BURHAN

Géométrie analytique : exercices, application

3ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/3ac/mathematiques/geometrie-analytique/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Géométrie analytique	Application	8

Exercice 1

Une partie de bataille navale

Deux amis jouent à la bataille navale sur une feuille quadrillée. Ils tracent un repère orthonormé $(O;I;J)$: un carreau vaut une unité. Ils cachent cinq bateaux aux points $A(3;2)$, $B(-2;4)$, $C(-3;-1)$, $D(0;-4)$ et $E(5;0)$.

1.

Placer les cinq points sur ta feuille. Expliquer comment tu as placé C.

INDICE

Outil : l'abscisse se compte horizontalement depuis O, l'ordonnée verticalement.

Point délicat : un nombre négatif indique la gauche ou le bas.

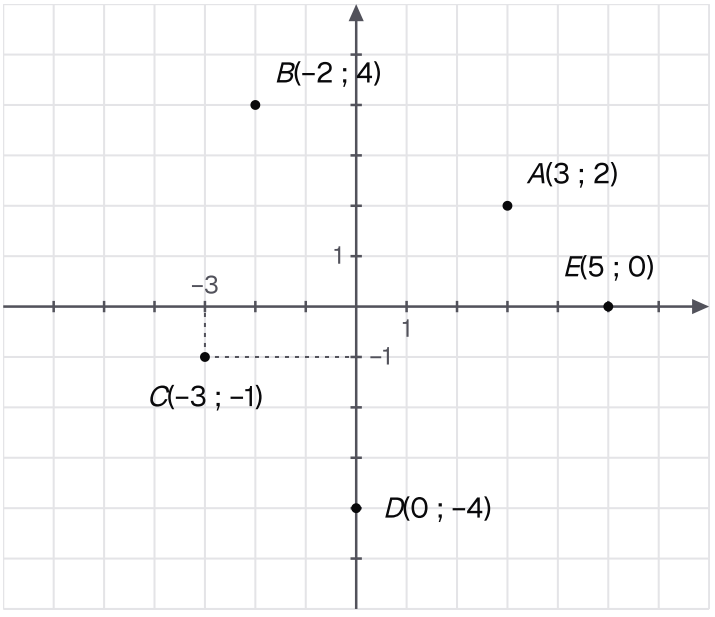
CORRIGÉ

On part toujours de l'origine O, et on lit l'abscisse avant l'ordonnée.

Placement de C. L'abscisse de C vaut -3 : on compte 3 carreaux vers la gauche. L'ordonnée vaut -1 : on descend ensuite de 1 carreau.

Les autres points. On place A, B, D et E de la même façon. Le point D, d'abscisse nulle, reste sur l'axe vertical ; le point E, d'ordonnée nulle, reste sur l'axe horizontal.

Conclusion. Les cinq bateaux sont placés. Pour C, on se déplace de 3 carreaux vers la gauche, puis de 1 carreau vers le bas.



Les cinq bateaux placés : pour C, on compte 3 carreaux vers la gauche, puis 1 vers le bas.

2.

Quels bateaux sont sur un axe du repère ? Préciser lequel.

INDICE

Outil : sur un axe, l'une des deux coordonnées vaut 0.

Début : cherche les coordonnées nulles dans la liste.

CORRIGÉ

Un point est sur un axe quand l'une de ses deux coordonnées vaut 0.

Axe des ordonnées. Le point $D(0;-4)$ a une abscisse nulle : il est sur l'axe des ordonnées.

Axe des abscisses. Le point $E(5;0)$ a une ordonnée nulle : il est sur l'axe des abscisses.

Conclusion. Le bateau D est sur l'axe des ordonnées et le bateau E sur l'axe des abscisses. Les trois autres ne sont sur aucun axe.

3.

Quels bateaux sont à gauche de l'axe des ordonnées ?

INDICE

Outil : la position gauche ou droite dépend du signe de l'abscisse.

CORRIGÉ

Un point est à gauche de l'axe des ordonnées quand son abscisse est négative.

