BURHAN

Les fonctions linéaires : Résumé

3ème Année Collège · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/3ac/mathematiques/fonctions-lineaires/resume

Chapitre	Semestre
Les fonctions linéaires	Semestre 2

Fonction linéaire, image et antécédent

Ce Résumé rassemble l'essentiel du chapitre. Relis-le avant un devoir.

Chaque méthode tient en quelques lignes et s'appuie sur un exemple chiffré.

Définition : Fonction linéaire

Soit a un nombre donné. La **fonction linéaire de coefficient** a est la fonction f qui, à tout nombre x, associe le nombre ax. On écrit :

$$f : x \mapsto ax$$

ou encore :

$$f(x) = ax.$$

- Le nombre $f(x)$ est l'**image** de x par la fonction f.
- Si $f(x) = y$, on dit que x est un nombre dont l'image est y : x est un **antécédent** de y par f.
- Le nombre a est le **coefficient** de la fonction linéaire f.

En clair. Une fonction linéaire multiplie chaque nombre par un même coefficient a. L'image de 0 vaut donc toujours 0.

Méthode : Calculer l'image d'un nombre

1. **Écris** l'expression de la fonction.
2. **Remplace** x par le nombre donné ; un nombre négatif se met entre parenthèses.
3. **Calcule** avec une seule règle par ligne.
4. **Termine** par une phrase qui nomme l'image.

Exemple : Trois images

Prenons la fonction linéaire définie par $g(x) = -0{,}6x$.

- $g(5) = -0{,}6 \times 5 = -3$: l'image de 5 est -3.
- $g(-10) = -0{,}6 \times (-10) = 6$: l'image de -10 est 6.

- $g\left(\frac{1}{3}\right) = -0{,}6 \times \frac{1}{3} = -0{,}2$: l'image de $\frac{1}{3}$ est $-0{,}2$.

Méthode : Trouver le nombre dont l'image est connue

1. **Pose** l'équation $ax = b$, où b est l'image donnée. Rappel : tu as appris à résoudre ce type d'équation plus tôt cette année.
2. **Divise** les deux membres par a, qui doit être non nul : $x = \frac{b}{a}$.
3. **Contrôle** en calculant l'image du nombre obtenu.
4. **Rédige** la conclusion. Ce nombre s'appelle aussi un antécédent de b.

Exemple : Un antécédent

Avec la même fonction g, cherchons le nombre dont l'image est $4{,}2$.

On résout $-0{,}6x = 4{,}2$ en divisant les deux membres par $-0{,}6$:

$$x = \frac{4{,}2}{-0{,}6} = -7.$$

Contrôle : $g(-7) = -0{,}6 \times (-7) = 4{,}2$. Le nombre dont l'image est $4{,}2$ est -7.

Attention : Image ou antécédent ?

Ces deux questions se ressemblent, mais elles vont en sens contraire. Avec $k(x) = 2{,}5x$:

- l'image de 10 se calcule directement : $k(10) = 25$;
- le nombre dont l'image est 10 se trouve en résolvant $2{,}5x = 10$: c'est 4.

Repère le mot « image » : il te dit si 10 est au départ ou à l'arrivée.

Fonction linéaire et proportionnalité

Propriété : Fonction linéaire et proportionnalité

Soit f la fonction linéaire de coefficient a.

- Pour tout nombre x **non nul**, $\frac{f(x)}{x} = a$: les images $f(x)$ sont **proportionnelles** aux nombres x, et a est le **coefficient de proportionnalité**.
- Réciproquement, si une grandeur y est proportionnelle à une grandeur x, avec le coefficient de proportionnalité a, alors $y = ax$: la fonction qui associe y à x est la fonction linéaire de coefficient a.

Exemple : Des dattes au souk

Au souk, les dattes coûtent 36 dirhams le kilogramme. Le prix est proportionnel à la masse.

Masse (kg)	$0{,}5$	2	$3{,}5$
Prix (dirhams)	18	72	126

Chaque prix divisé par sa masse donne 36.

Le prix de x kg est donc $p(x) = 36x$: p est la fonction linéaire de coefficient 36.

