BURHAN

Géométrie analytique : exercices, niveau examen

3ème Année Collège · Mathématiques

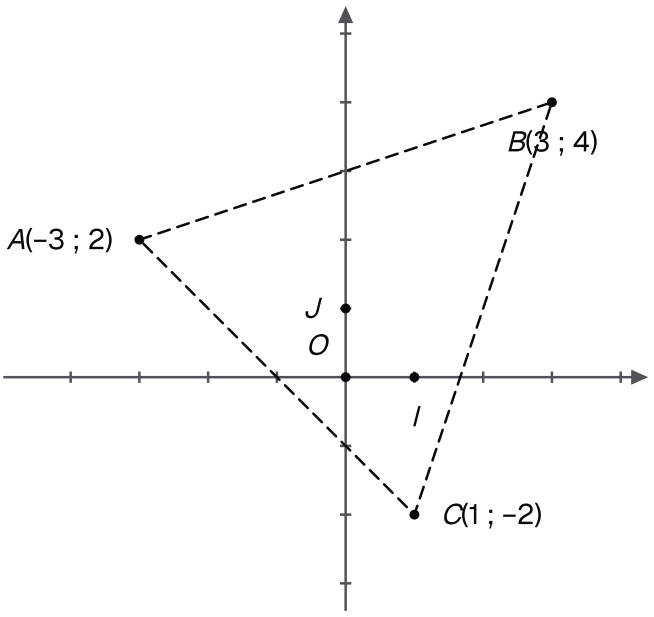
Version en ligne : burhan.ma/3ac/mathematiques/geometrie-analytique/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Géométrie analytique	Niveau examen	5

Exercice 1 5 pts

Trois fontaines et un massif de fleurs

Le plan d'un jardin public est muni d'un repère orthonormé $(O; I; J)$. Trois fontaines sont placées aux points $A(-3; 2)$, $B(3; 4)$ et $C(1; -2)$.



Les trois fontaines du jardin public, placées dans le repère (O ; I ; J).

1. 1 pts

Placer les points A, B et C. Calculer les longueurs AB, BC et AC, sous forme simplifiée.

INDICE

Outil : la formule de la distance, valable dans un repère orthonormé.

Point délicat : cherche un carré parfait dans le nombre sous la racine.

CORRIGÉ

On place d'abord les trois points dans le repère. Comme ce repère est orthonormé, on peut utiliser la formule de la distance.

Longueur AB. De $A(-3;2)$ à $B(3;4)$, les écarts valent 6 et 2 :

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{6^2+2^2} \\ &= \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \end{aligned}$$

On a utilisé $40 = 4 \times 10$.

Longueur BC. De $B(3;4)$ à $C(1;-2)$, les écarts valent -2 et -6 :

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{(-2)^2+(-6)^2} \\ &= \sqrt{4+36} \\ &= \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \end{aligned}$$

Longueur AC. De $A(-3;2)$ à $C(1;-2)$, les écarts valent 4 et -4 :

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{4^2+(-4)^2} \\ &= \sqrt{16+16} \\ &= \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

On a utilisé $32 = 16 \times 2$.

Conclusion. Les longueurs sont $AB = 2\sqrt{10}$, $BC = 2\sqrt{10}$ et $AC = 4\sqrt{2}$.

2. 0,5 pts

En déduire la nature du triangle ABC.

INDICE

Outil : compare les trois longueurs de la question 1.

CORRIGÉ

D'après la question 1, $AB = BC = 2\sqrt{10}$, tandis que $AC = 4\sqrt{2}$ est une longueur différente.

Les deux côtés de même longueur, $[BA]$ et $[BC]$, partent du même sommet B.

Conclusion. Le triangle ABC est isocèle en B.

3. 1 pts

Soit K le milieu de $[AC]$. Calculer ses coordonnées. Calculer ensuite les coordonnées du point D tel que K soit aussi le milieu de $[BD]$.

INDICE

Outil : la formule du milieu.

Ensuite : pour D, écris la formule du milieu de $[BD]$ avec x_D et y_D inconnus.

CORRIGÉ

Milieu K. D'après la formule du milieu, avec $A(-3;2)$ et $C(1;-2)$:

$$x_K = \frac{-3+1}{2} = -1$$
$$y_K = \frac{2+(-2)}{2} = 0$$

Donc $K(-1;0)$.

Point D. On note $D(x_D;y_D)$. Le point K est aussi le milieu de $[BD]$, avec $B(3;4)$. D'après la formule du milieu :

$$\frac{3+x_D}{2} = -1$$
$$\frac{4+y_D}{2} = 0$$

On multiplie chaque égalité par 2 : $3+x_D=-2$ et $4+y_D=0$. On retranche ensuite 3 dans la première et 4 dans la seconde : $x_D=-5$ et $y_D=-4$.

Contrôle. $\frac{3+(-5)}{2} = -1$ et $\frac{4+(-4)}{2} = 0$: on retrouve les coordonnées de K.

Conclusion. Le milieu de $[AC]$ est $K(-1;0)$, et le point cherché est $D(-5;-4)$.

4. 1,5 pts

Déterminer les équations réduites des droites (AC) et (BK). Les droites (AC) et (BK) sont-elles perpendiculaires ?

INDICE

Début : pour chaque droite, calcule le coefficient directeur avec deux de ses points.

Ensuite : calcule le produit des deux coefficients directeurs.

CORRIGÉ

Droite (AC). D'après la formule du coefficient directeur :

$$\begin{aligned} a &= \frac{-2-2}{1-(-3)} \\ &= \frac{-4}{4} = -1 \end{aligned}$$

Avec A : $2 = -1 \times (-3) + b$, donc $b = -1$. Ainsi (AC) : $y = -x - 1$. Contrôle avec C : $-1 - 1 = -2$.

Droite (BK). De même, avec $B(3;4)$ et $K(-1;0)$:

$$\begin{aligned} a' &= \frac{0-4}{-1-3} \\ &= \frac{-4}{-4} = 1 \end{aligned}$$

Avec K : $0 = 1 \times (-1) + b'$, donc $b' = 1$. Ainsi (BK) : $y = x + 1$. Contrôle avec B : $3 + 1 = 4$.

