BURHAN

Géométrie analytique : exercices, entraînement

3ème Année Collège · Mathématiques

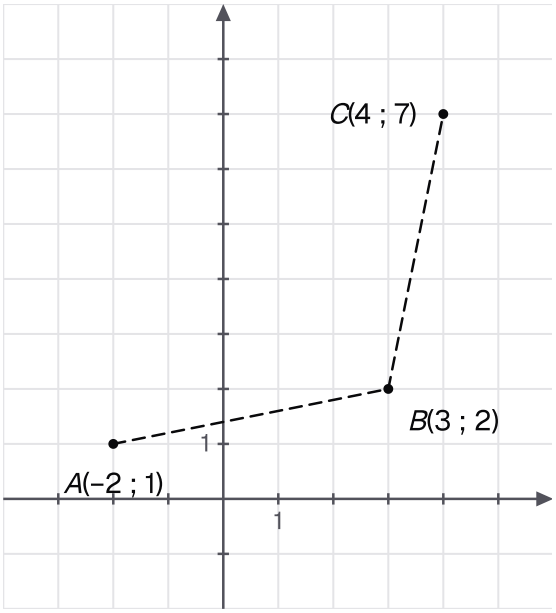
Version en ligne : burhan.ma/3ac/mathematiques/geometrie-analytique/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Géométrie analytique	Entraînement	7

Exercice 1

Le quatrième coin d'une parcelle

Un jardinier veut une parcelle en forme de parallélogramme $ABCD$. Sur son plan, muni d'un repère, trois coins sont déjà plantés : $A(-2;1)$, $B(3;2)$ et $C(4;7)$.



Les trois coins déjà plantés de la parcelle ; le quatrième, D, reste à trouver.

1.

Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

INDICE

Outil : arrivée moins départ, pour chaque coordonnée.

CORRIGÉ

D'après la définition des coordonnées d'un vecteur, on soustrait les coordonnées du départ A à celles de l'arrivée B : $\overrightarrow{AB}(3-(-2);2-1)$, soit $\overrightarrow{AB}(5;1)$.

Conclusion. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(5;1)$.

2.

On note $D(x;y)$ le quatrième coin. Calculer x et y.

INDICE

Outil : $ABCD$ est un parallélogramme si, et seulement si, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Début : écris les coordonnées de $\overrightarrow{DC}$ avec x et y.

Point délicat : ici, le départ est D.

CORRIGÉ

Égalité de vecteurs. $ABCD$ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Le vecteur $\overrightarrow{DC}$ part de $D(x;y)$ et arrive en $C(4;7)$: $\overrightarrow{DC}(4-x;7-y)$.

Équations. Deux vecteurs égaux ont les mêmes coordonnées. On obtient deux équations : $4-x=5$ et $7-y=1$.

Résolution. On isole l'inconnue dans chaque équation : $x=4-5$ et $y=7-1$, donc $x=-1$ et $y=6$.

Contrôle. $4-(-1)=5$ et $7-6=1$: on retrouve les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$.

Conclusion. Le quatrième coin de la parcelle est le point $D(-1;6)$.

3.

Calculer les coordonnées du milieu de $[AC]$ et du milieu de $[BD]$. Conclure.

INDICE

Outil : la formule du milieu.

Ensuite : compare les deux résultats.

CORRIGÉ

Milieu de $[AC]$. D'après la formule du milieu, avec $A(-2;1)$ et $C(4;7)$, ce milieu a pour coordonnées $\left(\dfrac{-2+4}{2};\dfrac{1+7}{2}\right)$, soit $(1;4)$.

Milieu de $[BD]$. De même, avec $B(3;2)$ et $D(-1;6)$: $\left(\dfrac{3+(-1)}{2};\dfrac{2+6}{2}\right)$, soit $(1;4)$.

Conclusion. Les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu $(1;4)$. Un quadrilatère dont les diagonales ont le même milieu est un parallélogramme : on retrouve que $ABCD$ en est un, ce qui confirme le calcul de D.

Exercice 2

Une carte au trésor

Une carte au trésor est munie d'un repère. La tente est au point $E(-3;1)$. Le puits $M(1;-2)$ est exactement au milieu du chemin rectiligne qui va de la tente à la source F.

1.

Calculer les coordonnées de la source F.

INDICE

Outil : la formule du milieu, avec x_F et y_F inconnus.

Début : écris $\dfrac{-3+x_F}{2}=1$.