Lecture des abscisses. Les abscisses des cinq bateaux sont 3, -2, -3, 0 et 5. Seules celles de B et de C, qui valent -2 et -3, sont négatives.

Conclusion. Seuls les bateaux B et C sont à gauche de l'axe des ordonnées.

4.

Un sous-marin K est à 4 unités à gauche de l'axe des ordonnées et à 2 unités au-dessus de l'axe des abscisses. Un dernier bateau L a la même abscisse que A et la même ordonnée que C. Écrire les coordonnées de K et de L.

INDICE

Début : pour K, traduis « à gauche » et « au-dessus » par un signe.

Point délicat : écris toujours l'abscisse en premier.

CORRIGÉ

Sous-marin K. À gauche de l'axe des ordonnées, l'abscisse est négative : elle vaut -4. Au-dessus de l'axe des abscisses, l'ordonnée est positive : elle vaut 2.

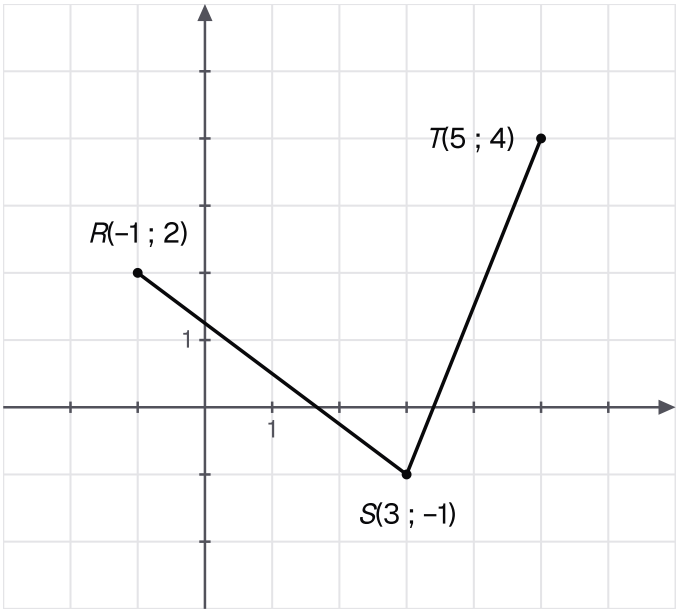
Dernier bateau L. Il prend l'abscisse de A, qui vaut 3, et l'ordonnée de C, qui vaut -1.

Conclusion. Les coordonnées cherchées sont $K(-4;2)$ et $L(3;-1)$.

Exercice 2

Le trajet d'un robot aspirateur

Le sol d'un salon est muni d'un repère orthonormé, gradué en mètres. Un robot aspirateur part du point $R(-1;2)$. Il roule en ligne droite jusqu'au point $S(3;-1)$, puis jusqu'au point $T(5;4)$.



Le trajet du robot aspirateur : une ligne droite de R à S, puis une autre de S à T.

1.

Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{RS}$.

INDICE

Outil : les coordonnées d'un vecteur se calculent « arrivée moins départ ».

Début : ici, le départ est R.

CORRIGÉ

D'après la définition des coordonnées d'un vecteur, on soustrait les coordonnées du départ R à celles de l'arrivée S : $\overrightarrow{RS}(3-(-1);-1-2)$, soit $\overrightarrow{RS}(4;-3)$.

Le robot avance de 4 m dans le sens de l'axe des abscisses et recule de 3 m dans celui des ordonnées.

Conclusion. Le vecteur $\overrightarrow{RS}$ a pour coordonnées $(4;-3)$.

2.

Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{ST}$.

INDICE

Outil : même calcul.

Point délicat : le départ est maintenant S.

CORRIGÉ

Le départ est maintenant S et l'arrivée T. D'après la définition des coordonnées d'un vecteur, $\overrightarrow{ST}(5-3;4-(-1))$, soit $\overrightarrow{ST}(2;5)$.

Conclusion. Le vecteur $\overrightarrow{ST}$ a pour coordonnées $(2;5)$.

3.

Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{RS}+\overrightarrow{ST}$, puis celles de $\overrightarrow{RT}$. Que remarques-tu ?