Perpendicularité. Le produit des coefficients directeurs vaut $-1 \times 1 = -1$, et le repère est orthonormé. D'après la propriété des droites perpendiculaires, (AC) et (BK) sont perpendiculaires.

Conclusion. Les équations réduites sont (AC) : $y = -x - 1$ et (BK) : $y = x + 1$, et ces deux droites sont perpendiculaires.

5. 1 pts

On veut planter un massif de fleurs ayant la forme du quadrilatère $ABCD$. Quelle est la nature de ce quadrilatère ? Justifier.

INDICE

Outil : un quadrilatère dont les diagonales ont le même milieu est un parallélogramme.

Point délicat : utilise aussi la question 2.

CORRIGÉ

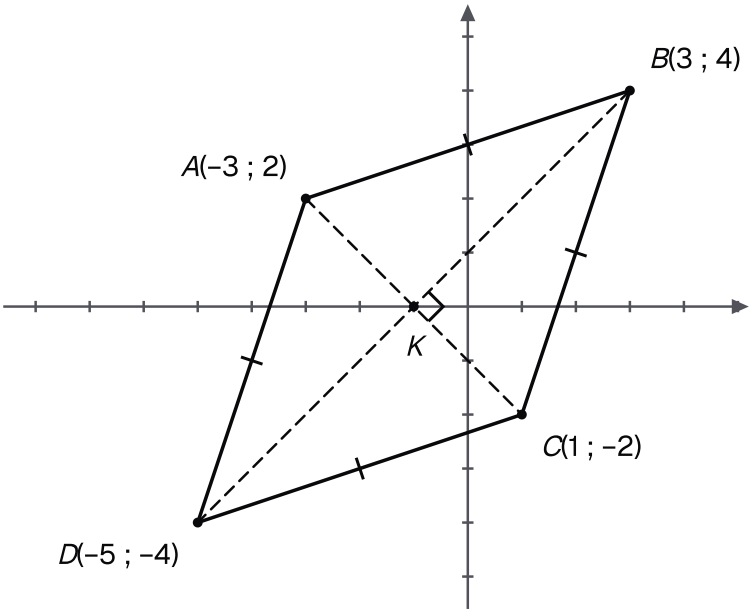
Parallélogramme. Les diagonales de $ABCD$ sont $[AC]$ et $[BD]$. D'après la question 3, elles ont le même milieu K. Un quadrilatère dont les diagonales ont le même milieu est un parallélogramme : $ABCD$ en est un.

Losange. D'après la question 2, les côtés $[AB]$ et $[BC]$ ont la même longueur. Ce sont des côtés consécutifs : ils se suivent et partent du même sommet B.

Rappel : un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs de même longueur est un losange.

Contrôle. Le point D est sur (BK), car $-5+1=-4$. La diagonale (BD) est donc la droite (BK), perpendiculaire à (AC) d'après la question 4. Les diagonales sont perpendiculaires, comme dans tout losange.

Conclusion. Le quadrilatère $ABCD$ est un losange : le massif de fleurs a la forme d'un losange.

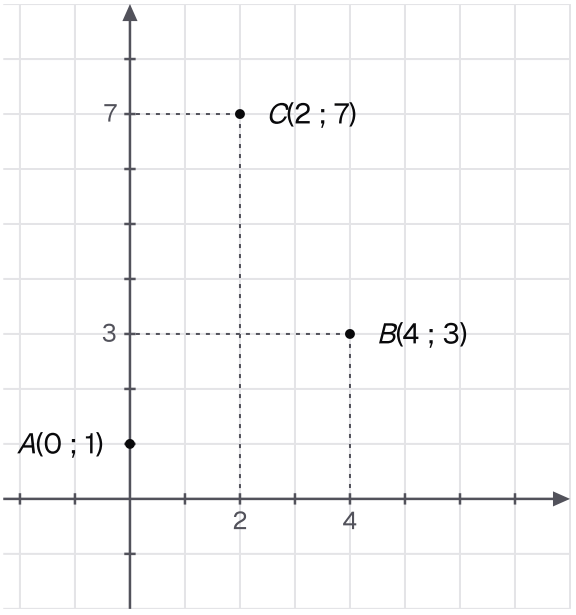


Le massif ABCD : ses diagonales se coupent en leur milieu K et sont perpendiculaires, ses quatre côtés ont la même longueur.

Exercice 2 — 5 pts

Une ferme près d'une route

On représente une région sur une carte, dans un repère orthonormé dont l'unité vaut un kilomètre. Une route rectiligne passe par les villages $A(0;1)$ et $B(4;3)$. Une ferme est située au point $C(2;7)$.



Sur la carte, les deux villages A et B traversés par la route, et la ferme C.

1. — 1 pts

Placer les points A, B et C. Déterminer l'équation réduite de la droite (AB).

INDICE

Outil : la formule du coefficient directeur à partir de deux points.

Point délicat : l'abscisse de A est nulle ; que vaut alors l'ordonnée à l'origine ?

CORRIGÉ

On place d'abord les trois points dans le repère.

Coefficient directeur. Les abscisses de A et de B sont différentes. D'après la formule du coefficient directeur :

$$\begin{aligned} a &= \frac{3-1}{4-0} \\ &= \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ordonnée à l'origine. C'est l'ordonnée du point de la droite d'abscisse 0. Ce point est $A(0;1)$, sur l'axe des ordonnées, donc $b = 1$.

Contrôle. Avec B : $\frac{1}{2} \times 4 + 1 = 3$. C'est l'ordonnée de B.

Conclusion. La route suit la droite (AB) : $y = \frac{1}{2}x + 1$.

2. 0,5 pts

Le village $E(6;4)$ est-il sur la route ? Tracer la droite (AB).

INDICE

Outil : remplace x par l'abscisse de E dans l'équation de (AB).

CORRIGÉ

Test. On remplace x par l'abscisse 6 de E dans l'équation de (AB) :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\times 6+1&=3+1\\&=4\end{aligned}$$

On trouve l'ordonnée de E : le village E est sur la route.

Tracé. On place deux points de la droite, par exemple A et B, puis on trace la droite qui passe par eux.

