BURHAN

Géométrie analytique

3ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/3ac/mathematiques/geometrie-analytique/cours

Chapitre	Semestre
Géométrie analytique	Semestre 2

Retrouver un lieu sur un plan

Sur le plan quadrillé de ta ville, la fontaine sert de point de départ. La boulangerie est à 3 rues vers l'est et à 2 rues vers le nord. Deux nombres suffisent donc pour la retrouver.

La pharmacie est à 1 rue vers l'est et à 6 rues vers le nord. Tu sors de la boulangerie et tu vas à la pharmacie.

Devine : Le trajet

Quel trajet fais-tu, de la boulangerie à la pharmacie ?

A. 2 rues vers l'ouest, puis 4 rues vers le nord.
Juste.
Juste : tu recules de 2 rues, puis tu montes de 4 rues.

B. 2 rues vers l'est, puis 4 rues vers le sud.
Faux.
C'est le trajet inverse, de la pharmacie à la boulangerie.

C. 4 rues vers l'est, puis 8 rues vers le nord.
Faux.
Tu as additionné les nombres des deux lieux : $3 + 1$ et $2 + 6$.

D. 1 rue vers l'est, puis 6 rues vers le nord.
Faux.
C'est le trajet depuis la fontaine, pas depuis la boulangerie.

Correction
Vers l'est, tu passes de 3 à 1 : $1 - 3 = -2$. Tu recules donc de 2 rues, vers l'ouest.

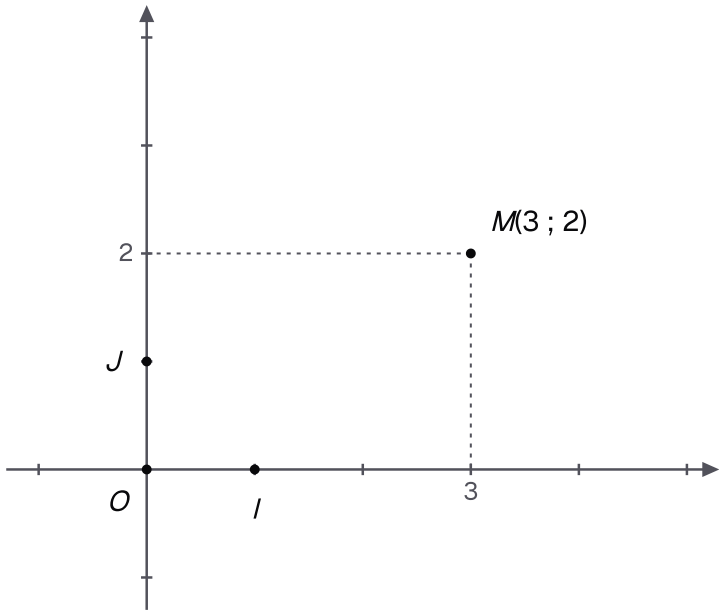
Vers le nord, tu passes de 2 à 6 : $6 - 2 = 4$. Tu calcules « arrivée moins départ » : c'est l'idée des coordonnées d'un vecteur.

Dans ce chapitre, tu repères les points du plan par deux nombres, leurs coordonnées. Tu calcules ensuite des déplacements, des milieux et des distances. Tu apprends enfin à décrire une droite par une équation, et à reconnaître deux droites parallèles ou perpendiculaires.

Repère orthonormé, coordonnées d'un point

Du plan de la ville au repère

Rappel de 1re année : sur une droite graduée, chaque point est repéré par un nombre, son abscisse. Dans un repère du plan, deux droites graduées se coupent en un point, l'origine. Un point du plan est alors repéré par deux nombres.



Le point M est repéré par deux nombres, lus sur les deux axes gradués qui se coupent à l'origine.

Devine : Placer un point

Dans un repère, Salma part de l'origine. Elle avance de 4 unités vers la gauche, puis de 1 unité vers le haut. Elle s'arrête au point P.

Quelles sont les coordonnées de P ?

A. $P(1;-4)$

Faux.

Tu as écrit l'ordonnée en premier. L'abscisse vient toujours d'abord.

B. $P(-4;1)$

Juste.

Juste : 4 unités vers la gauche donnent l'abscisse -4.

C. $P(4;1)$

Faux.

Vers la gauche, l'abscisse est négative.

D. $P(-4;-1)$

Faux.

Vers le haut, l'ordonnée est positive.

Correction
Vers la gauche, l'abscisse est négative : elle vaut -4. Vers le haut, l'ordonnée est positive : elle vaut 1.

On écrit l'abscisse d'abord : $P(-4;1)$. Deux nombres écrits dans un ordre fixé, le premier puis le second, forment un **couple** de nombres.

Le repère orthonormé

Définition : Repère orthonormé et coordonnées d'un point

Trois points O, I et J non alignés forment un **repère orthonormé** $(O;I;J)$ du plan lorsque les droites (OI) et (OJ) sont perpendiculaires et que $OI = OJ$. Cette longueur commune est l'**unité**.

- Le point O est l'**origine** du repère.
- La droite (OI) est l'**axe des abscisses** ; la droite (OJ) est l'**axe des ordonnées**.

Dans ce repère, chaque point M du plan est repéré par un couple unique de nombres : ses **coordonnées**. Le premier nombre x est l'**abscisse** de M, le second y est son **ordonnée**. On écrit $M(x;y)$. Inversement, chaque couple de nombres est le couple de coordonnées d'un seul point.

Exemple : un terrain de sport

Sur un terrain de handball, on place l'origine O au centre. L'axe des abscisses suit la ligne du milieu. L'axe des ordonnées va d'un but à l'autre.

Ces deux axes sont perpendiculaires. On prend 1 m comme unité sur les deux axes : le repère est orthonormé.

Le joueur placé en $C(3;-2)$ est à 3 m à droite de l'axe des ordonnées. Il est à 2 m au-dessous de l'axe des abscisses.

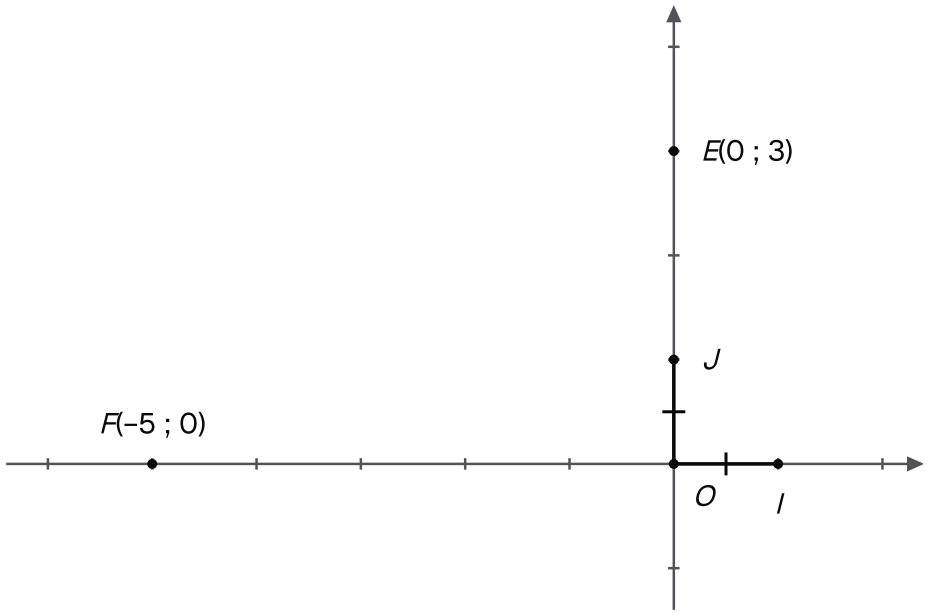
Méthode : placer un point, lire ses coordonnées

1. **Place** le point : pars de l'origine. Avance de l'abscisse le long de l'axe des abscisses, à droite si elle est positive. Puis avance de l'ordonnée, vers le haut si elle est positive.
2. **Lis** les coordonnées d'un point : trace les parallèles aux deux axes qui passent par ce point. L'abscisse se lit là où une parallèle coupe l'axe des abscisses. Fais de même pour l'ordonnée.
3. **Écris** les deux nombres dans l'ordre, entre parenthèses : l'abscisse d'abord, l'ordonnée ensuite, séparées par un point-virgule.

Points sur les axes, signe des coordonnées

Exemple : des points sur les axes

- Le point $E(0;3)$ a pour abscisse 0 : il est sur l'axe des ordonnées.
- Le point $F(-5;0)$ a pour ordonnée 0 : il est sur l'axe des abscisses.
- L'origine a pour coordonnées $O(0;0)$. On a aussi $I(1;0)$ et $J(0;1)$.



Une coordonnée nulle place le point sur un axe : E sur l'axe des ordonnées, F sur l'axe des abscisses.

En clair. Le signe de l'abscisse dit de quel côté de l'axe des ordonnées se trouve le point. Il est à droite si l'abscisse est positive, à gauche si elle est négative. Le signe de l'ordonnée dit s'il est au-dessus ou au-dessous de l'axe des abscisses.

Ainsi, le point $G(-3;-2)$ est à gauche et au-dessous.

Vérifie : Où est le point ?

Où se trouve le point $K(-2;5)$?

A. À droite de l'axe des ordonnées, au-dessus de l'axe des abscisses.
Faux.
L'abscisse -2 est négative : le point est à gauche.

B. À gauche de l'axe des ordonnées, au-dessous de l'axe des abscisses.
Faux.
L'ordonnée 5 est positive : le point est au-dessus.

C. À gauche de l'axe des ordonnées, au-dessus de l'axe des abscisses.

Juste.

Juste : abscisse négative, ordonnée positive.

D. Sur l'axe des ordonnées, au-dessus de l'origine.

Faux.

Seul un point d'abscisse 0 est sur l'axe des ordonnées.

Correction

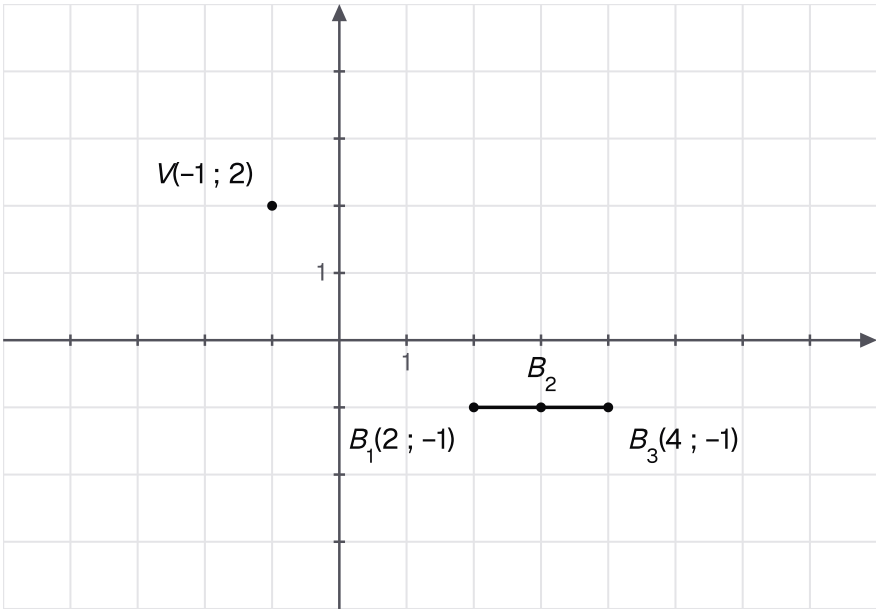
L'abscisse -2 est négative : K est à gauche de l'axe des ordonnées. L'ordonnée 5 est positive : K est au-dessus de l'axe des abscisses.