CORRIGÉ

Le puits M est le milieu de $[EF]$. D'après la formule du milieu, chaque coordonnée de M est la moyenne de celles de E et de F.

Abscisse de F. On multiplie les deux membres par 2, puis on ajoute 3 :

$$\begin{aligned}\frac{-3+x_F}{2}&=1\\ -3+x_F&=2\\ x_F&=5\end{aligned}$$

Ordonnée de F. On multiplie par 2, puis on retranche 1 :

$$\begin{aligned}\frac{1+y_F}{2}&=-2\\ 1+y_F&=-4\\ y_F&=-5\end{aligned}$$

Contrôle. $\dfrac{-3+5}{2}=1$ et $\dfrac{1+(-5)}{2}=-2$: on retrouve les coordonnées du puits.

Conclusion. La source est au point $F(5;-5)$.

2.

Le trésor est caché dans le quadrilatère $PQRS$, avec $P(-1;0)$, $Q(3;-1)$, $R(4;3)$ et $S(0;4)$. Ce quadrilatère est-il un parallélogramme ?

INDICE

Outil : un quadrilatère dont les diagonales ont le même milieu est un parallélogramme.

Point délicat : les diagonales de $PQRS$ sont $[PR]$ et $[QS]$.

CORRIGÉ

Les diagonales de $PQRS$ sont $[PR]$ et $[QS]$. On compare leurs milieux.

Milieu de $[PR]$. D'après la formule du milieu, $\left(\frac{-1+4}{2};\frac{0+3}{2}\right)$, soit $\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$.

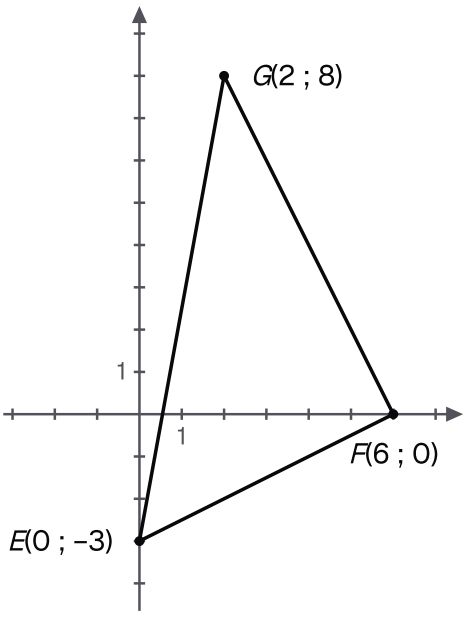
Milieu de $[QS]$. De même, $\left(\frac{3+0}{2};\frac{-1+4}{2}\right)$, soit $\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$.

Conclusion. Les diagonales $[PR]$ et $[QS]$ ont le même milieu. Un quadrilatère dont les diagonales ont le même milieu est un parallélogramme : $PQRS$ est un parallélogramme.

Exercice 3

Un champ en forme de triangle

Le plan d'un champ est muni d'un repère orthonormé ; l'unité est le décamètre. Les trois coins du champ sont $E(0;-3)$, $F(6;0)$ et $G(2;8)$.



Le champ triangulaire EFG, dessiné à partir des coordonnées de ses trois coins.

1.

Calculer les longueurs EF, FG et EG. Écrire chacune sous la forme $k\sqrt{5}$.

INDICE

Outil : la formule de la distance, en repère orthonormé.

Point délicat : cherche un carré parfait dans le nombre sous la racine.

CORRIGÉ

Le repère est orthonormé : on applique la formule de la distance, puis on cherche un carré parfait sous la racine.

Longueur EF. De $E(0;-3)$ à $F(6;0)$, les écarts valent 6 et 3 :

$$\begin{aligned} EF &= \sqrt{6^2+3^2} \\ &= \sqrt{36+9} \\ &= \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \end{aligned}$$

On a utilisé $45 = 9 \times 5$.

Longueur FG. De $F(6;0)$ à $G(2;8)$, les écarts valent -4 et 8 :

$$\begin{aligned} FG &= \sqrt{(-4)^2+8^2} \\ &= \sqrt{16+64} \\ &= \sqrt{80} = 4\sqrt{5} \end{aligned}$$

On a utilisé $80 = 16 \times 5$.