Contrôle. Le point E doit se trouver sur le tracé, car ses coordonnées vérifient l'équation de (AB).

Conclusion. Le village E est sur la route, et la droite (AB) est tracée.

3. 1 pts

Déterminer l'équation réduite de la droite (Δ) perpendiculaire à (AB) et passant par la ferme C.

INDICE

Outil : dans un repère orthonormé, le produit des coefficients de deux droites perpendiculaires vaut -1.

Ensuite : trouve l'ordonnée à l'origine avec C.

CORRIGÉ

Coefficient directeur. On note a' le coefficient directeur de (Δ). Le repère est orthonormé ; d'après la propriété des droites perpendiculaires, $\frac{1}{2}\times a'=-1$, donc $a'=-2$. On a multiplié les deux membres par 2.

Ordonnée à l'origine. La ferme $C(2;7)$ est sur (Δ) :

$$\begin{aligned}7&=-2\times 2+b\\7&=-4+b\\b&=11\end{aligned}$$

Contrôle. Avec l'abscisse de C : $-2\times 2+11=-4+11=7$.

Conclusion. La droite cherchée est (Δ) : $y=-2x+11$.

4. 1 pts

Vérifier que le village B est sur la droite (Δ). En déduire la nature du triangle ABC.

INDICE

Début : remplace x par 4 dans l'équation de (Δ).

Ensuite : la droite (Δ) est alors la droite (BC).

CORRIGÉ

Appartenance. Pour $x = 4$: $-2 \times 4 + 11 = 3$. On trouve l'ordonnée de B : le point B est sur (Δ).

Nature. Les points B et C sont tous deux sur (Δ), donc (Δ) est la droite (BC). Or (Δ) est perpendiculaire à (AB) : les côtés $[BA]$ et $[BC]$ forment un angle droit.

Conclusion. Le village B est sur (Δ), et le triangle ABC est rectangle en B.

5. 1 pts

Le fermier veut construire le chemin le plus court possible entre la ferme et la route. En quel point ce chemin rejoint-il la route ? Calculer sa longueur.

INDICE

Outil : la distance d'un point à une droite se mesure sur la perpendiculaire menée de ce point à la droite.

Ensuite : utilise la question 4.

CORRIGÉ

Rappel : la distance d'un point à une droite se mesure sur la perpendiculaire menée de ce point à la droite. C'est le plus court chemin.

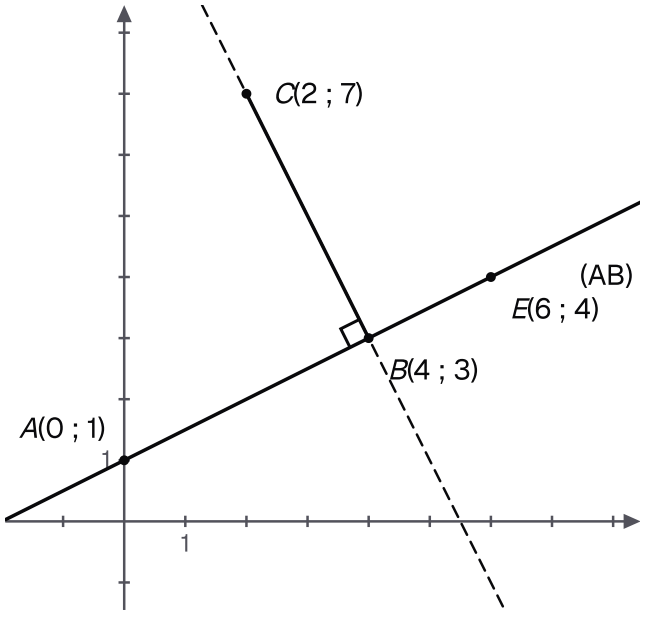
Point d'arrivée. Le plus court chemin de C à la route suit donc la perpendiculaire à (AB) passant par C, c'est-à-dire (Δ). D'après la question 4, cette droite rejoint la route au point B.

Longueur. La formule de la distance s'applique, car le repère est orthonormé :

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{(2-4)^2 + (7-3)^2} \\ &= \sqrt{4 + 16} \\ &= \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

On a utilisé $20 = 4 \times 5$.

Conclusion. Le chemin rejoint la route au village B. Il mesure $2\sqrt{5}$ km, soit environ $4{,}47$ km.



Le plus court chemin de la ferme C à la route suit la perpendiculaire à (AB) et rejoint la route en B.

6. `0,5 pts`

Calculer l'aire du triangle ABC.

INDICE

Début : calcule AB.

Outil : dans un triangle rectangle, l'aire est la moitié du produit des côtés de l'angle droit.

CORRIGÉ

Longueur AB. De $A(0;1)$ à $B(4;3)$, les écarts valent 4 et 2. D'après la formule de la distance :

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{4^2+2^2} \\ &= \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

Aire. Le triangle est rectangle en B : les côtés de l'angle droit sont $[AB]$ et $[BC]$. L'aire est la moitié de leur produit :

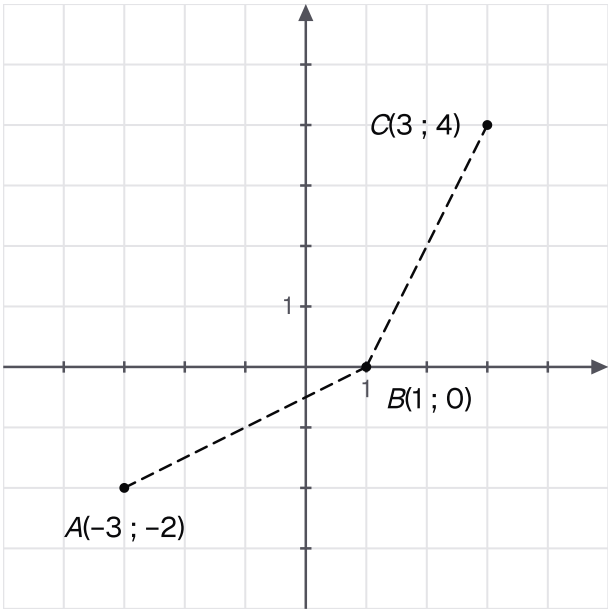
$$\begin{aligned} \frac{AB \times BC}{2} &= \frac{2\sqrt{5} \times 2\sqrt{5}}{2} \\ &= \frac{20}{2} = 10 \end{aligned}$$

Conclusion. L'aire du triangle ABC est de 10 kilomètres carrés.