INDICE

Outil : pour une somme, on ajoute les abscisses entre elles et les ordonnées entre elles.

Ensuite : pense à la relation de Chasles.

CORRIGÉ

Somme. D'après la formule de la somme, on ajoute les abscisses entre elles et les ordonnées entre elles. Le vecteur $\overrightarrow{RS}+\overrightarrow{ST}$ a pour coordonnées $(4+2;-3+5)$, soit $(6;2)$.

Vecteur direct. Du départ R à l'arrivée T : $\overrightarrow{RT}(5-(-1);4-2)$, soit $\overrightarrow{RT}(6;2)$.

Conclusion. Les deux vecteurs ont les mêmes coordonnées $(6;2)$, donc ils sont égaux. On remarque la relation de Chasles : $\overrightarrow{RS}+\overrightarrow{ST}=\overrightarrow{RT}$.

Exercice 3

Un banc entre deux arbres

Le plan d'un parc est muni d'un repère orthonormé. On veut installer un banc exactement au milieu de deux arbres.

1.

Les deux premiers arbres sont aux points $P(-4;-3)$ et $Q(6;5)$. Calculer les coordonnées du milieu M du segment $[PQ]$.

INDICE

Outil : la formule du milieu.

Début : ajoute les deux abscisses, puis divise par 2.

CORRIGÉ

Abscisse de M. D'après la formule du milieu, l'abscisse de M est la moyenne des abscisses de P et de Q :

$$x_M = \frac{-4+6}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Ordonnée de M. On procède de même avec les ordonnées :

$$y_M = \frac{-3+5}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Conclusion. Le milieu de $[PQ]$ est le point $M(1;1)$: le banc se place à cet endroit.

2.

Deux autres arbres sont aux points $U(-7;2)$ et $V(-2;-5)$. Calculer les coordonnées du milieu N du segment $[UV]$.

INDICE

Outil : même formule.

Point délicat : le résultat peut être un nombre décimal.

CORRIGÉ

Abscisse de N. D'après la formule du milieu :

$$\begin{aligned} x_N &= \frac{-7+(-2)}{2} \\ &= \frac{-9}{2} = -4{,}5 \end{aligned}$$

Ordonnée de N. De même :

$$\begin{aligned} y_N &= \frac{2+(-5)}{2} \\ &= \frac{-3}{2} = -1{,}5 \end{aligned}$$

Conclusion. Le milieu de $[UV]$ est le point $N(-4{,}5;-1{,}5)$: le second banc se place à cet endroit.

Exercice 4

Mesurer sans mètre ruban

Sur le plan d'un terrain de jeux, on trace un repère orthonormé dont l'unité vaut un mètre.

1.

Un toboggan est au point $A(2;-1)$ et une balançoire au point $B(10;14)$. Calculer la distance AB.

INDICE

Outil : la formule de la distance, valable car le repère est orthonormé.

Début : calcule les deux écarts $x_B - x_A$ et $y_B - y_A$.

CORRIGÉ

Écarts. On calcule d'abord l'écart des abscisses et celui des ordonnées : $x_B - x_A = 10 - 2 = 8$ et $y_B - y_A = 14 - (-1) = 15$.

Distance. Le repère est orthonormé, donc la formule de la distance s'applique :

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{8^2 + 15^2} \\ &= \sqrt{64 + 225} \\ &= \sqrt{289} = 17. \end{aligned}$$

Conclusion. Le toboggan et la balançoire sont à 17 m l'un de l'autre.

2.

Une table de pique-nique est au point $C(-1;4)$ et une fontaine au point $D(2;1)$. Calculer CD sous la forme $k\sqrt{2}$, puis en donner une valeur approchée au centième.

INDICE

Outil : même formule.

Point délicat : cherche un carré parfait dans le nombre sous la racine.

CORRIGÉ

Écarts. $x_D - x_C = 2 - (-1) = 3$ et $y_D - y_C = 1 - 4 = -3$.