Une bataille navale, puis à toi

Exemple : une bataille navale

Ilyas et Nora jouent à la bataille navale dans un repère orthonormé. Un bateau occupe les points $(2;-1)$, $(3;-1)$ et $(4;-1)$. Ces trois points ont la même ordonnée : le bateau est parallèle à l'axe des abscisses.

Nora vise le point $(-1;2)$. C'est raté : ce point est à gauche de l'axe des ordonnées, et le bateau est à droite.



Les trois cases du bateau, notées ici B1, B2 et B3, sont à la même hauteur ; le tir de Nora, noté V, est de l'autre côté de l'axe vertical.

À toi : Placer et lire

Sur ton papier quadrillé, trace un repère orthonormé $(O; I; J)$. Place les points $A(3; 1)$, $B(-2; 4)$, $C(0; -3)$ et $T(-1; -1)$.

Lequel est sur un axe ?

Lesquels sont à gauche de l'axe des ordonnées ?

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Applique la méthode : pars de l'origine, l'abscisse d'abord.
Indice 2
Regarde le signe de chaque abscisse.
Indice 3
Point délicat : regarde quelle coordonnée vaut 0, et ce que cela dit de la position du point.

Réponse
Le point $C(0; -3)$ a pour abscisse 0 : il est sur l'axe des ordonnées. Les points B et T ont une abscisse négative : ils sont à gauche de l'axe des ordonnées. Le point A est à droite, au-dessus de l'axe des abscisses.

Coordonnées d'un vecteur

Un déplacement, deux nombres

Rappel du chapitre sur la translation : la translation qui transforme A en B est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. Elle fait glisser chaque point dans la même direction, dans le même sens et de la même longueur. Dans un repère, ce glissement se décrit par deux nombres.

Devine : Le trajet du robot

Un robot part de $A(1; 2)$ et arrive en $B(4; 7)$ en ligne droite. De combien d'unités s'est-il déplacé vers la droite, puis vers le haut ?

A. De 5 vers la droite, puis de 3 vers le haut.
Faux.
Tu as échangé les deux nombres : l'abscisse passe de 1 à 4.

B. De 4 vers la droite, puis de 7 vers le haut.
Faux.
Ce sont les coordonnées de B : le robot n'est pas parti de l'origine.

C. De -3 vers la droite, puis de -5 vers le haut.
Faux.
Tu as calculé départ moins arrivée : c'est le trajet retour.

D. De 3 vers la droite, puis de 5 vers le haut.
Juste.

Juste : $4-1=3$ et $7-2=5$.

Correction

L'abscisse passe de 1 à 4 : $4-1=3$. L'ordonnée passe de 2 à 7 : $7-2=5$.

Le robot s'est déplacé de 3 unités vers la droite et de 5 unités vers le haut. Ces deux nombres sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Coordonnées d'un vecteur

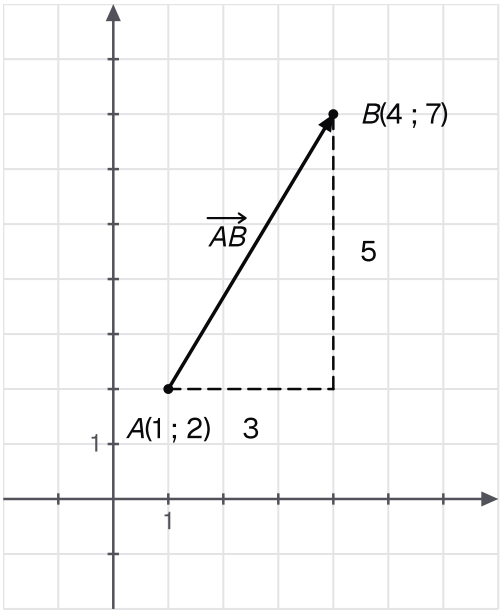
Définition : Coordonnées d'un vecteur

Le plan est muni d'un repère. Soit $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points.

Les **coordonnées du vecteur** $\overrightarrow{AB}$ sont les deux nombres x_B-x_A et y_B-y_A. On écrit :

$$\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A).$$

Le premier nombre est l'**abscisse** du vecteur, le second son **ordonnée**. On les calcule toujours « arrivée moins départ ».



Le trajet du robot de A à B se décompose en 3 unités vers la droite, puis 5 unités vers le haut.

Exemple : calculer les coordonnées d'un vecteur

Soit $E(-2;3)$ et $F(1;-1)$. D'après la définition des coordonnées d'un vecteur, on calcule « arrivée moins départ » :

- abscisse de $\overrightarrow{EF}$: $1-(-2)=3$;

- ordonnée de $\overrightarrow{EF}$: $-1-3=-4$.

Donc :

$$\overrightarrow{EF}(3;-4)$$

Le vecteur $\overrightarrow{OE}$ a les mêmes coordonnées que le point E : $\overrightarrow{OE}(-2;3)$.

Attention : arrivée moins départ

✗ « Pour $P(2;5)$ et $Q(-1;3)$, on a $\overrightarrow{PQ}(2-(-1);5-3)$, soit $\overrightarrow{PQ}(3;2)$. »

✓ Le départ est P, l'arrivée est Q. On calcule $-1-2=-3$ et $3-5=-2$, donc :

$$\overrightarrow{PQ}(-3;-2)$$

Le calcul faux donne les coordonnées de $\overrightarrow{QP}$, le vecteur du trajet retour.

Vecteurs égaux

Devine : Deux robots, un même glissement

Un premier robot part de $A(1;1)$ et arrive en $B(4;3)$. Un second robot part de $C(2;0)$ et fait exactement le même glissement. Il arrive au point D.

Quelles sont les coordonnées de D ?

A. $D(3;2)$
Faux.
Ce sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$: il faut partir de C.

B. $D(4;3)$
Faux.
C'est l'arrivée du premier robot : le second part d'un autre point.

C. $D(5;2)$
Juste.
Juste : $2+3=5$ et $0+2=2$.

D. $D(6;3)$
Faux.
Tu as ajouté les coordonnées de B à celles de C.

Correction
Le premier robot avance de $4-1=3$ vers la droite et de $3-1=2$ vers le haut. Le second fait le même glissement : il arrive en $D(2+3;0+2)$, soit $D(5;2)$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ décrivent le même glissement. Ils ont les mêmes coordonnées, $(3;2)$.

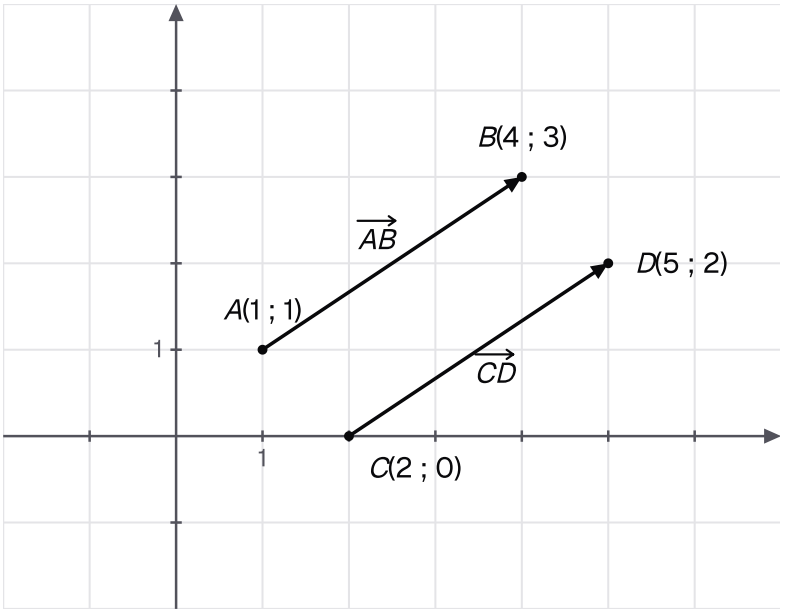
Propriété : Vecteurs égaux et coordonnées

Le plan est muni d'un repère. Soit $\overrightarrow{u}(x;y)$ et $\overrightarrow{v}(x';y')$ deux vecteurs.

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont **égaux** si, et seulement si, ils ont les **mêmes coordonnées** : $x = x'$ et $y = y'$.

Remarque : un résultat admis

Ce résultat est admis. Deux vecteurs égaux décrivent le même glissement. Dans un repère, ce glissement correspond aux deux mêmes nombres.



Les deux robots font le même glissement : les flèches de A vers B et de C vers D ont même direction, même sens et même longueur.

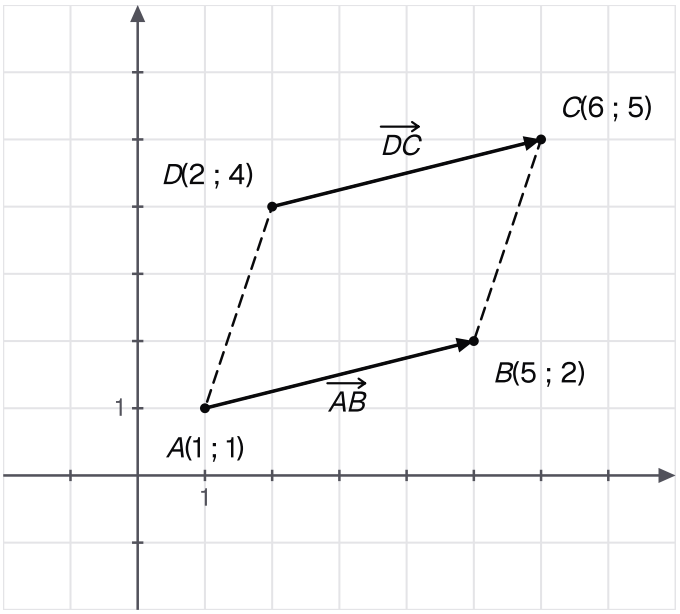
Exemple : le quatrième sommet d'un parallélogramme

Rappel du chapitre sur la translation : $ABCD$ est un parallélogramme si, et seulement si, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Soit $A(1;1)$, $B(5;2)$ et $C(6;5)$. On cherche le point $D(x;y)$.

- On calcule $\overrightarrow{AB}(5-1;2-1)$, soit $\overrightarrow{AB}(4;1)$.
- On écrit aussi $\overrightarrow{DC}(6-x;5-y)$.
- D'après la propriété des vecteurs égaux, $6-x=4$ et $5-y=1$.
- On résout : $x=2$ et $y=4$.

Donc $D(2;4)$.

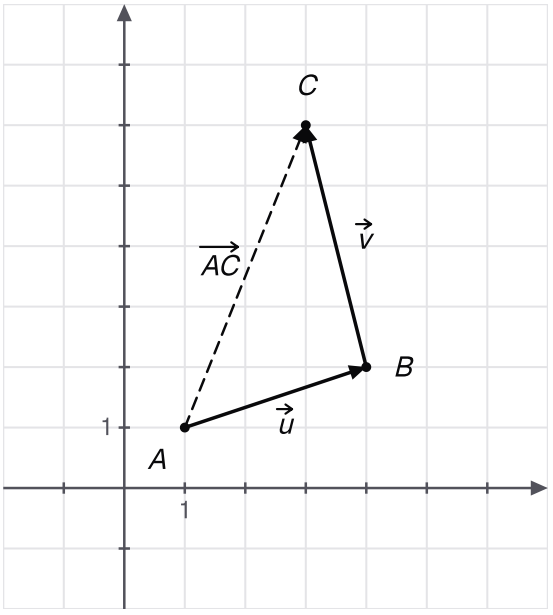


Le sommet D est obtenu en reportant depuis C, en sens inverse, le glissement de A vers B : on retrouve D(2 ; 4).