Exercice 3 5 pts

Un personnage de jeu vidéo

L'écran d'un jeu vidéo est muni d'un repère orthonormé. Un personnage se déplace entre les points $A(-3;-2)$, $B(1;0)$ et $C(3;4)$.



Les trois positions A, B et C du personnage sur l'écran du jeu.

1. 1 pts

Placer les trois points. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$. Comparer avec les coordonnées de $\overrightarrow{AC}$.

INDICE

Outil : arrivée moins départ, puis la formule de la somme.

Ensuite : pense à la relation de Chasles.

CORRIGÉ

On place d'abord les trois points dans le repère.

Vecteurs. D'après la définition des coordonnées d'un vecteur, $\overrightarrow{AB}(1-(-3);0-(-2))$, soit $\overrightarrow{AB}(4;2)$. De même, $\overrightarrow{BC}(3-1;4-0)$, soit $\overrightarrow{BC}(2;4)$.

Somme. D'après la formule de la somme, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ a pour coordonnées $(4+2;2+4)$, soit $(6;6)$.

Vecteur $\overrightarrow{AC}$. $\overrightarrow{AC}(3-(-3);4-(-2))$, soit $\overrightarrow{AC}(6;6)$.

Conclusion. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont les mêmes coordonnées $(6;6)$. On retrouve la relation de Chasles : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

2. 1 pts

Le personnage, placé en C, subit la translation qui transforme A en B. Il arrive au point D. Calculer les coordonnées de D, puis donner la nature du quadrilatère $ABDC$.

INDICE

Outil : l'image de C par la translation qui transforme A en B est le point D tel que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$.

Début : écris les coordonnées de $\overrightarrow{CD}$ avec celles de D.

CORRIGÉ

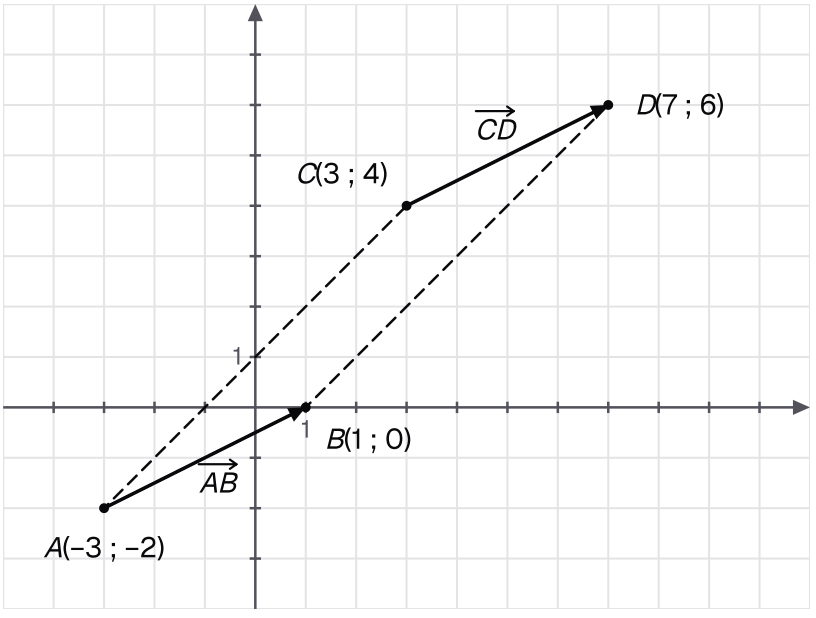
Coordonnées de D. L'image de C par la translation qui transforme A en B est le point D tel que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$. On note $D(x_D ; y_D)$; alors $\overrightarrow{CD}(x_D - 3 ; y_D - 4)$.

Deux vecteurs égaux ont les mêmes coordonnées : $x_D - 3 = 4$ et $y_D - 4 = 2$. On ajoute 3 dans la première égalité et 4 dans la seconde : $x_D = 7$ et $y_D = 6$, donc $D(7 ; 6)$.

Points non alignés. Si A, B et C étaient alignés, les droites (AB) et (AC) seraient confondues et auraient le même coefficient directeur. Or ces coefficients valent $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ et $\frac{6}{6} = 1$. Ils sont différents : les points A, B et C ne sont pas alignés.

Nature. Rappel du chapitre sur la translation : $ABDC$ est un parallélogramme si, et seulement si, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Cette égalité est vraie, et le parallélogramme n'est pas aplati puisque A, B et C ne sont pas alignés. Donc $ABDC$ est un parallélogramme.

Conclusion. Le personnage arrive au point $D(7 ; 6)$, et le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme.



L'image de C par la translation qui transforme A en B est D(7 ; 6) ; ABDC est un parallélogramme.

3. `0,5 pts`

Déterminer l'équation réduite de la droite (AB), puis tracer cette droite.

INDICE

Outil : la formule du coefficient directeur.

Ensuite : pour le tracé, choisis deux abscisses qui donnent des ordonnées simples.

CORRIGÉ

Coefficient directeur. D'après la formule du coefficient directeur :

$$\begin{aligned} a &= \frac{0-(-2)}{1-(-3)} \\ &= \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ordonnée à l'origine. Avec $B(1;0)$: $0 = \frac{1}{2} \times 1 + b$, donc $b = -\frac{1}{2}$.

Équation. On obtient (AB) : $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$. Contrôle avec A, d'abscisse -3 : $-\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = -2$, l'ordonnée de A.

Tracé. Pour $x = 3$, on trouve $y = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$. On trace la droite qui passe par $B(1;0)$ et par le point $(3;1)$. Le point A sert de contrôle sur le tracé.

Conclusion. La droite (AB) a pour équation réduite $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$; on la trace à l'aide de deux de ses points.

4. 1,5 pts

En déduire l'équation réduite de la droite (CD), sans utiliser la formule du coefficient directeur. Vérifier que D est sur cette droite.

