\sqrt{25}+\sqrt{144} = 17$ est faux.

Écrire $(-12)^2 = -144$ est faux aussi : un carré n'est jamais négatif.

Attention : Le même ordre en haut et en bas

Avec $P(2;1)$ et $Q(5;7)$, le coefficient directeur vaut $\dfrac{7-1}{5-2} = 2$. Mettre les abscisses en haut donne $\dfrac{5-2}{7-1} = \dfrac{1}{2}$: c'est faux. Changer l'ordre en bas seulement donne $\dfrac{7-1}{2-5} = -2$: c'est faux aussi.

Attention : Perpendiculaire : ni l'opposé, ni l'inverse

Pour une droite perpendiculaire à $(D) : y = -5x + 2$, il faut $-5 \times a' = -1$, donc $a' = \dfrac{1}{5}$. L'opposé 5 ne convient pas : $-5 \times 5 = -25$. L'inverse $-\dfrac{1}{5}$ non plus : $-5 \times \left(-\dfrac{1}{5}\right) = 1$.

À retenir : Rédiger en devoir

Nomme la formule employée à chaque calcul : « d'après la formule du milieu… ». Précise que le repère est orthonormé avant une distance ou une perpendicularité. Vérifie chaque équation avec un point connu, puis conclus par une phrase.