Somme de deux vecteurs

En clair. Le robot fait un premier déplacement $\overrightarrow{u}(3;1)$, puis un second $\overrightarrow{v}(-1;4)$. Au total, il avance de $3+(-1)=2$ vers la droite et de $1+4=5$ vers le haut.

Pourquoi est-ce vrai ? On place les deux vecteurs bout à bout. La relation de Chasles les remplace par un seul vecteur.



Mis bout à bout, les déplacements u et v font aller de A en C : le vecteur AC est leur somme.

Propriété : Coordonnées de la somme de deux vecteurs

Le plan est muni d'un repère. Si $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$, alors le vecteur somme $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées :

$$\vec{u}+\vec{v}\,(x+x';y+y').$$

On additionne les abscisses entre elles et les ordonnées entre elles.

Démonstration

Étape 1. On place les deux vecteurs bout à bout. On choisit un point A, puis le point B tel que $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, puis le point C tel que $\overrightarrow{BC}=\vec{v}$. D'après la relation de Chasles, $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

Étape 2. D'après la définition des coordonnées d'un vecteur et la propriété des vecteurs égaux, $x=x_B-x_A$ et $x'=x_C-x_B$.

Étape 3. Donc $x+x'=(x_B-x_A)+(x_C-x_B)=x_C-x_A$: c'est l'abscisse de $\overrightarrow{AC}$. Le même calcul avec les ordonnées donne $y+y'=y_C-y_A$. Le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ a donc pour coordonnées $(x+x';y+y')$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve place les vecteurs **bout à bout** : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{BC}$. La relation de Chasles donne un seul vecteur, $\overrightarrow{AC}$. Dans la somme des abscisses, x_B est ajouté puis retranché : il disparaît.

Vérifie : La relation clé

Dans la preuve, quelle égalité remplace la somme $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ par un seul vecteur ?

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

Juste.

Juste : c'est la relation de Chasles, vue au chapitre sur la translation.

B. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA}$

Faux.

Le vecteur $\overrightarrow{CA}$ va de C vers A : c'est le trajet retour.

C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}$

Faux.

Aller de A à B, puis de B à C, mène en C, pas en A.

D. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$

Faux.

Dans la relation de Chasles, le second vecteur part de l'arrivée du premier.

Correction

La preuve remplace la somme par un seul vecteur, d'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\\&=\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

Elle calcule ensuite l'abscisse :

$$\begin{aligned}&(x_B-x_A)+(x_C-x_B)\\&=x_C-x_A\end{aligned}$$

C'est l'abscisse de $\overrightarrow{AC}$.

Exemple : additionner deux vecteurs

Soit $\overrightarrow{u}(2;-3)$ et $\overrightarrow{v}(-5;1)$. D'après la propriété de la somme de deux vecteurs :

- abscisse : $2+(-5)=-3$;
- ordonnée : $-3+1=-2$.

Donc :

$$\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\,(-3;-2)$$

Contrôle avec le robot : 2 unités vers la droite, puis 5 vers la gauche, cela fait 3 vers la gauche.

La méthode, puis à toi

Méthode : coordonnées d'un vecteur, d'une somme ; vecteurs égaux

1. **Repère** le point de départ et le point d'arrivée du vecteur.
2. **Calcule** l'abscisse, arrivée moins départ ; fais de même pour l'ordonnée.
3. **Additionne** deux vecteurs abscisse avec abscisse, ordonnée avec ordonnée.
4. **Traduis** une égalité de vecteurs par deux équations, une pour les abscisses et une pour les ordonnées.
5. **Résous** chacune de ces deux équations du premier degré.

À toi : Chasles avec des coordonnées

Soit $A(-1;2)$, $B(3;0)$ et $C(2;5)$.

Calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, de $\overrightarrow{BC}$, puis de $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.

Compare avec les coordonnées de $\overrightarrow{AC}$.

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Applique la méthode : arrivée moins départ, pour chaque vecteur.
Indice 2
Pour l'abscisse de $\overrightarrow{AB}$, calcule $3-(-1)$.
Indice 3
Point délicat : soustraire un nombre négatif revient à ajouter son opposé, donc $3-(-1)=4$.

Réponse
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$. D'après la définition, on calcule « arrivée moins départ » :

- $\overrightarrow{AB}(3-(-1);0-2)$, soit $\overrightarrow{AB}(4;-2)$;
- $\overrightarrow{BC}(2-3;5-0)$, soit $\overrightarrow{BC}(-1;5)$.

La somme. D'après la propriété de la somme, on ajoute $4+(-1)=3$ et $-2+5=3$:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\,(3;3)$$

La comparaison. De même, $\overrightarrow{AC}(2-(-1);5-2)$, soit $\overrightarrow{AC}(3;3)$.

Conclusion. La somme $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ et le vecteur $\overrightarrow{AC}$ ont les mêmes coordonnées : on retrouve la relation de Chasles.

Coordonnées du milieu

Se retrouver à mi-chemin

Devine : À mi-chemin

Sur le plan de la ville, Yassine habite en $A(1;2)$ et Lina en $B(7;6)$. Ils se retrouvent au milieu M du segment $[AB]$. Quelles sont les coordonnées de M ?

A. $M(3;2)$
Faux.
Ce sont les moitiés des écarts, 6 et 4 : il faut encore partir de A.

B. $M(4;4)$
Juste.
Juste : à mi-chemin, on a fait la moitié du trajet.

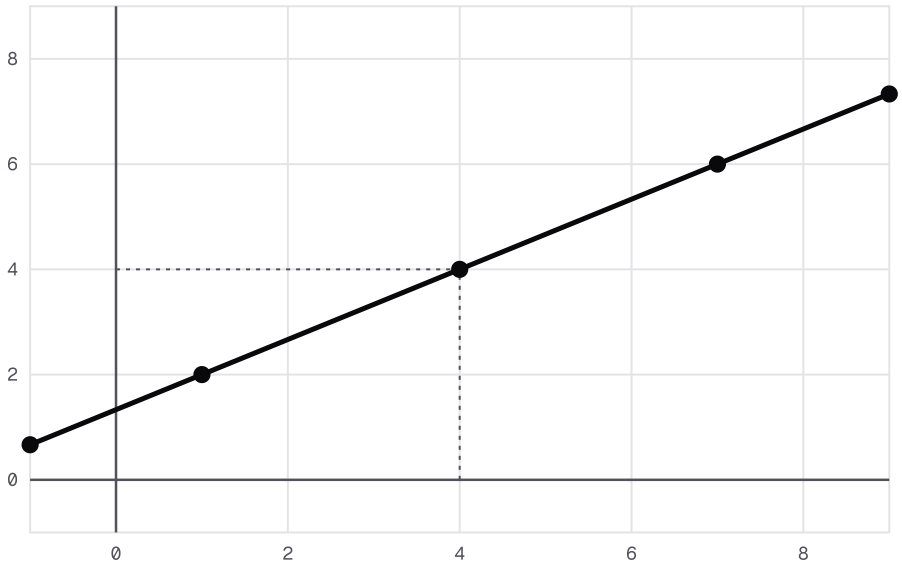
C. $M(8;8)$
Faux.
Ce sont les sommes des coordonnées : il faut encore diviser par 2.

D. $M(6;4)$
Faux.
Ce sont les écarts entre les coordonnées, pas un point du trajet.

Correction

De A à B, on avance de $7-1=6$ vers la droite et de $6-2=4$ vers le haut. À mi-chemin, on a fait la moitié : 3 et 2.

On arrive en $M(1+3;2+2)$, soit $M(4;4)$. Remarque : 4 est la moyenne de 1 et 7, et aussi celle de 2 et 6.



Le segment [AB] et son milieu M, sur la droite (AB)

La formule du milieu

Pourquoi est-ce vrai ? Rappel du chapitre sur la translation : M est le milieu de $[AB]$ si, et seulement si, $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$. Deux vecteurs égaux ont les mêmes coordonnées. Il reste à résoudre une équation du premier degré.

Propriété : Coordonnées du milieu d'un segment

Le plan est muni d'un repère. Soit $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points. Le milieu M du segment $[AB]$ a pour coordonnées :

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2} \quad \text{et} \quad y_M=\frac{y_A+y_B}{2}.$$

L'abscisse du milieu est la moyenne des abscisses ; son ordonnée est la moyenne des ordonnées.

Démonstration

Étape 1. Le point M est le milieu du segment $[AB]$. D'après le chapitre sur la translation, on a donc $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$.

Étape 2. D'après la propriété des vecteurs égaux, ces deux vecteurs ont la même abscisse : $x_M - x_A = x_B - x_M$.

Étape 3. On ajoute $x_M + x_A$ aux deux membres : $2x_M = x_A + x_B$. On divise par 2 : $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$.

Étape 4. Le même calcul avec les ordonnées donne $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve traduit **le milieu par une égalité de vecteurs** : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$. L'égalité des abscisses donne l'équation $x_M - x_A = x_B - x_M$.

On la résout : $2x_M = x_A + x_B$, puis on divise par 2. Les ordonnées se traitent de la même façon.

Vérifie : L'équation de la preuve

Dans la preuve, quelle équation donne l'abscisse x_M du milieu ?

A. $x_M - x_A = x_M - x_B$

Faux.
Le vecteur $\overrightarrow{MB}$ va de M vers B : son abscisse est $x_B - x_M$.

B. $x_M + x_A = x_B + x_M$

Faux.
Les coordonnées d'un vecteur sont des différences, arrivée moins départ.

C. $x_M - x_A = x_B - x_M$

Juste.
Juste : ce sont les abscisses de $\overrightarrow{AM}$ et de $\overrightarrow{MB}$.

D. $x_A - x_M = x_B - x_M$

Faux.
L'abscisse de $\overrightarrow{AM}$ est $x_M - x_A$: arrivée moins départ.

Correction
D'après la propriété des vecteurs égaux, $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{MB}$ ont la même abscisse : $x_M - x_A = x_B - x_M$.
On ajoute $x_M + x_A$ aux deux membres : $2x_M = x_A + x_B$. On divise par 2.

Exemple : calculer un milieu

Soit $E(-3;4)$ et $F(5;-2)$. D'après la formule du milieu, le milieu K de $[EF]$ a pour coordonnées :

$$x_K = \frac{-3+5}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$y_K = \frac{4+(-2)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Donc $K(1;1)$.

Une extrémité, un parallélogramme

Exemple : retrouver une extrémité

Le point $M(2;-1)$ est le milieu de $[AB]$, avec $A(5;3)$. On cherche B.

Abscisse. D'après la formule du milieu, $\dfrac{5+x_B}{2}=2$. On multiplie par 2 : $5+x_B=4$, donc $x_B=-1$.

Ordonnée. De même, $\dfrac{3+y_B}{2}=-1$ donne $3+y_B=-2$, donc $y_B=-5$.

Contrôle. $\dfrac{5+(-1)}{2}=2$ et $\dfrac{3+(-5)}{2}=-1$.

Donc $B(-1;-5)$.

Exemple : le quatrième sommet par les diagonales

Rappel de 1re année : un quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme si, et seulement si, ses diagonales $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu.