INDICE

Début : dans le parallélogramme $ABDC$, les côtés $[AB]$ et $[CD]$ sont parallèles.

Ensuite : utilise le point C pour trouver l'ordonnée à l'origine.

CORRIGÉ

Coefficient directeur. D'après la question 2, $ABDC$ est un parallélogramme : ses côtés opposés $[AB]$ et $[CD]$ sont parallèles. D'après la propriété des droites parallèles, (CD) a le même coefficient directeur que (AB), soit $\frac{1}{2}$ d'après la question 3.

Ordonnée à l'origine. Le point $C(3;4)$ est sur (CD) : $4 = \frac{1}{2} \times 3 + b$. On retranche $\frac{3}{2}$ aux deux membres :

$$b = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

Donc (CD) : $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.

Vérification. On remplace x par l'abscisse 7 de D :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times 7 + \frac{5}{2} &= \frac{7}{2} + \frac{5}{2} \\ &= 6 \end{aligned}$$

On trouve l'ordonnée de D.

Conclusion. L'équation réduite de (CD) est $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$, et le point D est bien sur cette droite.

5. 1 pts

Le concepteur du jeu affirme que $ABDC$ est un rectangle. A-t-il raison ? Choisir une méthode et justifier, sans calculer les longueurs des quatre côtés.

INDICE

Début : rappelle-toi à quelle condition un parallélogramme est un rectangle.

Ensuite : choisis un calcul qui réutilise un résultat déjà obtenu.

CORRIGÉ

Méthode. Rappel : un parallélogramme est un rectangle si, et seulement si, il a un angle droit. On teste l'angle en A, formé par les côtés $[AB]$ et $[AC]$. La question 3 donne déjà le coefficient directeur de (AB) : $\frac{1}{2}$.

Coefficient directeur de (AC). D'après la formule du coefficient directeur, il vaut :

$$\frac{4-(-2)}{3-(-3)} = \frac{6}{6} = 1$$

Produit. $\frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2} \neq -1$. Le repère est orthonormé : d'après la propriété des droites perpendiculaires, (AB) et (AC) ne sont pas perpendiculaires.

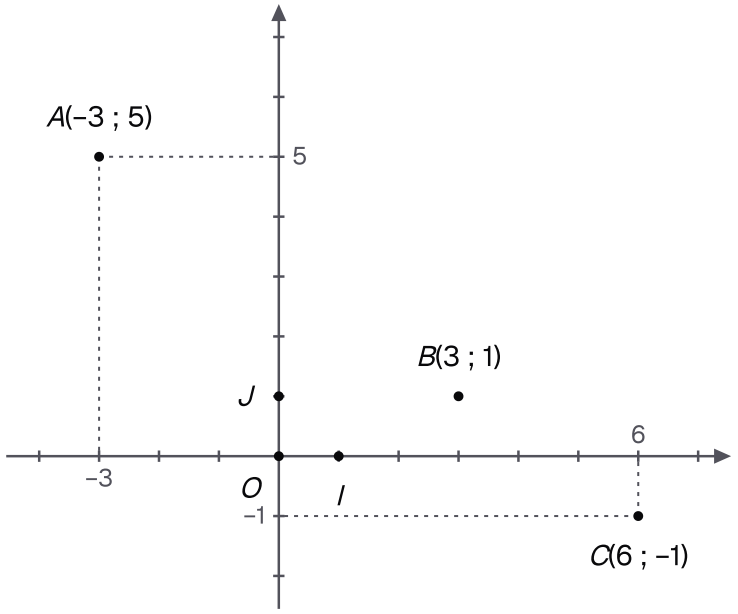
Autre méthode. Un parallélogramme est un rectangle si, et seulement si, ses diagonales ont la même longueur. Les diagonales de $ABDC$ sont $[AD]$ et $[BC]$. On compare leurs carrés : $AD^2 = 10^2 + 8^2 = 164$ et $BC^2 = 2^2 + 4^2 = 20$. Elles n'ont pas la même longueur, ce qui mène au même résultat.

Conclusion. L'angle en A du parallélogramme $ABDC$ n'est pas droit, donc $ABDC$ n'est pas un rectangle : le concepteur a tort.

Exercice 4 5 pts

Les stations d'une ligne de tramway

Le plan d'une ville est muni d'un repère orthonormé $(O; I; J)$ dont l'unité vaut un kilomètre. Une ligne de tramway rectiligne part de la station $A(-3; 5)$ et passe par la station $B(3; 1)$. On projette une troisième station au point $C(6; -1)$.



Les stations A et B de la ligne de tramway, et la station projetée C.

1. 1 pts

Placer les points A, B et C. Déterminer l'équation réduite de la droite (AB), que suit la ligne.

INDICE

Outil : la formule du coefficient directeur à partir de deux points.

Point délicat : simplifie la fraction obtenue, sans perdre son signe.

CORRIGÉ

On place d'abord les trois points dans le repère.

Coefficient directeur. D'après la formule du coefficient directeur, avec $A(-3;5)$ et $B(3;1)$:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1-5}{3-(-3)} \\ &= \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Ordonnée à l'origine. Le point B est sur la droite. On calcule le produit, puis on ajoute 2 aux deux membres :

$$\begin{aligned} 1 &= -\frac{2}{3} \times 3 + b \\ 1 &= -2 + b \\ b &= 3 \end{aligned}$$

Contrôle. Avec l'abscisse de A :

$$\begin{aligned} -\frac{2}{3} \times (-3) + 3 &= 2 + 3 \\ &= 5 \end{aligned}$$

On retrouve l'ordonnée de A.

Conclusion. La ligne de tramway suit la droite (AB) : $y = -\frac{2}{3}x + 3$.

2. `0,5 pts`

En déduire si la station C est sur la ligne, c'est-à-dire si les points A, B et C sont alignés. Tracer la droite (AB).

INDICE

Outil : remplace x par l'abscisse de C dans l'équation de la question 1.

Ensuite : pour le tracé, cherche le point de la droite d'abscisse 0.