Longueur EG. De $E(0;-3)$ à $G(2;8)$, les écarts valent 2 et 11 :

$$\begin{aligned} EG &= \sqrt{2^2+11^2} \\ &= \sqrt{4+121} \\ &= \sqrt{125} = 5\sqrt{5} \end{aligned}$$

On a utilisé $125 = 25 \times 5$.

Conclusion. En décamètres, les côtés du champ mesurent $EF = 3\sqrt{5}$, $FG = 4\sqrt{5}$ et $EG = 5\sqrt{5}$.

2.

Quelle est la nature du triangle EFG ?

INDICE

Outil : la réciproque du théorème de Pythagore.

Début : repère le plus grand côté, puis compare son carré à la somme des carrés des deux autres côtés.

CORRIGÉ

Plus grand côté. D'après la question 1, le plus grand côté est $[EG]$, et $EG^2 = 125$.

Somme des deux autres carrés. $EF^2 + FG^2 = 45 + 80 = 125$. On a donc $EF^2 + FG^2 = EG^2$.

Conclusion. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle EFG est rectangle en F. Ses trois côtés ont des longueurs différentes : il n'est pas isocèle.

3.

Calculer l'aire du champ, en décamètres carrés.

INDICE

Outil : l'aire d'un triangle rectangle est la moitié du produit des deux côtés de l'angle droit.

Point délicat : $\sqrt{5} \times \sqrt{5} = 5$.

CORRIGÉ

Le triangle est rectangle en F : les côtés de l'angle droit sont $[EF]$ et $[FG]$. L'aire est la moitié de leur produit, avec $\sqrt{5} \times \sqrt{5} = 5$:

$$\begin{aligned} \frac{EF \times FG}{2} &= \frac{3\sqrt{5} \times 4\sqrt{5}}{2} \\ &= \frac{12 \times 5}{2} \\ &= 30. \end{aligned}$$

Conclusion. L'aire du champ est de 30 décamètres carrés.

Exercice 4

Deux câbles d'un parc d'aventure

Dans un parc d'aventure, deux câbles rectilignes sont dessinés sur un plan muni d'un repère. Le premier câble passe par $A(-3;8)$ et $B(1;0)$.

1.

Déterminer l'équation réduite de la droite (AB).

INDICE

Début : calcule le coefficient directeur avec les deux points.

Ensuite : trouve l'ordonnée à l'origine avec B, puis contrôle avec A.

CORRIGÉ

Coefficient directeur. Les abscisses de A et de B sont différentes. D'après la formule du coefficient directeur :

$$\begin{aligned} a &= \frac{0-8}{1-(-3)} \\ &= \frac{-8}{4} = -2 \end{aligned}$$

Ordonnée à l'origine. L'équation s'écrit $y = -2x + b$. Le point $B(1;0)$ est sur la droite : $0 = -2 \times 1 + b$, donc $b = 2$.

Contrôle. Pour $x = -3$: $-2 \times (-3) + 2 = 8$. C'est l'ordonnée de A.

Conclusion. Le premier câble suit la droite (AB) : $y = -2x + 2$.

2.

Le second câble suit une droite (D) de coefficient directeur $\frac{2}{3}$, qui passe par $C(6;1)$. Déterminer l'équation réduite de (D).

INDICE

Début : écris $y = \frac{2}{3}x + b$.

Point délicat : calcule $\frac{2}{3} \times 6$ avant de chercher b.

CORRIGÉ

Ordonnée à l'origine. L'équation de (D) s'écrit $y = \frac{2}{3}x + b$. Le point $C(6;1)$ est sur (D) : ses coordonnées vérifient cette équation.

On calcule $\frac{2}{3} \times 6 = 4$, puis on retranche 4 aux deux membres :

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{2}{3} \times 6 + b \\ 1 &= 4 + b \\ b &= -3 \end{aligned}$$

Contrôle. Avec C : $\frac{2}{3} \times 6 - 3 = 1$.

Conclusion. Le second câble suit la droite (D) : $y = \frac{2}{3}x - 3$.

3.

Le point d'ancrage $K(-3;-5)$ est-il sur le second câble ?

INDICE

Outil : remplace x par l'abscisse de K dans l'équation de (D).

CORRIGÉ

On remplace x par l'abscisse -3 de K dans l'équation de (D) :

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \times (-3) - 3 &= -2 - 3 \\ &= -5 \end{aligned}$$

On trouve -5, l'ordonnée de K : les coordonnées de K vérifient l'équation de (D).

Conclusion. Le point d'ancrage K est sur le second câble.