Soit $A(-1;1)$, $B(3;0)$ et $C(5;3)$. On cherche D pour que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Milieu de la diagonale connue. D'après la formule du milieu, le milieu de $[AC]$ est $\left(\dfrac{-1+5}{2};\dfrac{1+3}{2}\right)$, soit $(2;2)$.

L'autre diagonale. C'est aussi le milieu de $[BD]$: $\dfrac{3+x_D}{2}=2$ et $\dfrac{0+y_D}{2}=2$. On multiplie par 2 : $3+x_D=4$ et $0+y_D=4$.

Résolution. On trouve $x_D=1$ et $y_D=4$.

Donc $D(1;4)$.

Méthode : utiliser la formule du milieu

1. **Calcule** l'abscisse du milieu : la somme des deux abscisses, divisée par 2. Fais de même pour l'ordonnée.
2. **Retrouve** une extrémité inconnue : écris la formule avec l'inconnue, puis résous l'équation.
3. **Complète** un parallélogramme : ses deux diagonales ont le même milieu. Calcule ce milieu avec la diagonale connue, puis utilise-le pour l'autre.

Un piège, à toi, le coin examen

Attention : une somme, pas une différence

✗ « Pour $A(-1;6)$ et $B(5;2)$, l'abscisse du milieu vaut $\frac{5-(-1)}{2}=3$. »

✓ La formule du milieu additionne les abscisses : $\frac{-1+5}{2}=2$. Le calcul faux donne la moitié d'un écart, pas une position. Contrôle : 2 est bien entre -1 et 5, à 3 unités de chacun.

À toi : Un milieu, puis une extrémité

Soit $R(-4;3)$ et $S(2;-5)$.

Calcule les coordonnées du milieu T de $[RS]$.

Trouve ensuite le point G tel que S soit le milieu de $[RG]$.

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Applique la formule du milieu à chaque coordonnée.
Indice 2
Pour T, ajoute les abscisses puis divise par 2 ; fais de même avec les ordonnées.
Indice 3
Point délicat : pour G, c'est S le milieu ; écris $\frac{-4+x_G}{2}=2$.

Réponse
Le milieu T. D'après la formule du milieu :

$$x_T=\frac{-4+2}{2}=-1$$

$$y_T=\frac{3+(-5)}{2}=-1$$

Donc $T(-1;-1)$.

Le point G. Le point S est le milieu de $[RG]$. D'après la formule du milieu, $\frac{-4+x_G}{2}=2$, donc $-4+x_G=4$ et $x_G=8$.

De même, $\frac{3+y_G}{2}=-5$, donc $3+y_G=-10$ et $y_G=-13$.

Contrôle. $\frac{-4+8}{2}=2$ et $\frac{3+(-13)}{2}=-5$.

Conclusion. Le milieu de $[RS]$ est $T(-1;-1)$, et le point cherché est $G(8;-13)$.

Remarque : Coin examen : rédiger le calcul d'un milieu

Niveau examen régional. Une question peut demander le milieu I de $[AB]$, avec $A(-2;7)$ et $B(6;1)$.

Une rédaction modèle : « D'après la formule du milieu, $x_I = \dfrac{-2+6}{2} = 2$ et $y_I = \dfrac{7+1}{2} = 4$. Donc $I(2;4)$. »

La propriété est nommée, et chaque calcul est écrit.

Distance de deux points

Une distance sur le terrain

Devine : Le ballon et le joueur

Un terrain de sport est muni d'un repère orthonormé ; l'unité est le mètre. Un ballon est en $A(1;1)$ et un joueur en $B(4;5)$. Quelle distance les sépare ?

A. 7 m

Faux.

Tu as ajouté les écarts 3 et 4 : le joueur ne suit pas le quadrillage.

B. 25 m

Faux.

C'est le carré de la distance : il faut encore prendre la racine carrée.

C. $\sqrt{7}$ m

Faux.

Le théorème de Pythagore ajoute les carrés des côtés, pas les côtés.

D. 5 m

Juste.

Juste : le triangle a pour côtés 3, 4 et 5.

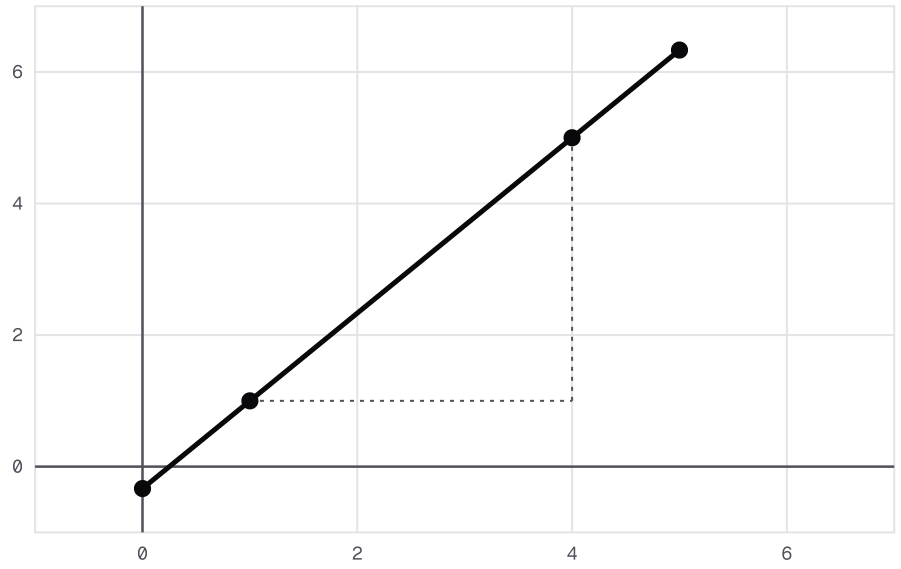
Correction

On ajoute le point $C(4;1)$. Le triangle ABC est rectangle en C, car les axes du repère sont perpendiculaires.

Ses côtés de l'angle droit mesurent $AC = 4 - 1 = 3$ et $BC = 5 - 1 = 4$. D'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} AB^2 &= 3^2 + 4^2 \\ &= 9 + 16 = 25 \end{aligned}$$

Donc $AB = 5$ m.



Le triangle rectangle ABC construit sous le segment [AB]

La formule de la distance

Pourquoi est-ce vrai ? On reprend l'idée du terrain : on construit un triangle rectangle dont $[AB]$ est l'hypoténuse, c'est-à-dire le côté opposé à l'angle droit. Le théorème de Pythagore donne alors AB^2. Le repère doit être orthonormé : l'angle droit et la même unité sur les deux axes sont indispensables.

Propriété : Distance de deux points

Le plan est muni d'un repère **orthonormé**. Soit $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ deux points. La distance AB est :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Démonstration

Étape 1. Cas où $x_A \neq x_B$ et $y_A \neq y_B$. Soit $C(x_B ; y_A)$: A et C ont la même ordonnée, B et C la même abscisse. Donc (AC) et (BC) sont parallèles aux axes. Les axes sont perpendiculaires : ABC est rectangle en C.

Étape 2. (AC) est graduée comme l'axe des abscisses : AC est l'écart entre x_A et x_B. Le repère est orthonormé : (BC) a la même unité, et BC est l'écart entre y_A et y_B. Un nombre et son opposé ont même carré : $AC^2 = (x_B - x_A)^2$. De même, $BC^2 = (y_B - y_A)^2$.

Étape 3. D'après le théorème de Pythagore, $AB^2 = AC^2 + BC^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$. Comme $ABgeq0$, on obtient la formule.

Étape 4. Si $y_A = y_B$, alors $C = B$: l'étape 2 donne $AB^2 = (x_B - x_A)^2$, et $(y_B - y_A)^2 = 0$. De même si $x_A = x_B$. Si $A = B$, les deux membres sont nuls.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve ajoute **un troisième point**, $C(x_B ; y_A)$. Les axes sont perpendiculaires : le triangle ABC est rectangle en C.

Le repère est orthonormé : AC et BC sont les écarts des coordonnées, mesurés avec la même unité. Un nombre et son opposé ont même carré : l'ordre de la soustraction ne compte pas. Le théorème de Pythagore conclut.

Vérifie : Le point ajouté

Dans la preuve, quel point permet d'utiliser le théorème de Pythagore ?

A. Le point C de coordonnées $(x_B ; y_A)$.

Juste.
Juste : (AC) est parallèle à l'axe des abscisses, (BC) à l'axe des ordonnées.

B. Le milieu du segment $[AB]$.

Faux.
Le milieu est sur $[AB]$: il ne forme pas de triangle avec A et B.

C. Le point C de coordonnées $(x_A ; x_B)$.

Faux.
Ce point mélange deux abscisses : il n'est pas au coin du triangle.

D. L'origine O du repère.

Faux.
En général, le triangle OAB n'est pas rectangle.

Correction
La preuve pose : « Soit $C(x_B ; y_A)$. » Les points A et C ont la même ordonnée ; B et C ont la même abscisse.

Les axes sont perpendiculaires, donc le triangle ABC est rectangle en C. D'après le théorème de Pythagore, $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

Un calcul, une hypothèse indispensable

Exemple : une distance avec une racine à simplifier

Le repère est orthonormé. Soit $A(-2 ; 1)$ et $B(4 ; -2)$. D'après la formule de la distance :

- écarts : $4-(-2)=6$ et $-2-1=-3$;
- carrés : $6^2=36$ et $(-3)^2=9$.

On ajoute les carrés, puis on prend la racine carrée :

$$AB=\sqrt{36+9}=\sqrt{45}$$

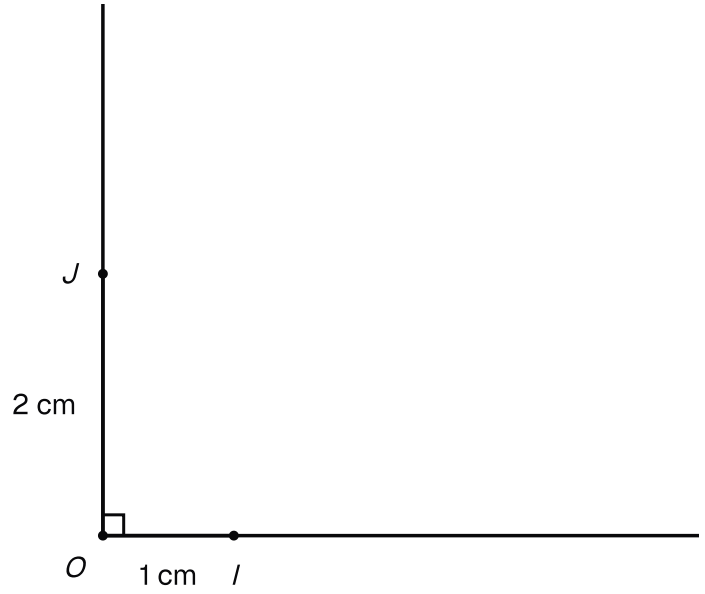
Rappel : $\sqrt{45}=\sqrt{9\times 5}=3\sqrt{5}$. Donc $AB=3\sqrt{5}$.

Exemple : sans repère orthonormé, la formule est fausse

Prends un repère dont les axes sont perpendiculaires, avec $OI=1$ cm mais $OJ=2$ cm. Les deux unités sont différentes : ce repère n'est pas orthonormé.

Pour $O(0;0)$ et $J(0;1)$, la formule donne $OJ=\sqrt{0^2+1^2}=1$, soit 1 cm. Or OJ mesure 2 cm.