CORRIGÉ

Test. On remplace x par l'abscisse 6 de C dans l'équation de la question 1 :

$$\begin{aligned} -\frac{2}{3} \times 6 + 3 &= -4 + 3 \\ &= -1 \end{aligned}$$

On trouve l'ordonnée de C : le point C est sur (AB). Les points A, B et C sont donc alignés.

Tracé. Pour $x = 0$, on trouve $y = 3$. On trace la droite qui passe par le point $(0 ; 3)$ et par $B(3 ; 1)$. Les points A et C servent de contrôle sur le tracé.

Conclusion. La station C est sur la ligne : les points A, B et C sont alignés.

3. 1 pts

Calculer les longueurs AB, BC et AC, sous forme simplifiée.

INDICE

Outil : la formule de la distance, valable dans un repère orthonormé.

Point délicat : cherche un carré parfait dans le nombre sous la racine.

CORRIGÉ

Le repère est orthonormé : on applique la formule de la distance, puis on cherche un carré parfait sous la racine.

Longueur AB. De $A(-3;5)$ à $B(3;1)$, les écarts valent 6 et -4 :

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{6^2 + (-4)^2} \\ &= \sqrt{36 + 16} \\ &= \sqrt{52} \end{aligned}$$

Or $52 = 4 \times 13$, donc $AB = 2\sqrt{13}$.

Longueur BC. De $B(3;1)$ à $C(6;-1)$, les écarts valent 3 et -2 :

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{3^2 + (-2)^2} \\ &= \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13} \end{aligned}$$

Longueur AC. De $A(-3;5)$ à $C(6;-1)$, les écarts valent 9 et -6 :

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{9^2 + (-6)^2} \\ &= \sqrt{81 + 36} \\ &= \sqrt{117} \end{aligned}$$

Or $117 = 9 \times 13$, donc $AC = 3\sqrt{13}$.

Contrôle. $AB + BC = 2\sqrt{13} + \sqrt{13} = 3\sqrt{13}$: c'est la longueur AC. Le résultat est cohérent avec la position de B entre A et C sur la ligne.

Conclusion. Les longueurs sont $AB = 2\sqrt{13}$, $BC = \sqrt{13}$ et $AC = 3\sqrt{13}$, en kilomètres.

4. 1,5 pts

La ligne croise une avenue rectiligne qui suit l'axe des abscisses. Calculer les coordonnées du point de croisement P, puis la longueur BP sous forme simplifiée.

INDICE

Début : quelle est l'ordonnée de P, situé sur l'axe des abscisses ?

Ensuite : écris l'équation obtenue avec l'équation de (AB).

Point délicat : pour BP, pense à la racine carrée d'un quotient.

CORRIGÉ

Ordonnée de P. Le point P est sur l'axe des abscisses, donc $y_P = 0$. Il est aussi sur (AB) : ses coordonnées vérifient l'équation de la question 1, ce qui donne $-\dfrac{2}{3}x_P + 3 = 0$.

Abscisse de P. On retranche 3 aux deux membres, puis on les multiplie par $-\dfrac{3}{2}$, l'inverse de $-\dfrac{2}{3}$:

$$\begin{aligned} -\frac{2}{3}x_P &= -3 \\ x_P &= -3 \times \left(-\frac{3}{2}\right) \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

Vérification :

$$\begin{aligned} -\frac{2}{3} \times \frac{9}{2} + 3 &= -3 + 3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $P(4{,}5\,;0)$.

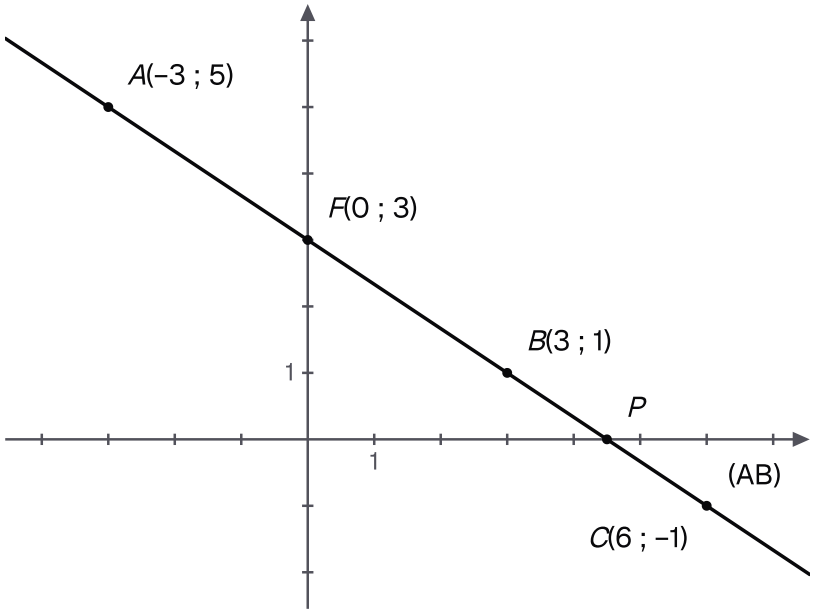
Longueur BP. Les écarts de coordonnées de B à P valent $x_P - x_B = \dfrac{9}{2} - 3 = \dfrac{3}{2}$ et $y_P - y_B = 0 - 1 = -1$. La formule de la distance s'applique, car le repère est orthonormé :

$$\begin{aligned} BP &= \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + (-1)^2} \\ &= \sqrt{\frac{9}{4} + 1} \\ &= \sqrt{\frac{13}{4}} \end{aligned}$$

La racine carrée d'un quotient est le quotient des racines carrées :

$$BP = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

Conclusion. Le point de croisement est $P(4{,}5\,;0)$, et la longueur BP vaut $\dfrac{\sqrt{13}}{2}$ km.



La ligne (AB) passe par les trois stations et croise l'avenue de l'axe des abscisses au point P.

5. 1 pts

La société de tramway veut ajouter une seule nouvelle station F sur la ligne, pour que les quatre stations soient régulièrement espacées : deux stations voisines sont toujours à la même distance. Où placer F ? Justifier.

INDICE

Début : compare les longueurs AB et BC de la question 3.

Ensuite : cherche entre quelles stations la nouvelle doit se placer.