Distance. La formule de la distance s'applique, car le repère est orthonormé :

$$\begin{aligned} CD &= \sqrt{3^2 + (-3)^2} \\ &= \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18} \end{aligned}$$

Simplification. Le nombre 18 contient le carré parfait 9 : $18 = 9 \times 2$. La racine carrée d'un produit est le produit des racines carrées :

$$CD = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

Conclusion. La table et la fontaine sont à $3\sqrt{2}$ m l'une de l'autre. La calculatrice donne $CD \approx 4{,}24$ m au centième près.

Exercice 5

L'équation d'une piste cyclable

Sur le plan d'une ville, muni d'un repère, une piste cyclable rectiligne passe par les points $A(1;3)$ et $B(4;9)$.

1.

Calculer le coefficient directeur a de la droite (AB).

INDICE

Outil : la formule du coefficient directeur à partir de deux points.

Point délicat : prends les points dans le même ordre en haut et en bas.

CORRIGÉ

Les abscisses de A et de B sont différentes : on peut appliquer la formule du coefficient directeur.

$$\begin{aligned} a &= \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \\ &= \frac{9-3}{4-1} \\ &= \frac{6}{3} = 2. \end{aligned}$$

Conclusion. Le coefficient directeur de la droite (AB) est $a = 2$.

2.

Calculer l'ordonnée à l'origine b, puis écrire l'équation réduite de (AB).

INDICE

Début : remplace x et y par les coordonnées de A dans $y = 2x + b$.

CORRIGÉ

Ordonnée à l'origine. L'équation réduite de (AB) s'écrit $y = 2x + b$. Le point $A(1;3)$ est sur la droite, donc ses coordonnées vérifient cette équation.

On remplace x par 1 et y par 3, puis on retranche 2 aux deux membres :

$$\begin{aligned} 3 &= 2 \times 1 + b \\ 3 &= 2 + b \\ b &= 1 \end{aligned}$$

Conclusion. L'ordonnée à l'origine vaut 1, et la piste suit la droite (AB) : $y = 2x + 1$.

3.

Vérifier ton équation avec le point B.

INDICE

Outil : remplace x par l'abscisse de B et compare le résultat à son ordonnée.

CORRIGÉ

On remplace x par l'abscisse 4 de B dans l'équation : $2 \times 4 + 1 = 9$.

On obtient 9, qui est l'ordonnée de B : les coordonnées de B vérifient l'équation.

Conclusion. Le point B confirme l'équation $y = 2x + 1$.

Exercice 6

Lire une équation, en écrire une autre

1.

On donne trois droites : (D) : $y = -x + 6$, (D') : $y = 5x$ et (D'') : $y = 7$. Pour chacune, donner le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine.

INDICE

Outil : compare chaque équation à la forme $y = ax + b$.

Point délicat : un terme absent correspond à un nombre nul ; $-x$ s'écrit aussi $-1 \times x$.

CORRIGÉ

On écrit chaque équation sous la forme $y = ax + b$. Le nombre a est le coefficient directeur, le nombre b l'ordonnée à l'origine.

Droite (D). $y = -x + 6$ s'écrit $y = -1 \times x + 6$: le coefficient directeur est -1, l'ordonnée à l'origine est 6.

Droite (D'). $y = 5x$ s'écrit $y = 5x + 0$: le coefficient directeur est 5, l'ordonnée à l'origine est 0. Cette droite passe par l'origine.

Droite (D''). $y = 7$ s'écrit $y = 0 \times x + 7$: le coefficient directeur est 0, l'ordonnée à l'origine est 7. Cette droite est parallèle à l'axe des abscisses.

Conclusion. Dans l'ordre (D), (D'), (D''), les coefficients directeurs sont -1, 5 et 0, et les ordonnées à l'origine sont 6, 0 et 7.

2.

Une droite (Δ) passe par le point $E(-2;5)$ et a pour coefficient directeur $-\dfrac{1}{2}$. Déterminer son équation réduite.

INDICE

Début : l'équation s'écrit $y=-\dfrac{1}{2}x+b$.

Ensuite : utilise les coordonnées de E pour trouver b.