Dans un tel repère, la formule de la distance donne un résultat faux. Vérifie donc toujours que le repère est orthonormé.



Axes perpendiculaires mais unités différentes : OI mesure 1 cm et OJ mesure 2 cm, ce repère n'est pas orthonormé.

La nature d'un triangle

Exemple : un triangle isocèle

Le repère est orthonormé. Soit $A(1;2)$, $B(5;4)$ et $C(3;6)$. D'après la formule de la distance :

- $AB^2=4^2+2^2=20$;
- $AC^2=2^2+4^2=20$;

- $BC^2 = (-2)^2 + 2^2 = 8$.

Donc $AB = AC = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$: le triangle ABC est isocèle en A.

Exemple : un triangle rectangle

Le repère est orthonormé. Soit $R(1;0)$, $S(4;1)$ et $T(2;7)$. D'après la formule de la distance :

- $RS^2 = 3^2 + 1^2 = 10$;
- $ST^2 = (-2)^2 + 6^2 = 40$;
- $RT^2 = 1^2 + 7^2 = 50$.

Le plus grand côté est $[RT]$, et $10 + 40 = 50$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle RST est rectangle en S.

Vérifie : Quelle nature ?

Le repère est orthonormé. Soit $U(0;1)$, $V(3;4)$ et $W(7;0)$. On trouve $UV^2 = 18$, $VW^2 = 32$ et $UW^2 = 50$.

Quelle est la nature du triangle UVW ?

A. Il est rectangle en U.

Faux.

L'angle droit est opposé au plus grand côté, $[UW]$: il est en V.

B. Il est rectangle en V.

Juste.

Juste : $18 + 32 = 50$.

C. Il est isocèle en V.

Faux.

Les longueurs UV et VW sont différentes, car $18 \neq 32$.

D. Il n'a rien de particulier.

Faux.

Compare le carré du plus grand côté à la somme des deux autres carrés.

Correction

Le plus grand côté est $[UW]$. On ajoute les carrés des deux autres côtés :

$$\begin{aligned} UV^2 + VW^2 &= 18 + 32 \\ &= 50 = UW^2 \end{aligned}$$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle UVW est rectangle en V.

Méthode : calculer une distance, reconnaître un triangle

1. **Vérifie** que le repère est orthonormé : sinon, la formule ne s'applique pas.
2. **Calcule** les écarts des abscisses et des ordonnées, puis leurs carrés, puis leur somme.
3. **Prends** la racine carrée de cette somme, et simplifie-la quand c'est possible.
4. **Compare** les trois longueurs d'un triangle : deux longueurs égales donnent un triangle isocèle.
5. **Compare** le carré du plus grand côté à la somme des deux autres carrés : s'ils sont égaux, la réciproque du théorème de Pythagore donne un triangle rectangle.

Sur une carte, un piège, à toi

Exemple : un village et un puits sur une carte

Une carte est munie d'un repère orthonormé ; l'unité est le kilomètre. Un village est en $V(-1;-2)$ et un puits en $P(4;10)$.

Les écarts valent $4-(-1)=5$ et $10-(-2)=12$. D'après la formule de la distance :

$$\begin{aligned} VP &= \sqrt{5^2+12^2} \\ &= \sqrt{25+144} \\ &= \sqrt{169} = 13 \end{aligned}$$

Le puits est à 13 km du village, à vol d'oiseau.

Attention : la racine d'une somme ne se découpe pas

✗ « Avec des écarts -6 et 8, on a $AB=\sqrt{36+64}=\sqrt{36}+\sqrt{64}=14$. »

✓ On additionne d'abord sous la racine :

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{36+64} \\ &= \sqrt{100} = 10 \end{aligned}$$

Autre piège : $(-6)^2$ vaut 36, et non -36. Le carré d'un nombre non nul est strictement positif.

À toi : La nature d'un triangle

Le repère est orthonormé. Soit $A(-1;3)$, $B(2;-1)$ et $C(6;2)$.

Calcule AB, BC et AC.

Quelle est la nature du triangle ABC ?

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Applique la méthode : écarts, carrés, somme, racine carrée.

Indice 2

Tu dois trouver $AB^2 = 25$.

Indice 3

Point délicat : deux conclusions sont possibles en même temps ; compare les longueurs, puis les carrés.

Réponse

Les trois longueurs. D'après la formule de la distance, valable dans ce repère orthonormé :

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{3^2 + (-4)^2} \\ &= \sqrt{25} = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{4^2 + 3^2} \\ &= \sqrt{25} = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{7^2 + (-1)^2} \\ &= \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

Isocèle. On a $AB = BC = 5$: le triangle est isocèle en B.

Rectangle. Le plus grand côté est $[AC]$. On ajoute les carrés des deux autres côtés :

$$\begin{aligned} &AB^2 + BC^2 \\ &= 25 + 25 \\ &= 50 = AC^2 \end{aligned}$$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, il est rectangle en B.

Conclusion. Le triangle ABC est rectangle et isocèle en B.

Équation réduite d'une droite

Des points bien rangés

Devine : Le double, moins un

On choisit des points dont l'ordonnée est le double de l'abscisse, diminué de 1 : $P(0;-1)$, $Q(1;1)$, $R(2;3)$ et $S(3;5)$. Que remarques-tu en les plaçant sur ton papier quadrillé ?

A. Ils forment un carré.

Faux.

Place-les : ils montent tous dans la même direction.

B. Ils sont sur l'axe des ordonnées.

Faux.

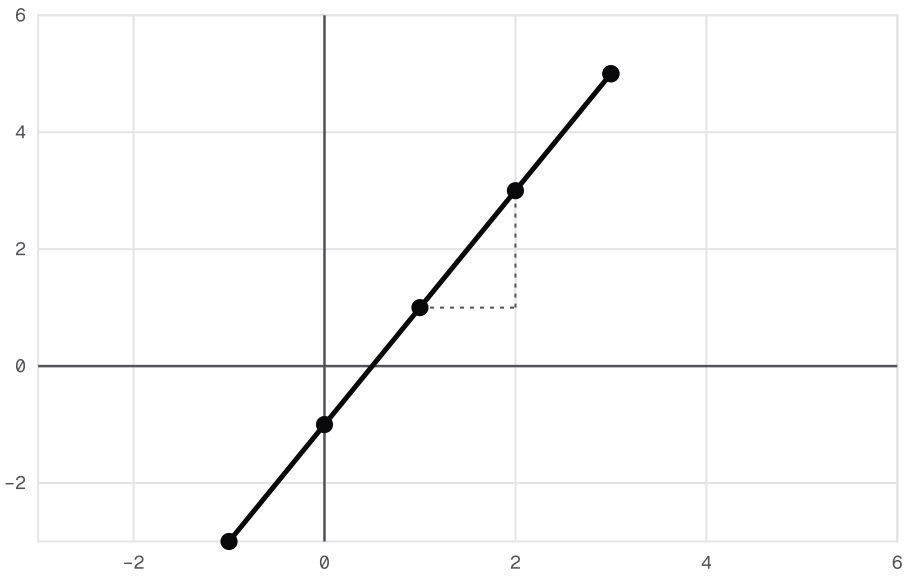
Seul P a pour abscisse 0.

C. Ils semblent alignés.

Juste.
Juste : ils semblent sur une même droite ; le tracé est une lecture approchée.

D. Ils sont à la même distance de l'origine.
Faux.
On a $OQ^2 = 2$, mais $OS^2 = 34$.

Correction
Chaque fois que l'abscisse augmente de 1, l'ordonnée augmente de 2. En les plaçant, tu constates qu'ils semblent alignés, sur une même droite (D). Les coordonnées de chacun vérifient $y = 2x - 1$; par exemple, pour R, $2 \times 2 - 1 = 3$.



La droite (D) d'équation y = 2x - 1 et quatre de ses points

L'équation réduite

Propriété : Équation réduite d'une droite

Le plan est muni d'un repère. Soit (D) une droite **non parallèle à l'axe des ordonnées**.

Il existe deux nombres a et b, uniques, tels que : un point $M(x; y)$ appartient à (D) si, et seulement si, $y = ax + b$.

- L'égalité $y = ax + b$ est l'**équation réduite** de la droite (D). On écrit $(D) : y = ax + b$.
- Le nombre a est le **coefficient directeur** de (D) ; on dit aussi sa **pente**.

- Le nombre b est l'**ordonnée à l'origine** de (D) : la droite coupe l'axe des ordonnées au point $(0;b)$.

Une droite parallèle à l'axe des ordonnées n'a pas d'équation de cette forme : tous ses points ont la même abscisse c, et on écrit $x = c$.

Remarque : un résultat admis

Ce résultat est admis. Tu l'as observé : les points de la droite précédente vérifient tous $y = 2x - 1$. Ici, $a = 2$ et $b = -1$.

Exemple : lire le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine

- (D) : $y = 2x - 1$ a pour coefficient directeur 2 et pour ordonnée à l'origine -1. Elle coupe l'axe des ordonnées au point $(0;-1)$.
- (D') : $y = -3x + 4$ a pour coefficient directeur -3 et pour ordonnée à l'origine 4.
- (D'') : $y = 5$ s'écrit $y = 0 \times x + 5$: son coefficient directeur est 0. Elle est parallèle à l'axe des abscisses.

Vérifie : Lire le coefficient

Quel est le coefficient directeur de la droite (D) : $y = 4 - \frac{1}{2}x$?

A. 4

Faux.
Le nombre 4 est l'ordonnée à l'origine : il ne multiplie pas x.

B. $\frac{1}{2}$

Faux.
Le signe moins devant $\frac{1}{2}x$ fait partie du coefficient.

C. -2

Faux.
C'est l'inverse du coefficient : il ne faut rien inverser.

D. $-\frac{1}{2}$

Juste.
Juste : on réécrit $y = -\frac{1}{2}x + 4$.

Correction

On réécrit l'équation dans l'ordre habituel : $y = -\frac{1}{2}x + 4$. Le coefficient directeur est le nombre qui multiplie x : $a = -\frac{1}{2}$. L'ordonnée à l'origine est $b = 4$.

Le sens de la pente, le tracé

En clair. Quand x augmente de 1, y change de a. Si $a > 0$, la droite monte de gauche à droite ; si $a < 0$, elle descend. Si $a = 0$, elle est parallèle à l'axe des abscisses.

Pour $(D) : y = 2x - 1$, on passe de $Q(1;1)$ à $R(2;3)$: y augmente de 2.

Vérifie : Monter ou descendre

Laquelle de ces droites descend de gauche à droite ?

A. $y = 3x - 5$

Faux.

Son coefficient directeur 3 est positif : elle monte.

B. $y = -2x + 7$

Juste.

Juste : son coefficient directeur -2 est négatif.

C. $y = 4$

Faux.

Son coefficient directeur est nul : elle est parallèle à l'axe des abscisses.

D. $y = \frac{1}{3}x - 2$

Faux.

Son coefficient directeur $\frac{1}{3}$ est positif : elle monte doucement.

Correction

Le sens dépend seulement du signe du coefficient directeur. Pour $y = -2x + 7$, on a $a = -2$, et $-2 < 0$: la droite descend. L'ordonnée à l'origine 7 ne change pas le sens.