CORRIGÉ

Choix du segment. D'après la question 3, $AB = 2\sqrt{13}$ et $BC = \sqrt{13}$: le trajet de A à B est le double de celui de B à C. On examine les places possibles pour F :

- Si F était placée hors de $[AC]$, les trajets AB et BC, de longueurs différentes, resteraient entre stations voisines.
- Si elle était entre B et C, le trajet AB resterait plus long que les deux autres.

La station F doit donc partager $[AB]$ en deux trajets de longueur $\sqrt{13}$: F est le milieu de $[AB]$.

Coordonnées. D'après la formule du milieu :

$$x_F = \frac{-3+3}{2} = 0$$
$$y_F = \frac{5+1}{2} = 3$$

Donc $F(0;3)$.

Contrôle. De A à F, puis de F à B, les écarts valent 3 et -2 :

$$AF = \sqrt{3^2+(-2)^2} = \sqrt{13}$$
$$FB = \sqrt{3^2+(-2)^2} = \sqrt{13}$$

Les trajets AF, FB et BC mesurent tous $\sqrt{13}$ km. De plus, F est sur la ligne : c'est le point de (AB) d'abscisse 0, déjà utilisé pour le tracé.

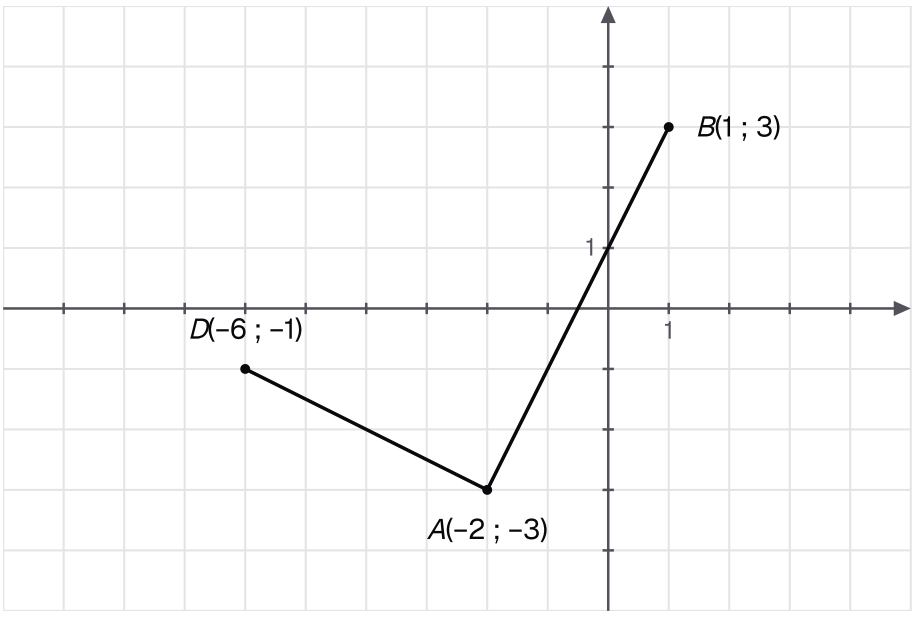
Conclusion. On place la station F au point $F(0;3)$, à environ $3{,}61$ km de A et de B (valeur approchée au centième, donnée par la calculatrice).

Exercice 5

5 pts

Le bassin d'une piscine

Le plan d'un centre de loisirs est muni d'un repère orthonormé dont l'unité vaut un mètre. On y dessine le bord d'un bassin de piscine. Trois de ses coins sont les points $A(-2;-3)$, $B(1;3)$ et $D(-6;-1)$.



Les trois coins connus du bassin : A, B et D.

1. 1 pts

Placer les points A, B et D. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$, puis les longueurs AB et AD sous forme simplifiée.

INDICE

Outil : arrivée moins départ pour un vecteur, puis la formule de la distance, valable dans un repère orthonormé.

Point délicat : cherche un carré parfait dans le nombre sous la racine.

CORRIGÉ

On place d'abord les trois points dans le repère.

Vecteurs. D'après la définition des coordonnées d'un vecteur, $\overrightarrow{AB}(1-(-2);3-(-3))$, soit $\overrightarrow{AB}(3;6)$. De même, $\overrightarrow{AD}(-6-(-2);-1-(-3))$, soit $\overrightarrow{AD}(-4;2)$.

Longueur AB. La formule de la distance s'applique, car le repère est orthonormé, avec les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$:

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{3^2+6^2} \\ &= \sqrt{9+36} = \sqrt{45} \end{aligned}$$

Or $45 = 9 \times 5$, donc $AB = 3\sqrt{5}$.

Longueur AD. De même, avec les coordonnées de $\overrightarrow{AD}$:

$$\begin{aligned} AD &= \sqrt{(-4)^2+2^2} \\ &= \sqrt{16+4} = \sqrt{20} \end{aligned}$$

Or $20 = 4 \times 5$, donc $AD = 2\sqrt{5}$.

Conclusion. On obtient $\overrightarrow{AB}(3;6)$ et $\overrightarrow{AD}(-4;2)$, puis $AB = 3\sqrt{5}$ m et $AD = 2\sqrt{5}$ m.

2. 1 pts

Déterminer l'équation réduite de la droite (AB) et le coefficient directeur de la droite (AD). En déduire la nature de l'angle du bassin au coin A.

INDICE

Outil : la formule du coefficient directeur.

Ensuite : calcule le produit des deux coefficients directeurs.

CORRIGÉ

Droite (AB). D'après la formule du coefficient directeur :

$$\begin{aligned} a &= \frac{3-(-3)}{1-(-2)} \\ &= \frac{6}{3} = 2 \end{aligned}$$

Le point A est sur la droite ; on ajoute 4 aux deux membres :

$$\begin{aligned} -3 &= 2\times(-2)+b \\ -3 &= -4+b \\ b &= 1 \end{aligned}$$

Donc (AB) : $y=2x+1$. Contrôle avec B : $2\times 1+1=3$.

Droite (AD). Son coefficient directeur a' vaut :

$$\begin{aligned} a' &= \frac{-1-(-3)}{-6-(-2)} \\ &= \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Angle. $2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$ et le repère est orthonormé. D'après la propriété des droites perpendiculaires, (AB) et (AD) sont perpendiculaires.