CORRIGÉ

Ordonnée à l'origine. L'équation de (Δ) s'écrit $y=-\dfrac{1}{2}x+b$. Le point $E(-2;5)$ est sur (Δ) : ses coordonnées vérifient cette équation.

On remplace x par -2 et y par 5, puis on retranche 1 aux deux membres :

$$\begin{aligned} 5&=-\frac{1}{2}\times(-2)+b\\ 5&=1+b\\ b&=4 \end{aligned}$$

Contrôle. Avec l'abscisse de E :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\times(-2)+4&=1+4\\ &=5 \end{aligned}$$

On retrouve l'ordonnée de E.

Conclusion. L'équation réduite cherchée est (Δ) : $y=-\dfrac{1}{2}x+4$.

Exercice 7

La route d'un bateau sur un radar

L'écran d'un radar est muni d'un repère orthonormé ; l'unité est le kilomètre. Un bateau suit la droite $(D) : y = \frac{1}{2}x - 2$.

1.

Calculer l'ordonnée du point de (D) d'abscisse 0, puis celle du point de (D) d'abscisse 4.

INDICE

Outil : remplace x par la valeur donnée dans l'équation.

CORRIGÉ

On remplace x par la valeur donnée dans l'équation de (D) : le résultat est l'ordonnée du point.

Abscisse 0. $\frac{1}{2} \times 0 - 2 = -2$: le point $(0 ; -2)$ est sur (D).

Abscisse 4. $\frac{1}{2} \times 4 - 2 = 2 - 2 = 0$: le point $(4 ; 0)$ est sur (D).

Conclusion. Le point de (D) d'abscisse 0 a pour ordonnée -2, et celui d'abscisse 4 a pour ordonnée 0.

2.

Tracer la droite (D) sur papier quadrillé. Contrôler le tracé avec le point de (D) d'abscisse -2.

INDICE

Début : place les deux points de la question 1.

Ensuite : calcule l'ordonnée pour $x = -2$ et regarde si ce point est sur ton tracé.

CORRIGÉ

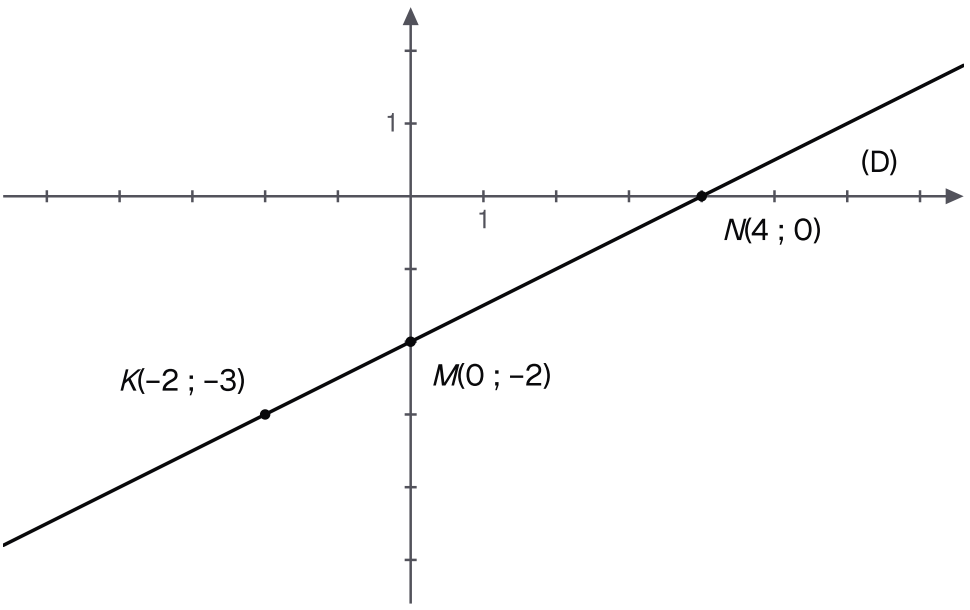
Tracé. On place les points $(0;-2)$ et $(4;0)$ de la question 1, puis on trace la droite qui passe par ces deux points.