Méthode : tracer une droite, tester un point

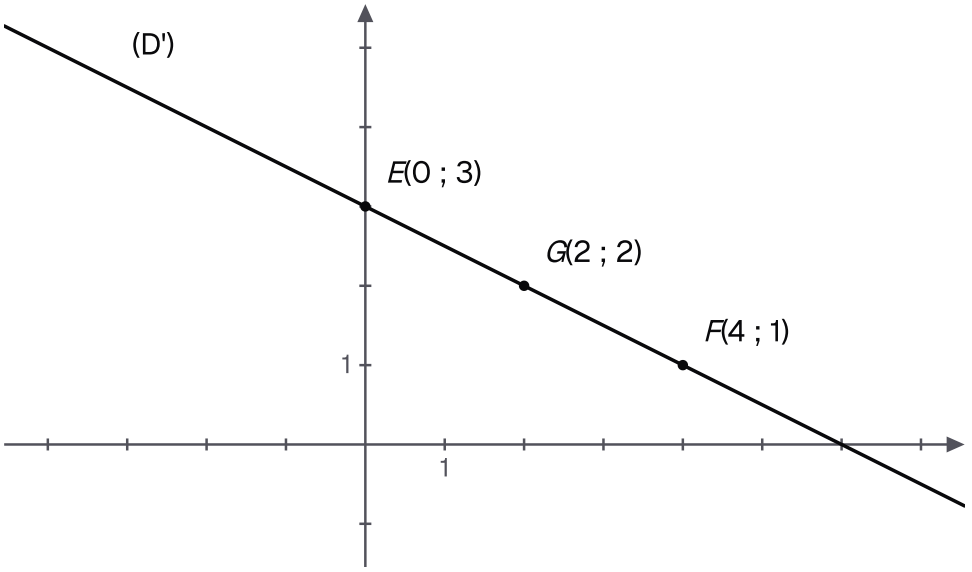
1. **Choisis** deux abscisses simples, par exemple 0 et une autre. Calcule les ordonnées avec l'équation.
2. **Place** les deux points obtenus et trace la droite qui passe par eux. Un troisième point sert de contrôle.
3. **Teste** un point : calcule $ax + b$ avec son abscisse à la place de x. Si tu obtiens son ordonnée, le point est sur la droite ; sinon, il n'y est pas.

Exemple : tracer une droite

Traçons (D') : $y = -\dfrac{1}{2}x + 3$.

- Pour $x = 0$: $y = 3$. On place $(0; 3)$.
- Pour $x = 4$: $y = -\dfrac{1}{2} \times 4 + 3 = 1$. On place $(4; 1)$.
- Contrôle avec $x = 2$: $y = -1 + 3 = 2$. Le point $(2; 2)$ est bien sur le tracé.

On choisit des abscisses paires pour éviter les fractions.



La droite (D') passe par les deux points calculés, nommés ici E et F ; le point de contrôle G confirme le tracé.

Un point est-il sur la droite ?

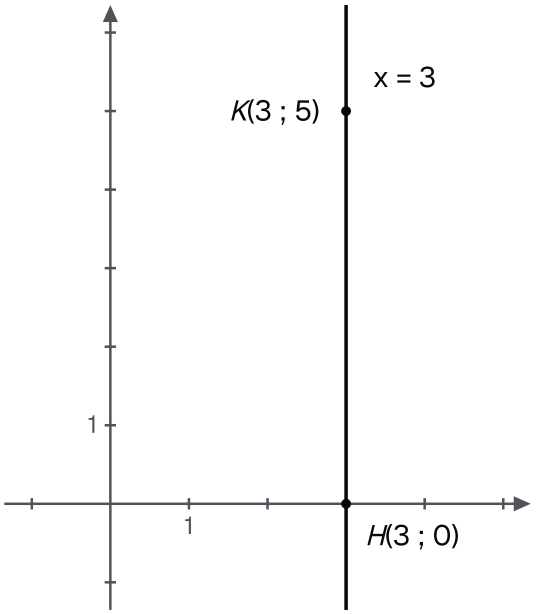
Exemple : tester deux points

Soit (D) : $y = 3x - 2$.

- Pour $A(2; 4)$: $3 \times 2 - 2 = 4$. On trouve l'ordonnée de A : d'après l'équation réduite, A appartient à (D).
- Pour $B(-1; -4)$: $3 \times (-1) - 2 = -5$. Or $-5 \neq -4$: B n'appartient pas à (D).

Remarque : une droite parallèle à l'axe des ordonnées

La droite qui passe par $(3; 0)$ et $(3; 5)$ est parallèle à l'axe des ordonnées. Tous ses points ont l'abscisse 3 : on écrit $x = 3$. Cette droite n'a pas d'équation réduite de la forme $y = ax + b$.



Une droite parallèle à l'axe des ordonnées : tous ses points ont l'abscisse 3, elle a pour équation x = 3.

À toi : Lire et tester

Soit (D) : $y = -2x + 5$.

Donne son coefficient directeur et son ordonnée à l'origine.

Dis si elle monte ou descend.

Les points $E(3; -1)$ et $F(-1; 3)$ appartiennent-ils à (D) ?

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Le coefficient directeur multiplie x ; l'ordonnée à l'origine est le nombre seul.
Indice 2
Pour tester E, calcule $-2 \times 3 + 5$.
Indice 3
Point délicat : pour F, le produit $-2 \times (-1)$ vaut 2, puis on ajoute 5.

Réponse
Le coefficient directeur est $a = -2$ et l'ordonnée à l'origine est $b = 5$. Comme $a < 0$, la droite descend.

Pour E : $-2 \times 3 + 5 = -1$, c'est l'ordonnée de E. Donc E appartient à (D).

Pour F : $-2 \times (-1) + 5 = 7$. Or $7 \neq 3$: F n'appartient pas à (D).

Déterminer l'équation réduite

Deux points suffisent

Devine : La pente entre deux points

Une droite passe par $A(1;3)$ et $B(3;7)$. De A à B, l'abscisse augmente de 2. De combien l'ordonnée augmente-t-elle, et quel est le coefficient directeur ?

A. De 4 ; le coefficient directeur vaut 2.

Juste.

Juste : 4 divisé par 2 donne 2.

B. De 4 ; le coefficient directeur vaut 4.

Faux.

L'ordonnée augmente de 4 pour 2 unités, pas pour 1.

C. De 4 ; le coefficient directeur vaut $\frac{1}{2}$.

Faux.

Tu as divisé l'écart des abscisses par celui des ordonnées.

D. De 7 ; le coefficient directeur vaut 7.

Faux.

Le nombre 7 est l'ordonnée de B, pas un écart.

Correction

L'ordonnée passe de 3 à 7 : elle augmente de $7-3=4$. Pour 1 unité vers la droite, elle augmente donc de $\frac{4}{2}=2$. Le coefficient directeur vaut 2.

Puis $3=2\times 1+b$ donne $b=1$: la droite a pour équation $y=2x+1$.

Pourquoi est-ce vrai ? Les deux points sont sur la droite : leurs coordonnées vérifient l'équation réduite. On écrit ces deux égalités, puis on les soustrait. Le nombre b disparaît, et il reste a.

Le coefficient directeur par le calcul

Propriété : Coefficient directeur à partir de deux points

Le plan est muni d'un repère. Soit (D) : $y=ax+b$ une droite, et $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ deux points **distincts** de (D). Alors $x_A\neq x_B$ et :

$$a=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}\quad\text{puis}\quad b=y_A-a\,x_A.$$

Démonstration

Étape 1. Les points A et B appartiennent à (D). D'après l'équation réduite, $y_A=ax_A+b$ et $y_B=ax_B+b$.

Étape 2. On soustrait membre à membre : $y_B-y_A=ax_B-ax_A=a(x_B-x_A)$, par distributivité.

Étape 3. Si on avait $x_A = x_B$, l'étape 2 donnerait $y_B - y_A = 0$: les points A et B auraient les mêmes coordonnées, donc seraient confondus, d'après la définition des coordonnées. C'est impossible, car ils sont distincts. Donc $x_B - x_A \neq 0$, et on peut diviser : $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Étape 4. L'égalité $y_A = ax_A + b$ de l'étape 1 donne $b = y_A - a\,x_A$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve écrit **deux égalités**, une pour chaque point : $y_A = ax_A + b$ et $y_B = ax_B + b$.

Elle les **soustrait membre à membre** : on soustrait les deux membres de gauche entre eux, puis les deux membres de droite. Le nombre b disparaît.

La distributivité, $k \times c - k \times d = k(c - d)$, donne $a(x_B - x_A)$. On divise par $x_B - x_A$, qui n'est pas nul : sinon, les deux points seraient confondus.

Vérifie : Faire disparaître l'ordonnée à l'origine

Dans la preuve, comment le nombre b disparaît-il ?

A. On additionne les deux égalités membre à membre.

Faux.

La somme donne $2b$: le nombre b reste.

B. On remplace b par 0 dans les deux égalités.

Faux.

Le nombre b n'est pas nul en général.

C. On soustrait les deux égalités membre à membre.

Juste.

Juste : $b - b = 0$.

D. On divise une égalité par l'autre.

Faux.

Le quotient ne fait pas disparaître b.

Correction

La preuve soustrait membre à membre : $y_B - y_A = ax_B - ax_A = a(x_B - x_A)$. Le nombre b disparaît, car $b - b = 0$. Il reste à diviser par $x_B - x_A$, qui n'est pas nul.

Exemple : l'équation d'une droite par deux points

Soit $A(-1; 4)$ et $B(3; -4)$. Leurs abscisses sont différentes.

Coefficient directeur. D'après la formule du coefficient directeur :

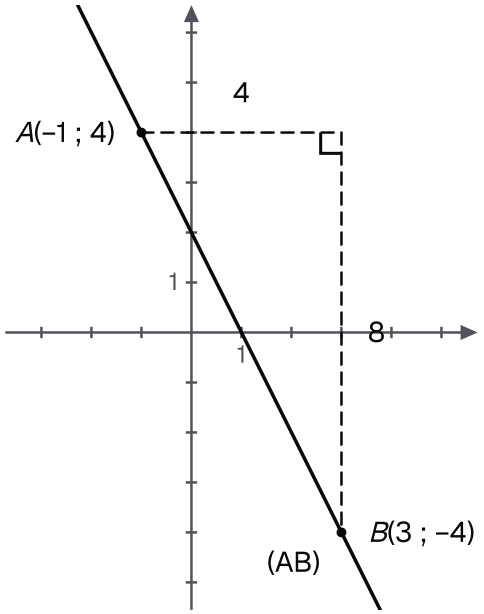
$$a = \frac{-4-4}{3-(-1)} = \frac{-8}{4} = -2$$

Ordonnée à l'origine. D'après la formule de l'ordonnée à l'origine :

$$\begin{aligned} b &= 4 - (-2) \times (-1) \\ &= 4 - 2 = 2 \end{aligned}$$

Contrôle. Avec B : $-2 \times 3 + 2 = -4$, c'est bien l'ordonnée de B.

Donc (AB) : $y = -2x + 2$.



De A à B, on avance de 4 et on descend de 8 : le coefficient directeur de (AB) vaut -8 divisé par 4, soit -2.

La méthode, avec un point et un coefficient

Méthode : déterminer l'équation réduite d'une droite

1. **Calcule** le coefficient directeur avec deux points d'abscisses différentes : $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$. S'il est donné, passe à l'étape suivante.
2. **Remplace** x et y par les coordonnées d'un point connu dans $y = ax + b$. Résous l'équation obtenue : tu trouves b.
3. **Contrôle** avec un autre point de la droite, s'il y en a un.
4. **Conclus** en écrivant l'équation réduite complète.

Exemple : un point et le coefficient directeur

On cherche la droite de coefficient directeur 3 qui passe par $C(2;1)$.