Exercice 5

Une avenue et deux nouvelles rues

Le plan d'une ville est muni d'un repère orthonormé. Une avenue suit la droite (D) : $y = \frac{3}{4}x - 1$. La mairie veut tracer deux nouvelles rues rectilignes.

1.

La première rue est parallèle à l'avenue et passe par la fontaine $F(-4;1)$. Déterminer son équation réduite.

INDICE

Outil : deux droites parallèles ont le même coefficient directeur.

Ensuite : trouve l'ordonnée à l'origine avec F.

CORRIGÉ

Coefficient directeur. La rue est parallèle à l'avenue (D). D'après la propriété des droites parallèles, elle a le même coefficient directeur, $\frac{3}{4}$. Son équation s'écrit $y = \frac{3}{4}x + b$.

Ordonnée à l'origine. La fontaine $F(-4;1)$ est sur la rue :

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{3}{4} \times (-4) + b \\ 1 &= -3 + b \\ b &= 4 \end{aligned}$$

Contrôle. Avec l'abscisse de F : $\frac{3}{4} \times (-4) + 4 = -3 + 4 = 1$.

Conclusion. La première rue suit la droite d'équation réduite $y = \frac{3}{4}x + 4$.

2.

La seconde rue est perpendiculaire à l'avenue et passe par l'école $K(3;2)$. Déterminer son équation réduite.

INDICE

Outil : dans un repère orthonormé, le produit des coefficients de deux droites perpendiculaires vaut -1.

Début : résous $\frac{3}{4} \times a' = -1$.

CORRIGÉ

Coefficient directeur. On note a' le coefficient directeur de la seconde rue. Le repère est orthonormé ; d'après la propriété des droites perpendiculaires, $\frac{3}{4} \times a' = -1$, donc $a' = -\frac{4}{3}$. On a multiplié les deux membres par $\frac{4}{3}$.

Ordonnée à l'origine. L'école $K(3;2)$ est sur la rue :

$$\begin{aligned} 2 &= -\frac{4}{3} \times 3 + b \\ 2 &= -4 + b \\ b &= 6 \end{aligned}$$

Contrôle. Avec l'abscisse de K : $-\frac{4}{3} \times 3 + 6 = -4 + 6 = 2$.

Conclusion. La seconde rue suit la droite d'équation réduite $y = -\frac{4}{3}x + 6$.

3.

Les deux nouvelles rues sont-elles perpendiculaires entre elles ?

INDICE

Outil : calcule le produit de leurs coefficients directeurs.

CORRIGÉ

Les coefficients directeurs des deux nouvelles rues sont $\frac{3}{4}$ et $-\frac{4}{3}$. Leur produit vaut :

$$\frac{3}{4} \times \left(-\frac{4}{3}\right) = -1$$

Le repère est orthonormé : d'après la propriété des droites perpendiculaires, les deux rues sont perpendiculaires.

Ce résultat était attendu : la première rue est parallèle à l'avenue, et la seconde est perpendiculaire à l'avenue.

Conclusion. Oui, les deux nouvelles rues sont perpendiculaires entre elles.

Exercice 6

Le vol d'un drone

Une carte, munie d'un repère orthonormé, a pour unité le kilomètre. Un drone part de sa base $B(-2;3)$ et vole en ligne droite jusqu'au phare $P(6;-3)$.

1.

Déterminer l'équation réduite de la droite (BP) suivie par le drone.

INDICE

Début : calcule le coefficient directeur avec B et P.

Point délicat : simplifie la fraction obtenue avant de chercher b.

CORRIGÉ

Coefficient directeur. D'après la formule du coefficient directeur, avec $B(-2;3)$ et $P(6;-3)$:

$$\begin{aligned} a &= \frac{-3-3}{6-(-2)} \\ &= \frac{-6}{8} = -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

On a simplifié la fraction par 2, sans perdre son signe.

Ordonnée à l'origine. Le point B est sur la droite. On calcule le produit, puis on retranche $\frac{3}{2}$ aux deux membres :

$$\begin{aligned} 3 &= -\frac{3}{4} \times (-2) + b \\ 3 &= \frac{3}{2} + b \\ b &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Contrôle. Avec l'abscisse de P :

$$\begin{aligned} -\frac{3}{4} \times 6 + \frac{3}{2} &= -\frac{9}{2} + \frac{3}{2} \\ &= -3 \end{aligned}$$

On retrouve l'ordonnée de P.