Contrôle. On calcule l'ordonnée du point de (D) d'abscisse -2 :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\times(-2)-2 &= -1-2\\ &= -3\end{aligned}$$

Le point $(-2;-3)$ doit donc se trouver sur le tracé ; sinon, il faut reprendre la figure.

Conclusion. La droite (D) est tracée à l'aide de deux points, et le point $(-2;-3)$ permet d'en contrôler la justesse.



La route du bateau tracée par les points d'abscisses 0 et 4, nommés ici M et N ; le point de contrôle K, d'abscisse -2, se trouve bien sur le tracé.

3.

Une bouée est au point $F(6;1)$ et un rocher au point $G(-2;-4)$. Le bateau passe-t-il sur la bouée ? sur le rocher ?

INDICE

Outil : un point est sur (D) quand son ordonnée est égale à $\frac{1}{2}x-2$, calculé avec son abscisse.

CORRIGÉ

Pour chaque point, on calcule $\frac{1}{2}x-2$ avec son abscisse, puis on compare le résultat à son ordonnée.

Bouée. Pour $x=6$: $\frac{1}{2}\times 6-2=3-2=1$. C'est l'ordonnée de F : le point F est sur (D).

Rocher. Pour $x=-2$, la question 2 a donné -3. Or $-3\neq -4$: le point G n'est pas sur (D).

Conclusion. Le bateau passe sur la bouée, mais il ne touche pas le rocher.

Exercice 8

Les rues d'un nouveau quartier

Le plan d'un nouveau quartier est muni d'un repère orthonormé. Quatre rues rectilignes suivent les droites :

- $(D_1) : y = 3x - 2$;
- $(D_2) : y = -\dfrac{1}{3}x + 5$;
- $(D_3) : y = 3x + 4$;
- $(D_4) : y = \dfrac{1}{3}x - 1$.

1.

Quelles rues sont parallèles ?

INDICE

Outil : deux droites sont parallèles quand elles ont le même coefficient directeur.

Début : relève les quatre coefficients directeurs.

CORRIGÉ

Coefficients. Dans une équation réduite, le coefficient directeur est le nombre qui multiplie x. Pour les quatre rues, ce sont 3, $-\dfrac{1}{3}$, 3 et $\dfrac{1}{3}$.

Comparaison. Seules (D_1) et (D_3) ont le même coefficient directeur, égal à 3. Les autres coefficients sont tous différents.

Conclusion. D'après la propriété des droites parallèles, les rues (D_1) et (D_3) sont parallèles, et ce sont les seules.

2.

La rue (D_2) est-elle perpendiculaire à (D_1) ? Et la rue (D_4) ?

INDICE

Outil : dans un repère orthonormé, deux droites sont perpendiculaires quand le produit de leurs coefficients directeurs vaut -1.

Point délicat : calcule chaque produit.

CORRIGÉ

Le repère est orthonormé : deux droites sont perpendiculaires quand le produit de leurs coefficients directeurs vaut -1.

Rue (D_2). $3 \times \left(-\dfrac{1}{3}\right) = -1$: la rue (D_2) est perpendiculaire à (D_1).

Rue (D_4). $3 \times \dfrac{1}{3} = 1$ et $1 \neq -1$: la rue (D_4) n'est pas perpendiculaire à (D_1).

Conclusion. La rue (D_2) est perpendiculaire à (D_1), mais la rue (D_4) ne l'est pas.

3.

La rue (D_2) est-elle aussi perpendiculaire à (D_3) ?

INDICE

Outil : même calcul avec le coefficient de (D_3).

CORRIGÉ

Le coefficient directeur de (D_3) vaut 3, comme celui de (D_1). Le produit avec celui de (D_2) est donc le même qu'à la question 2 : $3 \times \left(-\frac{1}{3}\right) = -1$.

Rappel : une droite perpendiculaire à l'une de deux droites parallèles est aussi perpendiculaire à l'autre. Le calcul le confirme ici, puisque (D_1) et (D_3) sont parallèles.

Conclusion. Oui, la rue (D_2) est perpendiculaire à (D_3).