- Son équation est de la forme $y = 3x + b$.
- Le point C est sur la droite : $1 = 3 \times 2 + b$, soit $1 = 6 + b$.
- On résout : $b = 1 - 6 = -5$.

Donc la droite a pour équation $y = 3x - 5$. Contrôle : $3 \times 2 - 5 = 1$.

Attention : le même ordre en haut et en bas

✗ « Pour $A(2;1)$ et $B(5;7)$, on a $a = \dfrac{5-2}{7-1} = \dfrac{1}{2}$. »

✓ Les ordonnées vont en haut, les abscisses en bas : $a = \dfrac{7-1}{5-2} = \dfrac{6}{3} = 2$. Garde aussi le même ordre : $\dfrac{7-1}{2-5}$ donnerait -2, un résultat faux.

Trois points alignés, à toi, le coin examen

Exemple : trois points alignés ?

Soit $A(1;4)$, $B(3;0)$ et $C(4;-2)$. On détermine (AB), puis on teste C.

La droite (AB). On calcule $a = \dfrac{0-4}{3-1} = -2$, puis $b = 4 - (-2) \times 1 = 6$. Donc :

$$(AB) : y = -2x + 6$$

Le point C. On calcule $-2 \times 4 + 6 = -2$: c'est l'ordonnée de C. Le point C est sur (AB), donc les trois points sont alignés.

Un autre point. Avec $E(-1;7)$, on trouve $-2 \times (-1) + 6 = 8$, et $8 \neq 7$: les points A, B et E ne sont pas alignés.

Vérifie : Alignés ou non ?

Soit $A(0;2)$, $B(2;3)$ et $C(6;5)$. La droite (AB) a pour équation $y = \dfrac{1}{2}x + 2$. Les trois points sont-ils alignés ?

A. Non : C n'est pas sur (AB).

Faux.

Calcule $\dfrac{1}{2} \times 6 + 2$: tu trouves l'ordonnée de C.

B. Oui, car leurs abscisses sont paires.

Faux.

La parité des abscisses ne dit rien de l'alignement.

C. On ne peut pas le savoir sans figure.

Faux.

Le calcul suffit : on teste C dans l'équation de (AB).

D. Oui : C vérifie l'équation de (AB).

Juste.

Juste : $\frac{1}{2} \times 6 + 2 = 5$.

Correction

On teste C : $\frac{1}{2} \times 6 + 2 = 3 + 2 = 5$, c'est l'ordonnée de C. Donc C appartient à (AB), et les points A, B, C sont alignés. Contrôle de l'équation avec B : $\frac{1}{2} \times 2 + 2 = 3$.

À toi : L'équation d'une allée

Dans un jardin muni d'un repère, une allée droite passe par les piquets $E(-2;-3)$ et $F(4;6)$.

Détermine l'équation réduite de la droite (EF).

Le piquet $G(2;3)$ est-il sur l'allée ?

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Applique la méthode : le coefficient directeur d'abord, puis l'ordonnée à l'origine.

Indice 2

Pour le coefficient directeur, tu dois trouver une fraction qui se simplifie.

Indice 3

Point délicat : pour calculer b avec le point E, attention aux deux signes moins.

Réponse

Coefficient directeur. D'après la formule du coefficient directeur :

$$a = \frac{6-(-3)}{4-(-2)} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

Ordonnée à l'origine. On utilise le point E :

$$\begin{aligned} b &= -3 - \frac{3}{2} \times (-2) \\ &= -3 + 3 = 0 \end{aligned}$$

Contrôle. Avec F : $\frac{3}{2} \times 4 = 6$. Donc (EF) : $y = \frac{3}{2}x$.

Le piquet G. On calcule $\frac{3}{2} \times 2 = 3$: c'est l'ordonnée de G.

Conclusion. L'allée a pour équation $y = \frac{3}{2}x$, et le piquet G est sur l'allée.

Remarque : Coin examen : rédiger la recherche d'une équation réduite

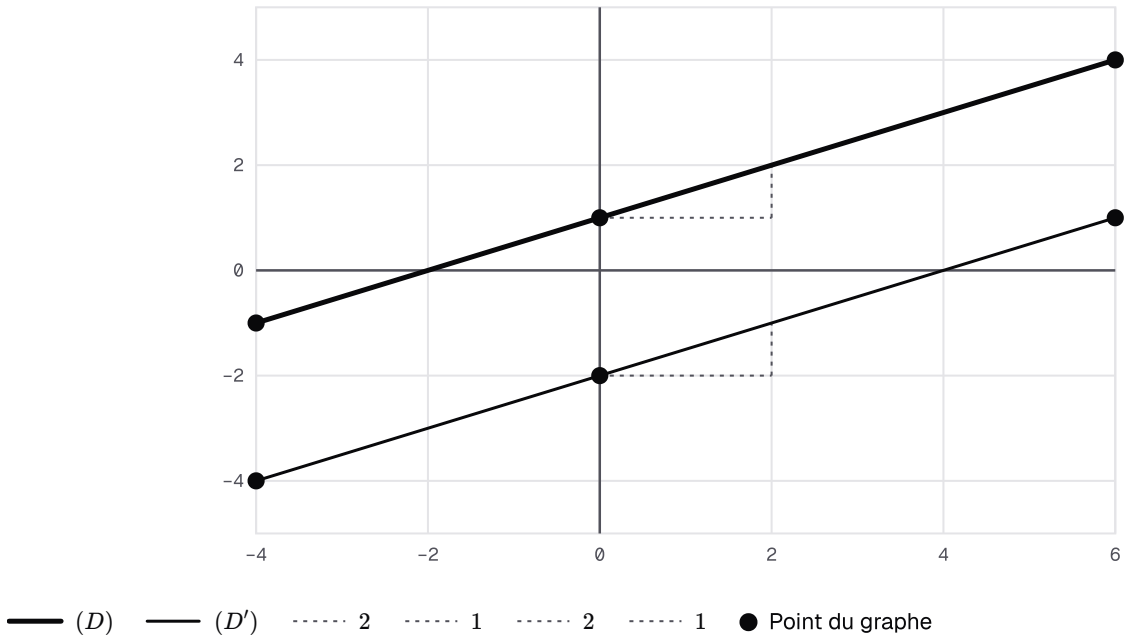
Niveau examen régional. Une question peut demander l'équation réduite de (AB), avec $A(1;-1)$ et $B(3;5)$.

Une rédaction modèle : « D'après la formule du coefficient directeur, $a = \dfrac{5-(-1)}{3-1} = \dfrac{6}{2} = 3$. Le point A appartient à (AB), donc $-1 = 3 \times 1 + b$, d'où $b = -4$. Contrôle avec B : $3 \times 3 - 4 = 5$, donc $(AB) : y = 3x - 4$. »

Chaque étape nomme sa raison, et le contrôle termine.

Droites parallèles, droites perpendiculaires

Observer deux droites



Deux droites de même coefficient directeur

Devine : Même inclinaison ?

Sur la figure, $(D) : y = \dfrac{1}{2}x + 1$ et $(D') : y = \dfrac{1}{2}x - 2$. Quand x augmente de 2, de combien y augmente-t-il sur chaque droite ? Que peux-tu prédire ?

A. De 1 et de 2 : elles se coupent.

Faux.

Sur chaque droite, $\dfrac{1}{2} \times 2 = 1$: l'augmentation est la même.

B. De 1 sur chacune : elles sont parallèles.

Juste.

Juste : elles ont la même inclinaison.

C. De 1 sur chacune : elles sont confondues.

Faux.

Leurs ordonnées à l'origine, 1 et -2, sont différentes.

D. De 2 sur chacune : elles sont perpendiculaires.

Faux.

Quand x augmente de 2, y augmente de $\frac{1}{2} \times 2 = 1$.

Correction

Sur chaque droite, y augmente de $\frac{1}{2} \times 2 = 1$ quand x augmente de 2. Les deux droites ont la même inclinaison : elles sont parallèles. Elles ne sont pas confondues, car elles coupent l'axe des ordonnées en deux points différents.

Droites parallèles

Propriété : Droites parallèles et coefficients directeurs

Le plan est muni d'un repère. Soit $(D) : y = ax + b$ et $(D') : y = a'x + b'$ deux droites.

Les droites (D) et (D') sont **parallèles** si, et seulement si, elles ont le **même coefficient directeur** : $a = a'$.

Si, de plus, $b = b'$, les deux droites sont confondues.

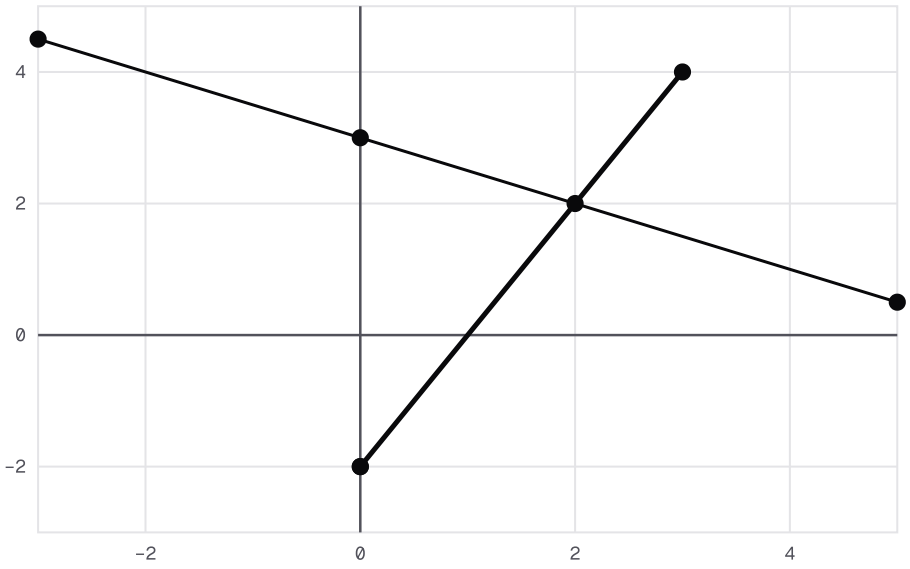
Remarque : un résultat admis

Ce résultat est admis. La figure le montre sur un exemple : même coefficient directeur, même inclinaison.

Exemple : reconnaître des droites parallèles

- $(D) : y = 3x - 2$ et $(D') : y = 3x + 5$ ont le même coefficient directeur, 3. D'après la propriété des droites parallèles, elles sont parallèles. Leurs ordonnées à l'origine diffèrent : elles ne sont pas confondues.
- $(D'') : y = -3x + 1$ a pour coefficient directeur -3. Comme $-3 \neq 3$, elle n'est pas parallèle à (D) : elle la coupe.

Droites perpendiculaires



Deux droites perpendiculaires qui se coupent au point K

En clair. Sur la figure, les droites $(D) : y = 2x - 2$ et $(D') : y = -\frac{1}{2}x + 3$ semblent perpendiculaires ; c'est une lecture approchée. Leurs coefficients directeurs sont 2 et $-\frac{1}{2}$. Leur produit vaut $2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$.

Propriété : Droites perpendiculaires et coefficients directeurs

Le plan est muni d'un repère **orthonormé**. Soit $(D) : y = ax + b$ et $(D') : y = a'x + b'$ deux droites.

Les droites (D) et (D') sont **perpendiculaires** si, et seulement si, le produit de leurs coefficients directeurs vaut -1 : $a \times a' = -1$.

Remarque : un résultat admis

Ce résultat est admis. Il exige un repère orthonormé. Dans un repère qui ne l'est pas, la condition $a \times a' = -1$ ne garantit pas l'angle droit.