Méthode : Traduire une situation de proportionnalité

1. **Repère** les deux grandeurs. Vérifie que leur quotient reste le même.
2. **Calcule** ce quotient : c'est le coefficient a (prix d'une unité, vitesse, échelle).
3. **Écris** la fonction $x \mapsto ax$. Précise ce que représentent x et son image.
4. **Pour un pourcentage**, le coefficient vaut $1 + \dfrac{t}{100}$ pour une hausse de t pour cent, et $1 - \dfrac{t}{100}$ pour une baisse.

Exemple : Un sac soldé

Un sac coûte 250 dirhams. Il est soldé de 35 pour cent.

Le coefficient est $1 - \dfrac{35}{100} = 0{,}65$. Le prix soldé vaut donc :

$$250 \times 0{,}65 = 162{,}5$$

Après la remise, le sac coûte $162{,}5$ dirhams.

Attention : Le coefficient d'une hausse

Une hausse de 8 pour cent ne se traduit pas par le coefficient $0{,}08$: ce nombre ne donne que le montant ajouté.

Le nouveau prix s'obtient avec $1{,}08$. Ainsi, 75 dirhams deviennent $75 \times 1{,}08 = 81$ dirhams.

La représentation graphique

Rappel de géométrie analytique. Tu sais placer un point $M(x ; y)$ dans un repère.

Tu sais aussi qu'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées a une équation réduite $y = mx + p$, où m est son coefficient directeur.

Propriété : Représentation graphique d'une fonction linéaire

Le plan est muni d'un repère d'origine O. Soit f la fonction linéaire de coefficient a.

- La **représentation graphique** de f est l'ensemble des points $M(x; ax)$, où x est un nombre quelconque.
- C'est la **droite** qui passe par l'origine O du repère et par le point $A(1; a)$.
- Cette droite a pour équation $y = ax$: son coefficient directeur est le coefficient a de f.

Remarque

Ce résultat est admis.

Méthode : Tracer la droite d'une fonction linéaire

1. **Place** l'origine O : l'image de 0 est 0.
2. **Prends** un nombre non nul commode, dont l'image se place sans peine, et calcule-la.
3. **Place** le point obtenu et trace la droite qui passe par O et par ce point.
4. **Contrôle** avec un troisième point calculé : il doit tomber sur la droite.

Exemple : Un coefficient fractionnaire

Pour $h(x) = \frac{3}{4}x$, prends $x = 4$, un multiple du dénominateur : $h(4) = 3$.

La droite passe par O et par $B(4; 3)$.

Contrôle : $h(-4) = -3$, donc $C(-4; -3)$ est aussi sur la droite.

Attention : Pas linéaire si l'origine manque

Une fonction linéaire s'écrit $x \mapsto ax$, avec un coefficient fixe. Avec $x \mapsto 3x - 1$, l'image de 0 vaut -1 : sa représentation graphique ne passe pas par O, elle n'est pas linéaire.

L'aire d'un carré de côté x, égale à x^2, n'est pas linéaire non plus. Un côté de 2 donne une aire de 4 ; un côté de 4 donne 16, et non 8.

Lire sur le graphique

Méthode : Lire une image ou un nombre

1. **Image d'un nombre** : repère ce nombre sur l'axe des abscisses. Rejoins la droite par un trait vertical, puis l'axe des ordonnées par un trait horizontal : tu y lis l'image.
2. **Nombre dont l'image est connue** : fais le chemin dans l'autre sens, depuis l'axe des ordonnées.

3. **Écris** la valeur lue avec $\approx$, puis contrôle-la par le calcul.

Exemple : Deux lectures sur la droite de h

Trace avec soin la droite de h : elle passe par O et par $B(4;3)$.

Pars de 2 sur l'axe des abscisses : tu lis une image d'environ $1{,}5$. Le calcul le confirme : $h(2) = \frac{3}{4} \times 2 = 1{,}5$.

Pars ensuite de $-2{,}25$ sur l'axe des ordonnées : tu lis un nombre d'environ -3. En effet, $h(-3) = -2{,}25$.

Attention : Une lecture reste approchée

Un tracé fait à la main n'est jamais parfait. Une valeur lue s'écrit donc avec $\approx$, par exemple $h(2) \approx 1{,}5$.