Conclusion. Le drone suit la droite (BP) : $y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$.

2.

Le drone survole-t-il la maison $H(2;0)$? la ferme $K(4;-1)$?

INDICE

Outil : remplace x par l'abscisse du point dans l'équation de (BP).

CORRIGÉ

Maison. On remplace x par 2 dans l'équation de (BP) :

$$\begin{aligned} -\frac{3}{4}\times 2+\frac{3}{2} &= -\frac{3}{2}+\frac{3}{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

On trouve l'ordonnée de H : le point H est sur (BP).

Ferme. On remplace x par 4 :

$$\begin{aligned} -\frac{3}{4}\times 4+\frac{3}{2} &= -3+\frac{3}{2} \\ &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Or $-\frac{3}{2}\neq -1$: le point K n'est pas sur (BP).

Conclusion. Le drone survole la maison, mais pas la ferme.

3.

Calculer la longueur du trajet BP.

INDICE

Outil : la formule de la distance, en repère orthonormé.

CORRIGÉ

Le repère est orthonormé. Les écarts de coordonnées de B à P valent $6-(-2)=8$ et $-3-3=-6$. D'après la formule de la distance :

$$\begin{aligned} BP &= \sqrt{8^2+(-6)^2} \\ &= \sqrt{64+36} \\ &= \sqrt{100}=10. \end{aligned}$$

Conclusion. Le trajet du drone mesure 10 km.

4.

À quel endroit le drone a-t-il parcouru la moitié du trajet ? Que remarques-tu ?

INDICE

Outil : la moitié du trajet est atteinte au milieu de $[BP]$.

CORRIGÉ

La moitié du trajet est atteinte au milieu de $[BP]$. D'après la formule du milieu, ce milieu a pour coordonnées $\left(\frac{-2+6}{2}; \frac{3+(-3)}{2}\right)$, soit $(2; 0)$.

On reconnaît le point H, la maison de la question 2.

Conclusion. Le drone a parcouru la moitié du trajet au point $(2; 0)$: il survole alors la maison, à 5 km de sa base.

Exercice 7

Une rangée d'arbres bien droite

Un jardinier veut planter des arbres en ligne droite. Son plan est muni d'un repère. Il a déjà planté deux arbres aux points $A(-2;-7)$ et $B(1;2)$.

1.

Déterminer l'équation réduite de la droite (AB).

INDICE

Début : calcule le coefficient directeur, puis l'ordonnée à l'origine avec B.

CORRIGÉ

Coefficient directeur. Les abscisses de A et de B sont différentes. D'après la formule du coefficient directeur :

$$\begin{aligned} a &= \frac{2-(-7)}{1-(-2)} \\ &= \frac{9}{3} = 3 \end{aligned}$$

Ordonnée à l'origine. Le point $B(1;2)$ est sur la droite : $2 = 3 \times 1 + b$, donc $b = -1$.

Contrôle. Pour $x = -2$: $3 \times (-2) - 1 = -7$. C'est l'ordonnée de A.

Conclusion. La rangée suit la droite (AB) : $y = 3x - 1$.

2.

Un troisième arbre est prévu en $C(3;8)$, un quatrième en $D(4;10)$. Sont-ils alignés avec A et B ?

INDICE

Outil : un point est aligné avec A et B quand il est sur la droite (AB).

Point délicat : teste chaque point séparément.

CORRIGÉ

Un point est aligné avec A et B quand ses coordonnées vérifient l'équation de (AB). On teste chaque point.

Point C. Pour $x = 3$: $3 \times 3 - 1 = 8$. On trouve l'ordonnée de C : les points A, B et C sont alignés.

Point D. Pour $x = 4$: $3 \times 4 - 1 = 11$. Or $11 \neq 10$: le point D n'est pas sur (AB).

Conclusion. Le troisième arbre est aligné avec A et B, mais pas le quatrième : il faut déplacer celui-ci.

3.

Le jardinier veut un arbre E d'abscisse -1 dans la rangée. Calculer son ordonnée.

INDICE

Outil : le point E est sur (AB) ; utilise l'équation réduite.

CORRIGÉ

Le point E est sur (AB) : on obtient son ordonnée en remplaçant x par -1 dans l'équation réduite.

$$y_E = 3 \times (-1) - 1 = -4$$

Conclusion. L'arbre se plante au point $E(-1 ; -4)$.