Conclusion. On a (AB) : $y=2x+1$, et l'angle du bassin au coin A est droit.

3. 0,5 pts

Le quatrième coin du bassin est le point $C(-4;3)$. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{DC}$. Le quadrilatère $ABCD$ est-il un parallélogramme ?

INDICE

Outil : $ABCD$ est un parallélogramme si, et seulement si, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

CORRIGÉ

Vecteur $\overrightarrow{DC}$. Du départ $D(-6;-1)$ à l'arrivée $C(-4;3)$: $\overrightarrow{DC}(-4-(-6);3-(-1))$, soit $\overrightarrow{DC}(2;4)$.

Comparaison. D'après la question 1, $\overrightarrow{AB}(3;6)$. Les abscisses 3 et 2 sont différentes, donc $\overrightarrow{AB}\neq\overrightarrow{DC}$.

Rappel : $ABCD$ est un parallélogramme si, et seulement si, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

Conclusion. Cette égalité est fausse, donc $ABCD$ n'est pas un parallélogramme.

4. 1,5 pts

Les côtés $[AB]$ et $[DC]$ sont-ils parallèles ? Et les côtés $[AD]$ et $[BC]$? En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.

INDICE

Début : compare les coefficients directeurs de (DC) et de (AB).

Point délicat : les points B et C ont la même ordonnée.

CORRIGÉ

Côtés $[AB]$ et $[DC]$. D'après la formule du coefficient directeur, celui de (DC) vaut :

$$\frac{3-(-1)}{-4-(-6)} = \frac{4}{2} = 2$$

C'est celui de (AB), trouvé à la question 2. D'après la propriété des droites parallèles, (DC) et (AB) sont parallèles.

Côtés $[AD]$ et $[BC]$. Les points B et C ont la même ordonnée 3 : le coefficient directeur de (BC) vaut $\frac{3-3}{-4-1} = 0$. Il est différent de $-\frac{1}{2}$, coefficient directeur de (AD) : les droites (AD) et (BC) ne sont pas parallèles.

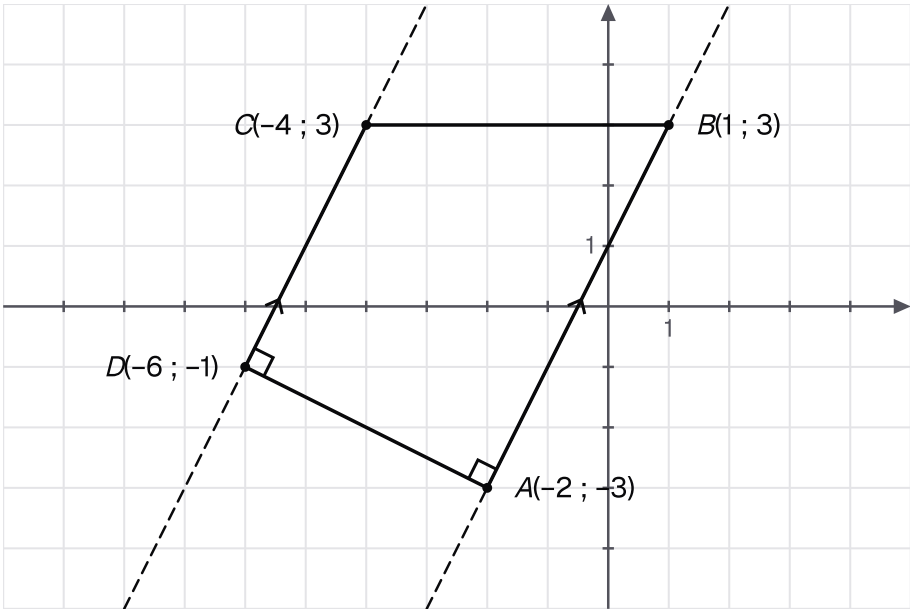
Nature. Le quadrilatère $ABCD$ a deux côtés opposés parallèles, $[AB]$ et $[DC]$, et deux autres côtés qui ne le sont pas : c'est un trapèze de bases $[AB]$ et $[DC]$.

Angles droits. D'après la question 2, (AD) est perpendiculaire à (AB).

Rappel : une droite perpendiculaire à l'une de deux droites parallèles est aussi perpendiculaire à l'autre.

Donc (AD) est aussi perpendiculaire à (DC) : le trapèze a un angle droit en A et un angle droit en D.

Conclusion. Les côtés $[AB]$ et $[DC]$ sont parallèles, les côtés $[AD]$ et $[BC]$ ne le sont pas : $ABCD$ est un trapèze rectangle.



Le bassin ABCD est un trapèze rectangle : (AB) et (DC) sont parallèles, avec des angles droits en A et en D.

5. 1 pts

Calculer l'aire du bassin, en mètres carrés.

INDICE

Début : calcule la longueur DC.

Ensuite : cherche, dans la figure, un côté dont la longueur est la hauteur du trapèze.

CORRIGÉ

Longueur DC. D'après la question 3, $\overrightarrow{DC}(2;4)$. La formule de la distance s'applique, car le repère est orthonormé :

$$\begin{aligned} DC &= \sqrt{2^2+4^2} \\ &= \sqrt{4+16} \\ &= \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

Hauteur. D'après la question 4, le côté $[AD]$ est perpendiculaire aux deux bases $[AB]$ et $[DC]$. La hauteur du trapèze est donc $AD = 2\sqrt{5}$, d'après la question 1.

Aire. Rappel : l'aire d'un trapèze est la moitié du produit de la somme des deux bases par la hauteur. Avec $AB = 3\sqrt{5}$ et $\sqrt{5}\times\sqrt{5} = 5$:

$$\begin{aligned} &\frac{(AB+DC)\times AD}{2} \\ &= \frac{(3\sqrt{5}+2\sqrt{5})\times 2\sqrt{5}}{2} \\ &= \frac{5\sqrt{5}\times 2\sqrt{5}}{2} \\ &= \frac{50}{2} = 25 \end{aligned}$$

Conclusion. L'aire du bassin est de 25 mètres carrés.