Si l'expression est connue, seul le calcul donne la valeur exacte.

Retrouver l'expression

Propriété : Droite passant par l'origine du repère

Le plan est muni d'un repère d'origine O. Soit (D) une droite qui passe par O et qui n'est pas l'axe des ordonnées.

- (D) est la représentation graphique d'une fonction linéaire f.
- Si $M(x_M;y_M)$ est un point de (D) **distinct de** O, alors $x_M \neq 0$ et le coefficient de f est $a = \frac{y_M}{x_M}$.

Méthode : Déterminer le coefficient

1. **Pars** de $f(x) = ax$: seul le coefficient a manque.
2. **Avec un nombre non nul et son image** : si $f(x_0) = y_0$, alors $a = \frac{y_0}{x_0}$.
3. **Avec un point** $M(x_M;y_M)$ de la droite, autre que O : $a = \frac{y_M}{x_M}$.
4. **Écris** l'expression trouvée, puis vérifie-la sur la donnée de départ.

Exemple : Deux expressions retrouvées

Si $q(-4) = 10$, alors $a = \frac{10}{-4} = -2{,}5$ et $q(x) = -2{,}5x$. Vérification : $-2{,}5 \times (-4) = 10$.

Si la droite passe par O et par $N(6;4)$, alors $a = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

La fonction cherchée est $x \mapsto \frac{2}{3}x$.

Attention : Dans le bon ordre

Le coefficient est l'image divisée par le nombre. Si $f(4) = 7$, alors $a = \dfrac{7}{4} = 1{,}75$, et non $\dfrac{4}{7}$. Contrôle : $1{,}75 \times 4 = 7$.

Des écarts proportionnels

Exemple : Retour au souk

Reprends les dattes à 36 dirhams le kilogramme. Passer de 2 kg à $3{,}5$ kg ajoute $1{,}5$ kg.

Le prix augmente de $126 - 72 = 54$ dirhams, c'est-à-dire $36 \times 1{,}5$.

Propriété : Accroissements proportionnels

Soit f la fonction linéaire de coefficient a. Pour tous nombres x_1 et x_2 :

$$f(x_1) - f(x_2) = a\,(x_1 - x_2).$$

Si $x_1 \neq x_2$, alors :

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = a.$$

L'écart entre deux images est proportionnel à l'écart entre les deux nombres, avec le même coefficient a.

À retenir

En clair. Un **accroissement** est une différence : entre deux nombres, ou entre leurs images. Si $x_1 - x_2 = 1$, alors $f(x_1) - f(x_2) = a$: quand le nombre augmente de 1, on ajoute a à son image.

L'essentiel en une page

Fonction linéaire de coefficient a $f(x) = ax$	Image de 0 $f(0) = 0$
Nombre dont l'image est b, pour a non nul $x = \dfrac{b}{a}$	Coefficient, à partir d'un nombre non nul et de son image $a = \dfrac{f(x_0)}{x_0}$
Coefficient, à partir d'un point M distinct de O $a = \dfrac{y_M}{x_M}$	Équation de la représentation graphique $y = ax$
Hausse de t pour cent $1 + \dfrac{t}{100}$	Baisse de t pour cent $1 - \dfrac{t}{100}$

Écarts proportionnels

$$f(x_1) - f(x_2) = a\,(x_1 - x_2)$$

Méthode : Quelle méthode pour quelle question ?

- « Calcule l'image de … » : remplace x, puis calcule.
- « Trouve le nombre dont l'image est … » : résous $ax = b$.
- « Détermine la fonction linéaire … » : divise l'image par le nombre.
- « Trace la représentation graphique » : l'origine, un point calculé, un point de contrôle.
- « Lis sur le graphique » : trajet vertical ou horizontal, valeur approchée.
- « Ce point est-il sur la droite ? » : calcule l'image de son abscisse et compare-la à son ordonnée.
- Une hausse ou une baisse en pour cent : coefficient $1 + \dfrac{t}{100}$ ou $1 - \dfrac{t}{100}$.

Tu sais maintenant reconnaître, calculer, tracer et lire une fonction linéaire. Avec ces quatre gestes, tu traites la plupart des questions du chapitre.