Exemple : vérifier l'angle droit par le calcul

Le repère est orthonormé. Les droites de la figure se coupent en $K(2;2)$: $2 \times 2 - 2 = 2$ et $-\frac{1}{2} \times 2 + 3 = 2$. On prend aussi $P(0;-2)$ sur (D) et $Q(0;3)$ sur (D').

D'après la formule de la distance :

- $KP^2 = (-2)^2 + (-4)^2 = 20$;

- $KQ^2 = (-2)^2 + 1^2 = 5$;
- $PQ^2 = 0^2 + 5^2 = 25$.

On a $20 + 5 = 25$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle KPQ est rectangle en K.

Le calcul confirme la propriété des droites perpendiculaires sur cet exemple. Il ne la démontre pas : elle reste admise.

Par un point donné

Méthode : parallèle ou perpendiculaire passant par un point

1. **Lis** le coefficient directeur a de la droite donnée.
2. **Garde** le même coefficient a pour une parallèle.
3. **Cherche** le nombre a' tel que $a \times a' = -1$ pour une perpendiculaire, dans un repère orthonormé.
4. **Calcule** l'ordonnée à l'origine avec le point donné, puis contrôle.

Exemple : une parallèle et une perpendiculaire

Le repère est orthonormé. Soit $(D) : y = -3x + 1$ et $A(3; 4)$.

Parallèle. D'après la propriété des droites parallèles, elle garde le coefficient -3. Le point A est dessus : $4 = -3 \times 3 + b$, soit $4 = -9 + b$, donc $b = 13$. Elle a pour équation :

$$y = -3x + 13$$

Perpendiculaire. Son coefficient a' vérifie $-3 \times a' = -1$, donc $a' = \dfrac{1}{3}$. Le point A est dessus : $4 = \dfrac{1}{3} \times 3 + b$, soit $4 = 1 + b$, donc $b = 3$. Elle a pour équation :

$$y = \frac{1}{3}x + 3$$

Attention : ni l'opposé, ni l'inverse seul

✗ « La perpendiculaire à $(D) : y = -4x + 2$ a pour coefficient directeur 4. »

✓ On cherche a' tel que $-4 \times a' = -1$: donc $a' = \dfrac{1}{4}$.

L'opposé 4 donne $-4 \times 4 = -16$. L'inverse $-\dfrac{1}{4}$ donne $-4 \times \left(-\dfrac{1}{4}\right) = 1$. Aucun de ces deux produits ne vaut -1.

Reconnaître, à toi, le coin examen

Vérifie : Lesquelles sont perpendiculaires ?

Le repère est orthonormé. Dans quel cas les deux droites sont-elles perpendiculaires ?

A. $y = 4x + 1$ et $y = -4x + 3$

Faux.

Le produit $4 \times (-4) = -16$ ne vaut pas -1.

B. $y = 4x + 1$ et $y = \frac{1}{4}x - 2$

Faux.

Le produit $4 \times \frac{1}{4} = 1$ ne vaut pas -1.

C. $y = 4x + 1$ et $y = -\frac{1}{4}x + 3$

Juste.

Juste : $4 \times \left(-\frac{1}{4}\right) = -1$.

D. $y = 4x + 1$ et $y = 4x - 5$

Faux.

Même coefficient directeur : ces droites sont parallèles.

Correction

D'après la propriété des droites perpendiculaires, on calcule le produit des coefficients directeurs. Seul $4 \times \left(-\frac{1}{4}\right)$ vaut -1. Les droites $y = 4x + 1$ et $y = 4x - 5$ sont parallèles, d'après la propriété des droites parallèles.

À toi : Parallèle et perpendiculaire

Le repère est orthonormé. Soit $(D) : y = \frac{2}{3}x - 1$ et $A(6; 1)$.

Détermine l'équation réduite de la parallèle à (D) passant par A.

Fais de même pour la perpendiculaire à (D) passant par A.

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Applique la méthode : choisis d'abord le coefficient, puis calcule b avec A.

Indice 2

Pour la parallèle, garde le coefficient de (D) et remplace x et y par les coordonnées de A.

Indice 3

Point délicat : le coefficient de la perpendiculaire n'est ni l'opposé, ni l'inverse seul ; cherche a' tel que le produit vaille -1.

Réponse

La parallèle. D'après la propriété des droites parallèles, elle a pour coefficient $\frac{2}{3}$. On écrit $1 = \frac{2}{3} \times 6 + b$, soit $1 = 4 + b$, donc $b = -3$.

La perpendiculaire. D'après la propriété des droites perpendiculaires, $\frac{2}{3} \times a' = -1$, donc $a' = -\frac{3}{2}$. On écrit $1 = -\frac{3}{2} \times 6 + b$, soit $1 = -9 + b$, donc $b = 10$.

Conclusion. La parallèle à (D) passant par A a pour équation :

$$y = \frac{2}{3}x - 3$$

La perpendiculaire à (D) passant par A a pour équation :

$$y = -\frac{3}{2}x + 10$$

Remarque : Coin examen : justifier une perpendicularité

Niveau examen régional. Une question peut demander si $(D) : y = -2x + 3$ et $(D') : y = \frac{1}{2}x - 1$ sont perpendiculaires.

Une rédaction modèle : « Les coefficients directeurs de (D) et (D') sont -2 et $\frac{1}{2}$. Le repère est orthonormé et $-2 \times \frac{1}{2} = -1$. D'après la propriété des droites perpendiculaires, (D) et (D') sont perpendiculaires. »

Le repère orthonormé est cité : sans lui, la propriété ne s'applique pas.

Synthèse : le repère du plan

Rappel de 1re année : sur une droite graduée, chaque point a une abscisse. La distance de deux points est l'écart de leurs abscisses : la plus grande moins la plus petite. Par exemple, les points d'abscisses -2 et 5 sont à la distance $5 - (-2) = 7$.

Rappel de 1re année : un repère du plan est formé de deux droites graduées qui se coupent à l'origine. Un point y est repéré par son abscisse et son ordonnée. Dans ce chapitre, le repère est orthonormé : axes perpendiculaires, même unité.

À retenir : Rappel de ce chapitre : les formules

Pour $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$:

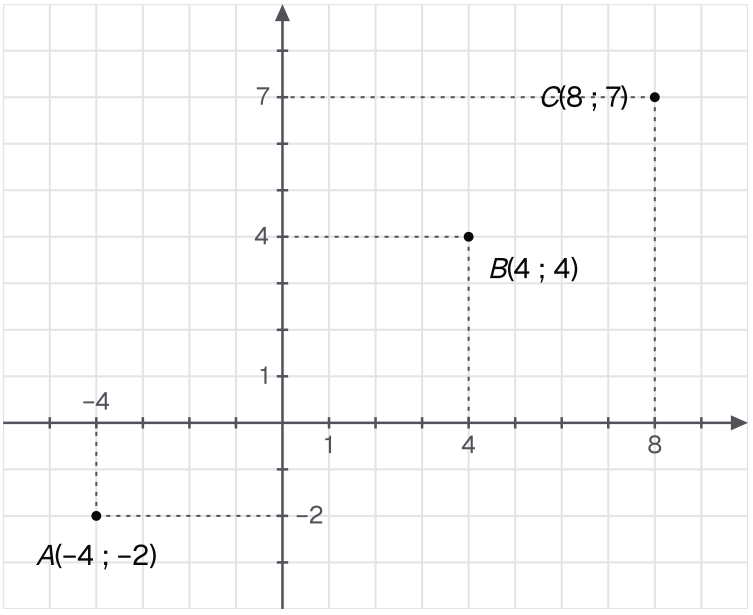
- vecteur : $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A ; y_B - y_A)$;
- milieu de $[AB]$: $\left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$;
- distance, en repère orthonormé : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$;

- coefficient directeur de (AB), si $x_A \neq x_B$: $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, puis $b = y_A - a\,x_A$.

À retenir : Bilan : quel outil pour quelle question

- **Un déplacement** : les coordonnées d'un vecteur, arrivée moins départ.
- **Un parallélogramme** : deux vecteurs égaux, ou deux diagonales de même milieu.
- **Une longueur, la nature d'un triangle** : la formule de la distance, puis le théorème de Pythagore ou sa réciproque.
- **Une droite** : son équation réduite $y = ax + b$; un point est dessus si ses coordonnées la vérifient.
- **Deux droites** : parallèles si $a = a'$; perpendiculaires, en repère orthonormé, si $a \times a' = -1$.

Problème : le plan d'un parc est muni d'un repère orthonormé, et l'unité représente 10 m. Le kiosque est en $A(-4;-2)$ et la fontaine en $B(4;4)$. Un banc est placé en $C(8;7)$.



Le plan du parc : le kiosque A, la fontaine B et le banc C, placés à partir de leurs coordonnées.

À toi : Le parc

(a) Calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

(b) Calcule les coordonnées du milieu M de $[AB]$.

(c) Calcule la distance AB, puis la distance réelle entre le kiosque et la fontaine.

(d) Détermine l'équation réduite de l'allée droite (AB).

(e) Le banc C est-il sur la droite (AB) ?

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Chaque question utilise une formule du rappel ci-dessus, dans l'ordre.
Indice 2
Pour (d), calcule d'abord $a = \dfrac{4-(-2)}{4-(-4)}$.
Indice 3
Point délicat : en (c), l'unité représente 10 m ; multiplie la distance trouvée par 10.

Réponse
(a) D'après la définition, $\overrightarrow{AB}(4-(-4);4-(-2))$, soit $\overrightarrow{AB}(8;6)$.

(b) D'après la formule du milieu, $x_M = \dfrac{-4+4}{2} = 0$ et $y_M = \dfrac{-2+4}{2} = 1$. Donc $M(0;1)$.

(c) Le plan du parc est muni d'un repère orthonormé : on peut donc calculer AB avec la formule de la distance.

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{8^2+6^2} \\ &= \sqrt{64+36} \\ &= \sqrt{100} = 10 \end{aligned}$$

L'unité représente 10 m : la distance réelle est $10 \times 10 = 100$ m.

(d) D'après la formule du coefficient directeur, $a = \dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4}$. Avec le point A :

$$\begin{aligned} b &= -2 - \frac{3}{4} \times (-4) \\ &= -2 + 3 = 1 \end{aligned}$$

Contrôle avec B : $\dfrac{3}{4} \times 4 + 1 = 4$. Donc (AB) : $y = \dfrac{3}{4}x + 1$.

(e) Pour C : $\dfrac{3}{4} \times 8 + 1 = 7$, c'est l'ordonnée de C. Le banc est donc sur la droite (AB).

À retenir : Ce qu'il faut savoir faire

- Placer un point et lire ses coordonnées dans un repère orthonormé.
- Calculer les coordonnées d'un vecteur et d'une somme de vecteurs ; traduire une égalité de vecteurs.
- Calculer les coordonnées d'un milieu ; retrouver une extrémité ou le quatrième sommet d'un parallélogramme.
- Calculer une distance ; reconnaître un triangle isocèle ou rectangle.
- Déterminer une équation réduite, tracer la droite, tester un point.

> - Reconnaître deux droites parallèles ou perpendiculaires ; en tracer une qui passe par un point donné.

Le mot du prof. Dans ce chapitre, chaque question devient un calcul sur des coordonnées. Avant de calculer, nomme la formule ou la propriété que tu utilises. Termine toujours par un contrôle : un point, une longueur ou une équation se vérifient.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Géométrie analytique » (3ac · general · mathematiques)